

1.3. Prüfungsaufgaben zu linearen Gleichungen

Aufgabe 1: Lineare Gleichungen ohne Parameter

Gib die Lösungsmenge der folgenden Gleichung an und führe die Probe durch:

- a) $2(16 - x) - 3(15 - 2x) - 6(x - 3) = 1$ $L = \{2\}$
- b) $5(8x - 3) - 5(3x - 8) - (16 + 20x) = 4$ $L = \{-1\}$
- c) $2[3 - 2(x - 1)] - 3(2 - 3x) = x + 12(x - 1)$ $L = \{2\}$
- d) $3[1 - 3(x - 2)] - 2(4 - 2x) = 6(2 - x)$ $L = \{-1\}$
- e) $7x - [14 - (2x + 5)] = 18 - [3x + (15 - 4x)]$ $L = \left\{\frac{3}{2}\right\}$
- f) $4x - [7 - (x + 15)] = 11 - [5x - (3x - 17)]$ $L = \{-2\}$
- g) $(x - 4)(6 - x) = (x - 3)(8 - x)$ $L = \{0\}$
- h) $(x + 3)(2x + 5) = (x + 7)(2x - 1)$ $L = \{11\}$

Aufgabe 2: Lineare Gleichung mit einem Parameter

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- a) $4a(x + 1) = 2a(x + a) + 6a$
- b) $3x - 9 = ax - a^2$
- c) $a(6x - 1) = 3a(x + 3a) + 2a$
- d) $bx + 16 = b^2 - 4x$

Lösungen

- a) $L = \{a + 1\}$ für $a \neq 0$ und $L = \mathbb{R}$ für $a = 0$
- b) $L = \{a + 3\}$ für $a \neq 3$ und $L = \{\}$ für $a = 3$
- c) $L = \{3a + 1\}$ für $a \neq 0$ und $L = \mathbb{R}$ für $a = 0$
- d) $L = \{b - 4\}$ für $b \neq -4$ und $L = \{\}$ für $b = -4$

Aufgabe 3: Lineare Gleichung mit zwei Parametern

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in Abhängigkeit von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$: (3)

- a) $tx - 2 = 5 + sx$
- b) $4 + tx - 2x = 5x + s$

Lösungen:

- a) $L = \left\{\frac{7}{t-s}\right\}$ für $t \neq s$ und $L = \{0\}$ für $t = s$.
- b) $L = \left\{\frac{4-s}{7-t}\right\}$ für $t \neq 7$, $L = \{\}$ für $t = 5$ mit $s \neq 4$ und $L = \mathbb{R}$ für $t = 5$ mit $s = 4$

Aufgabe 4: Anwendungsaufgabe

Eine 100 Stufen lange Rolltreppe mit bewegt sich mit 3 Stufen pro Sekunde nach oben. Jan schafft auf der Rolltreppe 3 Stufen pro Sekunde aufwärts und 4 Stufen pro Sekunde abwärts. In wie vielen Sekunden ist er einmal ganz hoch und wieder hinunter gelaufen?

Lösung

Nach oben: $t = \frac{100 \text{ Stufen}}{3+3 \text{ Stufen/Sekunde}} = 16,67 \text{ Sekunden.}$

Nach unten: $t = \frac{100 \text{ Stufen}}{4-1 \text{ Stufen/Sekunde}} = 100 \text{ Sekunden} \Rightarrow 116,67 \text{ Sekunden insgesamt.}$

Aufgabe 5: Anwendungsaufgabe

Ein Sportwagen mit 108 km/h überholt einen Lieferwagen mit 72 km/h. Nach wie vielen Sekunden hat er einen Abstand von 100 m erreicht? Welche Strecke hat er in dieser Zeit zurückgelegt?

Lösung

$108 \text{ km/h} = \frac{108000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 30 \text{ m/s}$ und $72 \text{ km/h} = \frac{72000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$

Nach $t = \frac{100 \text{ m}}{30 - 20 \text{ m/s}} = 10 \text{ Sekunden}$, in denen er $10 \text{ s} \cdot 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 300 \text{ m}$ zurückgelegt hat.

Aufgabe 6: Anwendungsaufgabe

Ein 5 m langer Sportwagen überholt mit 108 km/h einen 90 km/h schnellen Lieferwagen, der 7 m lang ist. Er wechselt 30 m hinter dem Lieferwagen auf die Gegenfahrbahn und kehrt 30 m vor dem Lieferwagen wieder auf die rechte Spur zurück. Wie viele Sekunden befindet er sich auf der Gegenfahrbahn? Welche Strecke hat er in dieser Zeit zurückgelegt?

Lösung

$$108 \text{ km/h} = \frac{108000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 30 \text{ m/s} \text{ und } 90 \text{ km/h} = \frac{90000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

$$\text{Nach } t = \frac{30+7+30+5 \text{ m}}{30-25 \text{ m/s}} = 14,4 \text{ Sekunden, in denen er } 14,4 \text{ s} \cdot 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 432 \text{ m zurückgelegt hat.}$$

Aufgabe 7: Verteilungsrechnung

An einer offenen Handelsgesellschaft ist A mit 192 000 €, B mit 132 000 € und C mit 156 000 € beteiligt. Von dem Gewinn in Höhe von 64 000 € erhält A zunächst 12 000 € für die Geschäftsführung. Der Rest des Gewinns wird im Verhältnis der Kapitalanteile aufgeteilt. Wieviel € erhält jeder Gesellschafter?

Lösung

$$192\,000x + 12\,000 + 132\,000x + 156\,000x = 64\,000 \Leftrightarrow x = \frac{13}{120} \Rightarrow \text{A erhält } 12\,000 \text{ €} + 192\,000 \cdot \frac{13}{120} \text{ €} = 32\,800 \text{ €}$$

$$\text{B erhält } 132\,000 \cdot \frac{13}{120} \text{ €} = 14\,300 \text{ €} \text{ und C erhält } 156\,000 \cdot \frac{13}{120} \text{ €} = 16\,900 \text{ €}.$$

Aufgabe 8: Verteilungsrechnung

An einer Kommanditgesellschaft ist A mit 120 000 €, B mit 200 000 €, C mit 160 000 € beteiligt. Von dem Gewinn in Höhe von 64 000 € erhält Vollerhänder A vorweg 28 000 € für die Geschäftsführung. Der Rest des Gewinns wird im Verhältnis der Kapitaleinlagen verteilt. Wieviel € erhält jeder Gesellschafter?

Lösung

$$120\,000x + 28\,000 + 200\,000x + 160\,000x = 64\,000 \Leftrightarrow x = \frac{3}{400} \Rightarrow \text{A erhält } 28\,000 \text{ €} + 120\,000 \cdot \frac{3}{400} \text{ €} = 37\,000 \text{ €}$$

$$\text{B erhält } 200\,000 \cdot \frac{3}{400} \text{ €} = 15\,000 \text{ €} \text{ und C erhält } 160\,000 \cdot \frac{3}{400} \text{ €} = 12\,000 \text{ €}.$$

Aufgabe 9: Verteilungsrechnung

75 000,00 € sind an drei Erben so zu verteilen, dass A 2 000,00 € mehr als das Dreifache von B, C halb so viel erhält wie A und B zusammen. Wieviel € erhält jeder?

Lösung

$$(3x + 2000) + x + (2x + 1000) = 75\,000 \Leftrightarrow x = 12\,000 \Rightarrow \text{A erhält } 3 \cdot 75\,000 + 2000 = 38\,000 \text{ €}, \text{ B erhält } 75\,000 \text{ €} \text{ und C erhält } 275\,000 + 1000 = 25\,000 \text{ €}.$$

Aufgabe 10: Verteilungsrechnung

In einem Testament wird bestimmt, dass die Frau des Erblassers $\frac{2}{5}$ des Gesamtvermögens und die Tochter 4 000,00 € mehr als der Sohn erhalten soll. Wie groß ist das Gesamtvermögen, wenn die Mutter 6 000,00 € mehr erbt als die Tochter?

Lösung

$$x = \frac{2}{5}x + \left(\frac{2}{5}x - 6\,000\right) + \left(\frac{2}{5}x - 10\,000\right) \Leftrightarrow x = 80\,000 \Rightarrow \text{Die Mutter erhält } \frac{2}{5} \cdot 80\,000 = 32\,000 \text{ €}, \text{ die Tochter}$$

$$\text{erhält } \frac{2}{5} \cdot 80\,000 - 6\,000 = 26\,000 \text{ €} \text{ und der Sohn erhält } \frac{2}{5} \cdot 80\,000 \text{ €} - 10\,000 = 22\,000 \text{ €}.$$

Aufgabe 11: Verteilungsrechnung

A vermacht seiner Frau die $33\frac{1}{3}\%$ seines Vermögens. Die Tochter soll 5 000,00 € mehr als jeder der beiden Söhne erhalten. Wie groß ist das Vermögen, wenn die Mutter 10 000,00 € mehr erbt als die Tochter?

Lösung

$$x = \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x - 10\,000\right) + \left(\frac{1}{3}x - 15\,000\right) \Leftrightarrow x = 120\,000 \Rightarrow \text{Die Mutter erhält } \frac{1}{3} \cdot 120\,000 = 40\,000 \text{ €}, \text{ die}$$

Tochter erhält $\frac{1}{3} \cdot 120\,000 - 10\,000 = 30\,000 \text{ €}$ und die beiden Söhne erhalten jeweils $\frac{1}{3} \cdot 120\,000 \text{ €} - 15\,000 = 25\,000 \text{ €}$.