1.4. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

In vielen mathematischen Problemen werden zwei Zahlen x und y gesucht, die gleichzeitig zwei verschiedenen Gleichungen (1) und (2) genügen müssen. Man spricht dann von einem **Gleichungssystem** aus zwei Gleichungen für zwei Variable. Enthalten die Gleichungen nur lineare Ausdrücke ohne Quadrate, Wurzeln oder andere Potenzen, so handelt es sich um ein **lineares Gleichungssystem** (**LGS**)

Beispiel für ein nichtlineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} (1) & \left| \; x^2 - 2y = 1 \; \right| \\ (2) & \left| \; 2^x + y^2 = 7 \; \right| \end{array}$$

Beispiel für ein lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{ll} (1) & \left| \; 2x - 3y = 1 \; \right| \\ (2) & \left| \; 3x + y = 7 \; \right| \end{array}$$

Um die Lösung eines **LGS** aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen zu erhalten, muss zunächst eine der beiden Variablen in der Gleichung (2) mit Hilfe von Gleichung (1) **eliminiert (entfernt)** werden. Dies erreicht man mit speziellen **Eliminierungsverfahren**, nämlich, dem **Einsetzungs**-, **Gleichsetzungs**- oder **Additionsverfahren.** Enthält Gleichung (2) nur noch eine Variable, so kann sie nach dieser aufgelöst werden. Das Ergebnis kann dann in Gleichung (1) eingesetzt werden, um die andere Variable zu berechnen.

Die **Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren** sind theoretisch (!) **immer** anwendbar, während das **Additionsverfahren** in der Regel nur bei **linearen Gleichungssystemen** erfolgreich ist. Es lässt sich aber dafür sehr leicht auch auf Systeme aus **drei und mehr Gleichungen und Unbekannten** ausbauen.

1.4.1. Das Einsetzungsverfahren

Eine der Gleichungen wird nach einer Unbekannten aufgelöst, z.B. Gleichung (1) nach x:

$$\begin{array}{ll} (1) & \left| \; 2x - 3y = 1 \; \right| \; +3y; :2 \\ (2) & \left| \; 3x + y = 7 \; \right| \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \left| \; x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y \; \right| \\ (2) & \left| \; 3x + y = 7 \; \right| \end{array}$$

Eliminierung von y und Berechnung von x durch **Einsetzen** von Gl. (1) in Gl. (2)

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y\right) + y &= 7 && \mid \text{Klammern auflösen} \\ \frac{3}{2} + \frac{11}{2}y &= 7 && \mid -\frac{3}{2} \\ \frac{11}{2}y &= \frac{11}{2} && \mid \cdot\frac{2}{11} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Berechnung von x durch **Einsetzen** von y = 1 in eine der beiden Gleichungen, z.B. Gleichung (1):

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cdot 1 = 2$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4.2. Das Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach **derselben Unbekannten** aufgelöst, z.B. x:

$$\begin{array}{ll|l} (1) & 2x - 3y = 1 & +3y;\ :2 \\ (2) & 3x + y = 7 & -y;\ :3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1) & x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}y \\ (2) & x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}y \end{array}$$

Eliminierung von y und Berechnung von x durch **Gleichsetzen** der beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}y \qquad \left| + \frac{1}{3}y; - \frac{1}{2}\right.$$

$$\frac{11}{6}y = \frac{11}{6} \qquad \left| \cdot \frac{6}{11}\right.$$

$$y = 1$$

Berechnung von y durch **Einsetzen** von y = 1 in eine der beiden Gleichungen, z.B. Gleichung (1):

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 1 = 2$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4.3. Das Additionsverfahren

Die Eliminierung der Variablen x und die Berechnung von x und y geschieht **ohne Einsetzen** nur durch geschickte **Äquivalenzumformungen**.
Um x zu eliminieren, bringt man die beiden Koeffizienten von x auf das **kleinste gemeinsame Vielfache**. (den „kleinsten gemeinsamen Nenner“). Außerdem wählt man die Vorzeichen der Faktoren so, dass sich die beiden Koeffizienten **im Vorzeichen unterscheiden**. Nun **addiert** man beide Seiten von Gleichung (1) zu Gleichung (2), wobei sich die Koeffizienten vor x aufheben.

$$\begin{array}{ll|l} (1) & 2x - 3y = 1 & \cdot(-3) \\ (2) & 3x + y = 7 & \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} (1) & -6x + 9y = -3 & \quad :(-3) \\ (2) & 6x + 2y = 14 & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} (1) & 2x - 3y = 1 & \\ (2) & 11y = 11 & :11; \cdot 3 \end{array}$$

Ebenso verfährt man nun mit den Koeffizienten vor y:

$$\begin{array}{ll|l} (1) & 2x - 3y = 1 & \\ (2) & 3y = 3 & + \quad :3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|l} (1) & 2x = 4 & :2 \\ (2) & y = 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übungen: *Aufgaben zu LGS Nr. 1*

1.4.4. Das Diagonalverfahren

Das Diagonalverfahren ist ein spezielles **Additionsverfahren** mit dem sich LGS mit vielen Gleichungen und vielen Unbekannten schnell und sicher lösen lassen. Man verwendet **Äquivalenzumformungen**, um das LGS auf **Diagonalform** zu bringen, so dass sich die Lösungen ohne Einsetzen direkt ablesen lassen.

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & - & z & = 0 \\ x & - & 2y & + & z & = 3 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = -1 \end{array}\right| \begin{array}{llll} & & \cdot 3 & \\ \cdot(-2) & + & & + \\ & & \cdot(-2) & \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & - & z & = 0 \\ & & 5y & - & 3z & = -6 \\ & - & y & + & z & = 2 \end{array}\right| \begin{array}{ll} & \\ & \\ \cdot 5 & + \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & y & - & z & = 0 \\ & & 5y & - & 3z & = -6 \\ & & & & 2z & = 4 \end{array}\right| \begin{array}{llll} & & & \\ \cdot 2 & & & + \\ \cdot 3 & + & :2 & \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rcrl} 2x & + & y & = 2 \\ & & 10y & = 0 \\ & & z & = 2 \end{array}\right| \begin{array}{ll} & + \\ :(-10) & \\ & \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{rrrl} 2x & & & = 2 \\ & y & & = 0 \\ & & z & = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} :2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \textbf{Lösungsvektor} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Übungen: *Aufgaben zu LGS Nr. 2*

1.4.5. LGS in Matrizenschreibweise

Bei größeren LGS verwendet man oft die Matrizenschreibweise: die Variablen werden nicht mehr ausgeschrieben und die Gleichheitszeichen durch einen einfachen senkechten Strich angedeutet:

Beispiel:

LGS in Gleichungsschreibweise

$$\left|\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & y & + & 2z & - & u & = 3 \\ 2x & - & y & - & z & + & 2u & = 5 \\ 3x & - & y & + & z & - & u & = 0 \\ x & + & y & + & z & - & 2u & = -2 \end{array}\right|$$

LGS in Matrizenschreibweise:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{llllll} \cdot 2 & + & \cdot 3 & & & \\ & & & + & & + \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 7 & -4 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{llll} & & & \\ \cdot(-2) & + & \cdot(-2) & + \\ & & & \\ & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 3 \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -60 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ :(-15) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ \\ + \\ \cdot 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-3) \quad \cdot(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ **Lösungsvektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Übungen: *Aufgaben zu LGS Nr. 3*

1.4.6. Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

LGS können keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben:

Beispiel für ein LGS, das keine Lösung besitzt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung 0 = 4 ist für **kein** z erfüllt. Es gibt also keinen Lösungsvektor, der alle drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt, d.h., L = {}.

Beispiel für ein LGS, das viele Lösung besitzt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzte Gleichung 0 = 0 ist für **alle** z erfüllt. Die Variable z kann also frei gewählt werden und wird als **Parameter** aufgefasst, z.B. $z = t \in \mathbb{R}$

$$\left| \begin{array}{r} x + y \quad = 3 \\ 2y + z = 3 \\ z = t \end{array} \right|$$

Die anderen beiden Variablen können nun durch Einsetzen in Abhängigkeit von t dargestellt werden:

$$2y + z = 3 \Leftrightarrow 2y + t = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$$

$$x + y = 3 \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$$

Die Lösungsvektoren hängen also von t ab:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 + 0,5t \\ 1,5 - 0,5t \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Der Übersicht halber stellt man die Anteile mit und ohne Abhängigkeit von t getrennt dar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Die Lösbarkeit eines LGS lässt sich erst erkennen, wenn man es auf Dreiecksform gebracht hat. Ein LGS mit m Gleichungen (=**Zwangsbedingungen**) für n Variablen (=**Freiheitsgrade**) in **Dreiecksform** hat

- **keine** Lösung, wenn m > n (letzte Gleichung in der Gestalt 0z = b mit $b \neq 0$)
- **eine** Lösung, wenn m = n (letzte Gleichung in der Gestalt az = b mit $a \neq 0$)
- **unendlich viele** Lösungen, wenn m < n (letzte Gleichung in der Gestalt 0z = 0)

Übungen: *Aufgaben zu LGS Nr. 4*