1.2. Prüfungsaufgaben zur Bruchrechnung

Aufgabe 1: Addition und Subtraktion
Berechne die folgenden Ausdrücke und vereinfache anschließend soweit möglich:

a) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{b}$

b) $\frac{5}{3x}-\frac{11}{9}-\frac{4}{x^2}$

c) $\frac{3}{9a}+\frac{1}{6a^2}+\frac{1}{4ab}$

d) $\frac{a}{a-b}-1$

e) $1-\frac{2a}{a+b}$

f) $\frac{7a-4}{4a+4}-\frac{a-2}{2a+2}$

g) $\frac{4b-2}{2b+4}-\frac{8b-7}{6b+12}-\frac{2b-5}{10b+20}$

Lösungen

a) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{b}=\frac{2b+3a}{3ab}$ (1)

b) $\frac{5}{3x}-\frac{11}{9}-\frac{4}{x^2}=\frac{15x}{9x^2}-\frac{11x^2}{9x^2}-\frac{36}{9x^2}=\frac{15x-11x^2-36}{9x^2}$ (2)

c) $\frac{3}{9a}+\frac{1}{6a^2}+\frac{1}{4ab}=\frac{4ab}{12a^2b}+\frac{2b}{12a^2b}+\frac{3a}{12a^2b}=\frac{4ab+2b+3a}{12a^2b}$ (2)

d) $\frac{a}{a-b}-1=\frac{a}{a-b}-\frac{a-b}{a-b}=\frac{a-a+b}{a-b}=\frac{b}{a-b}$ (3)

e) $1-\frac{2a}{a+b}=\frac{a+b-2a}{a+b}=\frac{-a+b}{a+b}$ (2)

f) $\frac{7a-4}{4a+4}-\frac{a-2}{2a+2}=\frac{7a-4}{4(a+1)}-\frac{a-2}{2(a+1)}=\frac{7a-4-2(a-2)}{4(a+1)}=\frac{5a}{4a+4}$ (3)

g) $\frac{4b-2}{2b+4}-\frac{8b-7}{6b+12}-\frac{2b-5}{10b+20}=\frac{60b-30}{30(b+2)}-\frac{40b-35}{30(b+2)}-\frac{6b-15}{30(b+2)}=\frac{16b-20}{30(b+2)}=\frac{8b-10}{15b+30}$ (3)

Aufgab2: Multiplikation und Division
Berechne die folgenden Ausdrücke und vereinfache anschließend soweit möglich:

a) $8ab:\frac{4a}{5b}$

b) $(7x-4):\frac{14x-8}{y^2}$

c) $\left(\frac{b}{a}-1\right):\left(\frac{a-b}{ab}\right)$

d) $\frac{3a^2+6ab}{6xy-3y^2}:\frac{4ab+8b^2}{8x^2-4xy}$

Lösungen

a) $8ab : \frac{4a}{5b} = \frac{8ab \cdot 5b}{4a} = 10b^2$ (2)

b) $(7x-4) : \frac{14x-8}{y^2} = \frac{(7x-4)y^2}{2(7x-4)} = \frac{y^2}{2}$ (2)

c) $\left(\frac{b}{a}-1\right) : \left(\frac{a-b}{ab}\right) = \left(\frac{b-a}{a}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a-b}\right) = \frac{-ab(a-b)}{a(a-b)} = -a$ (3)

d) $\frac{3a^2+6ab}{6xy-3y^2} : \frac{4ab+8b^2}{8x^2-4xy} = \frac{3a(a+2b)}{3y(2x-y)} \cdot \frac{4x(2x-y)}{4b(y+2b)} = \frac{ax}{by}$ (3)

Aufgabe 3: Vereinfachen von Summen und Differenzen mit Hilfe der binomischen Formeln
Berechne die folgenden Ausdrücke und vereinfache anschließend soweit möglich:

a) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$

b) $\frac{u+1}{u+2} - \frac{u-2}{u-1}$

c) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{2ab-2b^2}{a^2-2ab+b^2}$

d) $\frac{a}{a-b}-\frac{3ab-b^2}{b^2-a^2}$

e) $\frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} - \frac{64}{a^2-16}$

f) $\frac{a+2b}{a-5b} - \frac{2a-b}{a+5b} + 1$

g) $\frac{2x-y}{2x-2y} - \frac{x-y}{3x+3y} + \frac{y(3y-x)}{3x^2-3y^2}$

Lösungen

a) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y} = \frac{x-y+x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{2x}{x^2-y^2}$ (2)

b) $\frac{u+1}{u+2} - \frac{u-2}{u-1} = \frac{(u+1)(u-1)-(u-2)(u+2)}{(u+2)(u-1)} = \frac{3}{u^2+u-2}$ (3)

c) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{2ab-2b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}-\frac{2ab-2b^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}-\frac{2ab-2b^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2-2ab+b^2}{(a-b)^2} = 1$ (4)

d) $\frac{a}{a-b}-\frac{3ab-b^2}{b^2-a^2} = \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)}-\frac{3ab-b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+ab-3ab+b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a-b}{a+b}$ (3)

e) $\frac{a+4}{a-4} - \frac{a-4}{a+4} - \frac{64}{a^2-16} = \frac{(a+4)^2-(a-4)^2}{(a-4)(a+4)}-\frac{64}{a^2-16} = \frac{16a}{a^2-16}-\frac{64}{a^2-16} = \frac{16a-64}{a^2-16} =$

$\frac{16(a-4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{16}{a+4}$ (5)

f) $\frac{a+2b}{a-5b} - \frac{2a-b}{a+5b} + 1 = \frac{(a+2b)(a+5b)-(2a-b)(a+5b)}{(a-5b)(a+5b)} + 1 = \frac{-a^2-2ab+15b^2}{a^2-25b^2} + 1 =$

$\frac{-a^2-2ab+15b^2+a^2-25b^2}{a^2-25b^2} = \frac{-2ab-10b^2}{a^2-25b^2} = \frac{-2b(a+5b)}{(a+5b)(a-5b)} = -\frac{2b}{a-5b}$ (6)

g) $\frac{2x-y}{2x-2y} - \frac{x-y}{3x+3y} + \frac{y(18y-4x)}{12x^2-12y^2} = \frac{(2x-y)(3x+3y)}{6x^2-6y^2} - \frac{(x-y)(2x-2y)}{6x^2-6y^2} + \frac{y(9y-2x)}{6x^2-6y^2} =$

$\frac{6x^2+6xy-3y^2}{6x^2-6y^2} - \frac{2x^2-4xy+2y^2}{6x^2-6y^2} + \frac{9y^2-2xy}{6x^2-6y^2} = \frac{4x^2+8xy+4y^2}{6x^2-6y^2} = \frac{4(x+y)^2}{6(x-y)(x+y)} = \frac{2(x+y)}{3(x-y)}$ (6)

Aufgabe 4: Vereinfachen von Produkten und Quotienten mit Hilfe der binomischen Formeln
Berechne die folgenden Ausdrücke und vereinfache anschließend soweit möglich:

a) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$

b) $\left(\frac{m}{2}+\frac{3n}{4}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-\frac{3n}{4}\right)$

c) $\frac{x^2y-2x^2}{8uv}\cdot\frac{4u^2v}{3xy^2-12x}$

d) $\frac{4a^2+12ab+9b^2}{15x^2y}\cdot\frac{55x^2}{18a+27b}$

e) $\frac{5mn-7n^2}{9a^2+12ab+4b^2}\cdot\frac{12a+8b}{25m^2-35mn}$

f) $\frac{ab^2}{2c^2d^2-18c^2}\cdot\frac{6c^2d+18c^2}{a^2b}$

g) $\frac{x^2+2xy+y^2}{2x-2y} : \frac{4x^2-16}{2x^2-4xy+2y^2}$

h) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$

Lösungen

a) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2-2\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}-2+\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2a^2-2a^2b^2+b^2b^2}{a^2b^2} = \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2}$ (4)

b) $\left(\frac{m}{2}+\frac{3n}{4}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-\frac{3n}{4}\right) = \frac{2m+3n}{4}\cdot\frac{2m-3n}{4} = \frac{4m^2-9n^2}{16}$ (3)

c) $\frac{x^2y-2x^2}{8uv}\cdot\frac{4u^2v}{3xy^2-12x} = \frac{4x^2u^2v(y-2)}{24xuv(y^2-4)} = \frac{xu(y-2)}{6(y-2)(y+2)} = \frac{xu}{6(y+2)}$ (3)

d) $\frac{4a^2+12ab+9b^2}{15x^2y}\cdot\frac{55x^2}{18a+27b} = \frac{(2a+3b)^2}{15x^2y}\cdot\frac{55x^2}{9(2a+3b)} = \frac{11(2a+3b)}{27y}$ (4)

e) $\frac{5mn-7n^2}{9a^2+12ab+4b^2}\cdot\frac{12a+8b}{25m^2-35mn} = \frac{n(5m-7n)}{(3a+4b)^2}\cdot\frac{4(3a+2b)}{5m(5m-7n)} = \frac{4n(5m-7n)}{5m(3a+4b)}$ (4)

f) $\frac{ab^2}{2c^2d^2-18c^2}\cdot\frac{6c^2d+18c^2}{a^2b} = \frac{6ab^2c^2(d+3)}{2a^2bc^2(d^2-9)} = \frac{6ab^2c^2(d+3)}{2a^2bc^2(d-3)(d+3)} = \frac{3b}{a(d-3)}$ (4)

g) $\frac{x^2+2xy+y^2}{2x-2y} : \frac{4x^2-4y^2}{2x^2-4xy+2y^2} = \frac{(x+y)^2}{2(x-y)}\cdot\frac{2(x-y)^2}{4(x^2-y^2)} = \frac{(x+y)^2}{2(x-y)}\cdot\frac{2(x-y)^2}{4(x-y)(x+y)} = \frac{x+y}{4}$ (4)

h) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x^2-y^2}{xy}\right):\left(\frac{x-y}{xy}\right) = \frac{(x-y)(x+y)}{xy}\cdot\frac{xy}{x-y} = x+y$ (4)