

## 1.4. Prüfungsaufgaben zu LGS

### Aufgabe 1: 2 x 2 LGS

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left| \begin{array}{l} -3x + \frac{2}{5}y = -1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}y = -\frac{2}{9} \end{array} \right| \quad \text{b) } \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y = 4 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{12} \end{array} \right| \quad \text{c) } \left| \begin{array}{l} -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = -1 \end{array} \right| \\ \text{d) } \left| \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 3x + 4y = 10 \end{array} \right| \quad \text{e) } \left| \begin{array}{l} 2x - 3y = -5 \\ 3x + y = -2 \end{array} \right| \quad \text{f) } \left| \begin{array}{l} 2x - 4 = y \\ 3x + y = 6 \end{array} \right| \end{array}$$

### Lösungen

- a)  $(x | y) = (1 | 5)$
- b)  $(x | y) = (4 | 5)$
- c)  $(x | y) = (-1 | 3)$
- d)  $(x | y) = (2 | 1)$
- e)  $(x | y) = (-1 | 1)$
- f)  $(x | y) = (2 | 0)$

### Aufgabe 2: 2x2 LGS zeichnerisch und rechnerisch

Bestimme die Lösungsmenge des folgenden LGS

- a) zeichnerisch näherungsweise durch Ablesen aus den Graphen
- b) rechnerisch exakt mit dem Gleichsetzungsverfahren
- c) rechnerisch exakt mit dem Additionsverfahren.
- d) Bestimme außerdem alle vier Achsenschnittpunkte der beiden Geraden.

$$\left| \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x - 4y = 2 \\ 4x + 3y = 6 \end{array} \right|$$

### Lösungen:

f:  $y = \frac{3}{2}x - 2$  und  $g: y = -\frac{2}{3}x + 2$  schneiden sich in  $S_{fg}(\frac{24}{13} | \frac{10}{13})$  und haben die Achsenschnittpunkte  $S_{fx}(\frac{4}{3} | 0)$ ,  $S_{fy}(0 | -2)$ ,  $S_{gx}(3 | 0)$  und  $S_{gy}(0 | 2)$

f:  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$  und  $g: y = -\frac{4}{3}x + 2$  schneiden sich in  $S_{fg}(\frac{6}{5} | \frac{2}{5})$  und haben die Achsenschnittpunkte  $S_{fx}(\frac{2}{3} | 0)$ ,  $S_{fy}(0 | -\frac{1}{2})$ ,  $S_{gx}(\frac{3}{2} | 0)$  und  $S_{gy}(0 | 2)$

### Aufgabe 3: 3 x 3 LGS

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

$$\text{a) } \left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{array} \right|$$

$$\text{b) } \left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -15 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \end{array} \right|$$

$$\text{c) } \left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -7 \end{array} \right|$$

$$|-5x_1 + x_2 - x_3 = 11|$$

$$d) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

### Lösungen

Beispielrechnung für Teil a):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot(-2) \leftarrow + \\ \cdot 3 \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 5x_2 - 8x_3 = -14 \\ -3x_2 + 10x_3 = 24 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \leftarrow + \\ \cdot 5 \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 5x_2 - 8x_3 = -14 \\ + 26x_3 = 78 \end{cases} :26$$

a)  $(x_1|x_2|x_3) = (1|2|3)$

b)  $(x_1|x_2|x_3) = (1|-2|4)$

c)  $(x_1|x_2|x_3) = (-2|1|0)$

d)  $(x_1|x_2|x_3) = (3|-1|1)$

### Aufgabe 4: 4 x 4 LGS

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

**Lösung:**  $(x_1|x_2|x_3|x_4) = (7|5|-3|2)$

### Aufgabe 5: 4 x 4 LGS in Matrizenschreibweise

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme:

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -2 & | & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 3 & | & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & | & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -2 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & | & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & | & 8 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & | & 10 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & -1 & | & -8 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & | & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & | & 9 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$

### Lösungen:

a)  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -2 & | & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 & | & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & | & 8 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & | & 10 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & -15 & 2 & 4 & | & 10 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 5 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$c) \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \cong \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 11 & 0 & 15 & 42 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right) \cong \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & -22 & 92 & 302 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 32 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6: 3 x 3 LGS in Matrizenschreibweise mit unendlich viele Lösungen**

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$a) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -6 & 3 \\ -2 & -4 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

$$b) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & -3 \end{array} \right)$$

**Lösungen:**

$$a) L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b) L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$