

0.2 Rechentechnik

0.2.1 Addition und Subtraktion im Kopf

Addition	Subtraktion
Summand plus Summand	Minuend minus Subtrahend
$\underbrace{32 + 16}_{\text{Summe}} = 48$	$\underbrace{48 - 16}_{\text{Differenz}} = 32$

Addition = Hinzufügung von lat. **addere** = hinzufügen

Summand = hinzuzufügende Zahl von lat. **summa** = Summe

Subtraktion = Abziehung von lat. **trahere** = ziehen (Traktor), lat. **subtrahere** = abziehen

Minuend = zu verminderte Zahl von lat. **minuere** = vermindern

Subtrahend = abzuziehende Zahl

Differenz = Unterschied von lat. **ferre** = tragen, bringen, lat. **differe** = sich auseinanderbewegen

Viele Aufgaben lassen sich besser im Kopf rechnen, wenn man die Zahlen geschickt **zerlegt**. Die **Klammer** gibt an, welche Rechnung zuerst ausgeführt wird:

a)	b)	c)
$\begin{aligned} & 32 + 16 \\ & = (32 + 10) + 6 \\ & = \underbrace{42}_{\text{42}} + 6 \\ & = \mathbf{48} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 89 - 17 \\ & = (89 - 10) - 7 \\ & = \underbrace{79}_{\text{79}} - 7 \\ & = \mathbf{72} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 123 - 99 \\ & = (124 - 100) + 1 \\ & = \underbrace{24}_{\text{24}} + 1 \\ & = \mathbf{24} \end{aligned}$

Mehrfache Summen und Differenzen berechnet man durch geschicktes **Vertauschen** und **Zusammenfassen**. Die **Vertauschung ist nur bei der Addition möglich!**

a)	b)	c)
$\begin{aligned} & 32 + 51 + 18 \\ & = (32 + 18) + 51 \\ & = \underbrace{50}_{\text{50}} + 51 \\ & = \mathbf{101} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 123 - 18 - 15 \\ & = 123 - (18 + 15) \\ & = 123 - \underbrace{33}_{\text{33}} \\ & = \mathbf{90} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 67 - 25 + 18 \\ & = (67 + 18) - 25 \\ & = \underbrace{85}_{\text{85}} - 25 \\ & = \mathbf{60} \end{aligned}$

Übungen: Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Kopf Nr. 1 – 10

0.2.2 Multiplikation und Division im Kopf

Multiplikation	Division
Faktor mal Faktor	Dividend geteilt durch Divisor
$\underbrace{6 \cdot 12}_{\text{Produkt}} = 72$	$\underbrace{72 : 6}_{\text{Quotient}} = 12$

Multiplikation = Vervielfachen von lat. **multus** = viel

Faktor = bewirkende Zahl von lat. **facere** = machen, bewirken

Division = Teilung von lat. **dividere** = teilen

Dividend = zu teilende Zahl

Divisor = Teiler

Produkt = Hinführung, Ergebnis von lat. **ducere** = führen

Quotient = Zahl der Teiler von lat. **quotiens** = wie oft

Viele Aufgaben lassen sich besser im Kopf rechnen, wenn man die Zahlen geschickt **zerlegt**:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 16 \cdot 7 \\
 & = 10 \cdot 7 + 6 \cdot 7 \\
 & \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 & = 70 + 42 \\
 & = \mathbf{112}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & 98 \cdot 3 \\
 & = 90 \cdot 3 + 8 \cdot 3 \\
 & \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 & = 270 + 24 \\
 & = \mathbf{294}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & 98 \cdot 3 \\
 & = 100 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \\
 & \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 & = 300 - 6 \\
 & = \mathbf{294}
 \end{aligned}$$

Mehrfache Produkte berechnet man durch geschicktes **Vertauschen** und **Zusammenfassen**. Die **Vertauschung** ist nur bei der **Multiplikation** möglich!

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & = 25 \cdot 9 \cdot 4 \\
 & = (25 \cdot 4) \cdot 9 \\
 & \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 & = 100 \cdot 9 \\
 & = \mathbf{900}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & = 8 \cdot 7 \cdot 125 \\
 & = 7 \cdot (8 \cdot 125) \\
 & \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 & = 7 \cdot 1000 \\
 & = \mathbf{7000}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & = 9 : 15 : 5 \\
 & = (9 \cdot 5) : 15 \\
 & \quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\
 & = 45 : 15 \\
 & = \mathbf{3}
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Multiplikation und Division im Kopf Nr. 1 – 8

0.2.3 Kopfrechnen mit Zehnerpotenzen

Bei der **Addition** und **Subtraktion** bleibt die Zahl der Nullen **gleich**:

$$\begin{array}{rcl}
 2 + 3 & = & 5 \\
 20 + 30 & = & 50 \\
 200 + 300 & = & 500
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 5 - 2 & = & 3 \\
 50 - 20 & = & 30 \\
 500 - 200 & = & 300
 \end{array}$$

Bei der **Multiplikation** bzw. **Division** werden die Zahlen der Nullen **addiert** bzw. **subtrahiert**:

$$\begin{array}{rcl}
 2 \cdot 3 & = & 6 \\
 2 \cdot 30 & = & 60 \\
 20 \cdot 30 & = & 600 \\
 20 \cdot 300 & = & 6000 \\
 200 \cdot 300 & = & 60000
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 6 : 2 & = & 3 \\
 60 : 2 & = & 30 \\
 600 : 2 & = & 300 \\
 600 : 20 & = & 30 \\
 600 : 200 & = & 3
 \end{array}$$

Übungen: Aufgaben zum Kopfrechnen mit Zehnerpotenzen Nr. 1 – 12

0.2.4 Überschlagsrechnung

Bei der **Überschlagsrechnung** verwendete man **gerundete** Zahlen, um das Ergebnis möglichst **schnell** und **genau** im Kopf **abschätzen** zu können. Dabei muss man **selber entscheiden**, auf **welche Stelle** man rundet: Je höher die Rundungsstelle, desto schneller aber auch desto ungenauer wird die Abschätzung.

Bei der **Addition** und der **Subtraktion** rundet man beide Zahlen auf die **gleiche Stelle**:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 423 + 719 + 878 \approx 400 + 700 + 900 = \mathbf{2000} \\
 \text{b)} \quad & 374\,671 + 876\,54 \approx 400\,000 + 900\,000 = \mathbf{130\,000} \\
 \text{c)} \quad & 1289 - 479 \approx 1300 - 500 = \mathbf{800}
 \end{aligned}$$

Bei der **Multiplikation** kann man beide Faktoren **unabhängig** voneinander runden:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 1173 \cdot 865 \approx 1000 \cdot 900 = \mathbf{900\,000} \\
 \text{b)} \quad & 1173 \cdot 865 \approx 1200 \cdot 900 = \mathbf{1\,080\,000} \\
 \text{c)} \quad & 372\,493 \cdot 793 \approx 400\,000 \cdot 800 = \mathbf{3\,200\,000\,000}
 \end{aligned}$$

Bei der Division rundet man **zuerst** den **Divisor** und **anschließend** den **Dividenten**, so daß die Rechnung **aufgeht**:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & 9287 : 89 \approx 9000 : 90 = \mathbf{100} \\
 \text{b)} \quad & 1376 : 276 \approx 1200 : 300 = \mathbf{4} \\
 \text{c)} \quad & 654\,234 : 6273 \approx 660\,000 : 6000 = \mathbf{110}
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Überschlagsrechnung Nr. 1 – 7

0.2.5 Schriftliche Addition

Der wesentliche Vorteil des Stellenwertsystems ist die Zerlegung komplizierter Rechnungen mit großen Zahlen in mehrere einfache Rechnungen mit einzelnen Stellen. Bei der schriftlichen Addition schreibt man die beiden Summanden untereinander in eine **Stellenwerttafel** und addiert die einzelnen Stellen. Ist das Ergebnis zweistellig, so schreibt man den **Übertrag** unter die folgende Stelle. Zur **Kontrolle** führt man **immer** zuerst eine **Überschlagsrechnung** durch.

Aufgabe: 3094 + 6535 Überschlag: 3100 + 6500 = 9600	Aufgabe: 23 489 + 39 781 + 26 653 Überschlag: 23 000 + 40 000 + 27 000 = 90 000																																																																																											
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">T</td><td style="text-align: center;">H</td><td style="text-align: center;">Z</td><td style="text-align: center;">E</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">5</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">9</td><td></td></tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> 1. Summand 2. Summand Übertrag Ergebnis </div>									T	H	Z	E				3	0	9	4			+	6	5	3	5					1						9	6	1	2	9		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">ZT</td><td style="text-align: center;">T</td><td style="text-align: center;">H</td><td style="text-align: center;">Z</td><td style="text-align: center;">E</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">9</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">+</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">3</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">8</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> 1. Summand 2. Summand 3. Summand Übertrag Ergebnis </div>									ZT	T	H	Z	E			2	3	4	8	9			3	9	7	8	1		+	2	6	6	5	3			1	1	2	1				8	1	9	1	9	1
	T	H	Z	E																																																																																								
	3	0	9	4																																																																																								
+	6	5	3	5																																																																																								
		1																																																																																										
	9	6	1	2	9																																																																																							
	ZT	T	H	Z	E																																																																																							
	2	3	4	8	9																																																																																							
	3	9	7	8	1																																																																																							
+	2	6	6	5	3																																																																																							
	1	1	2	1																																																																																								
	8	1	9	1	9	1																																																																																						

Übungen: Aufgaben zur schriftlichen Addition Nr. 1 - 5

0.2.6 Schriftliche Subtraktion

Geht die Subtraktion in einer Stelle nicht auf, so nimmt man beim Minuend eine Zehnerpotenz hinzu und zieht sie dafür bei der folgenden Stelle als **Übertrag** zusätzlich ab:

Aufgabe: 3792 - 1278 Überschlag: 3800 - 1300 = 2500	Aufgabe: 43 732 - 21 458 Überschlag: 44 000 - 21 000 = 23 000																																																																																				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">T</td><td style="text-align: center;">H</td><td style="text-align: center;">Z</td><td style="text-align: center;">E</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">8</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td><td></td><td></td></tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> Minuend Subtrahend Übertrag Ergebnis </div>									T	H	Z	E				3	7	9	2			-	1	2	7	8						1					2	5	1	4			<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">ZT</td><td style="text-align: center;">T</td><td style="text-align: center;">H</td><td style="text-align: center;">Z</td><td style="text-align: center;">E</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">2</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">8</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">4</td><td></td></tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> Minuend Subtrahend Übertrag Ergebnis </div>									ZT	T	H	Z	E			4	3	7	3	2		-	2	1	4	5	8					1	1				2	2	2	7	4	
	T	H	Z	E																																																																																	
	3	7	9	2																																																																																	
-	1	2	7	8																																																																																	
			1																																																																																		
	2	5	1	4																																																																																	
	ZT	T	H	Z	E																																																																																
	4	3	7	3	2																																																																																
-	2	1	4	5	8																																																																																
			1	1																																																																																	
	2	2	2	7	4																																																																																

Bei der **mehrfachen Subtraktion** werden die **Subtrahenden zunächst addiert** und dann gemeinsam subtrahiert:

Aufgabe: 3792 - 1267 - 278 Überschlag: 3800 - 1300 - 300 = 2200	Aufgabe: 43 732 - 21 458 - 6543 Überschlag: 44 000 - 21 000 - 7000 = 16 000																																																																																																		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">T</td><td style="text-align: center;">H</td><td style="text-align: center;">Z</td><td style="text-align: center;">E</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">9</td><td style="text-align: center;">2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">7</td><td></td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">8</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">7</td><td></td><td></td></tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> Minuend Subtrahend Subtrahend Übertrag Ergebnis </div>									T	H	Z	E				3	7	9	2			-	1	2	6	7			-	2	7	8						1	2					2	2	4	7			<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td><td style="border: 1px solid black; width: 15px; height: 15px;"></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">ZT</td><td style="text-align: center;">T</td><td style="text-align: center;">H</td><td style="text-align: center;">Z</td><td style="text-align: center;">E</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">2</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">8</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">6</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">5</td><td style="text-align: center;">7</td><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">1</td><td></td></tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> Minuend Subtrahend Subtrahend Übertrag Ergebnis </div>									ZT	T	H	Z	E			4	3	7	3	2		-	2	1	4	5	8		-	6	5	4	3				1	1	1	1				1	5	7	3	1	
	T	H	Z	E																																																																																															
	3	7	9	2																																																																																															
-	1	2	6	7																																																																																															
-	2	7	8																																																																																																
		1	2																																																																																																
	2	2	4	7																																																																																															
	ZT	T	H	Z	E																																																																																														
	4	3	7	3	2																																																																																														
-	2	1	4	5	8																																																																																														
-	6	5	4	3																																																																																															
	1	1	1	1																																																																																															
	1	5	7	3	1																																																																																														

Übungen: Aufgaben zur schriftlichen Subtraktion Nr. 1 - 4

