

1.4. Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen (LGS)

Aufgabe 1: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren

Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme an. Verwende ein Verfahren eigener Wahl.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x + y = 13 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 5x + 4y = 9 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} -5u + 2v = -1 \\ 6u - v = 2 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{e)} \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + y = -1 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} a + 2b = 5 \\ -a + 3b = 3 \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 3y = 5 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} a + 2b = 3 \\ 2a + 4b = 5 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases} & \text{j)} \begin{cases} -2a + b = 3 \\ 3a - b = 4 \end{cases} & \text{k)} \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases} & \text{l)} \begin{cases} -3a - 2b = 0 \\ a + 4b = 1 \end{cases} \end{array}$$

Aufgabe 2: Diagonalverfahren

Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme an. Verwende das Diagonalverfahren.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y = -1 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} -3x + 2y - 5z = 7 \\ -2x + y + z = 8 \\ 3y + 4z = 13 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 2u + v + w = 3 \\ u - v = 1 \\ u - v - 2w = -1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + y + 3z = 1 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} a - 2b + 3c = -1 \\ 2a + b - 4c = 3 \\ 3a + 2b - 5c = 7 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -5x_1 + 2x_2 - x_3 = 15 \end{cases} \end{array}$$

Aufgabe 3: Matrizenschreibweise

Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme an. Formuliere die LGS in Matrizenschreibweise und wende das Diagonalverfahren an.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} a + 3b + 2c + 10d = 16 \\ 2a + 7b + c + 22d = 32 \\ 3a + 11b + 6c + 37d = 55,5 \\ a + 3b + 5c + 11d = 19,5 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} a + b + c + d = -2 \\ -a + b - c + d = -10 \\ 3a + 2b + c + 2d = -2 \\ -2b + d = 0 \end{cases} \end{array}$$

Aufgabe 4: Lösungsmengen von LGS

Gib die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme im homogenen und inhomogenen Fall an.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{g)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \text{h)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 & 4 \\ 2 & 12 & -6 & 8 \\ -1 & -6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.4. Lösungen zu den Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen (LGS)

Aufgabe 1: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \quad \text{g) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \text{h) } L = \{ \}$$

$$\text{i) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{13}{6} \end{pmatrix} \quad \text{j) } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{k) } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \text{l) } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Diagonalverfahren

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: Matrizenschreibweise

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Lösungsmengen von LGS

$$\text{a) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{g) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{b) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{h) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{c) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{i) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und}$$

$$\text{d) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad L_{\text{hom}} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{e) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{f) } L_{\text{inh}} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } L_{\text{hom}} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$