1.5. Prüfungsaufgaben zur Wurzelrechnung

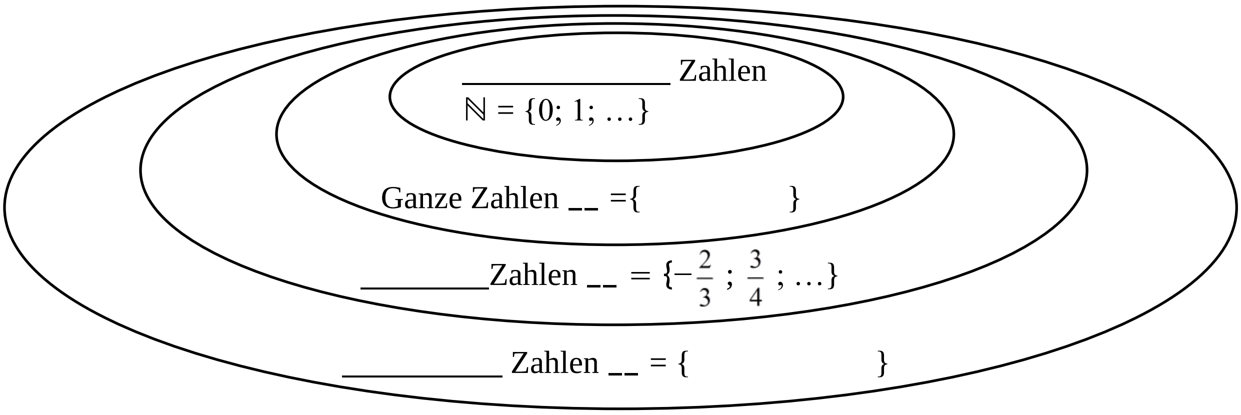
Aufgabe 1a: Zahlenmengen (4)
Ergänze die Tabelle. Nenne jeweils zwei Beispiele:

Zahlenmenge	**Abkürzung**	**Beispiele**
Natürliche Zahlen		
	$\mathbb{Z}$	
		$\frac{2}{3}$; $-\frac{12}{13}$
Reelle Zahlen		

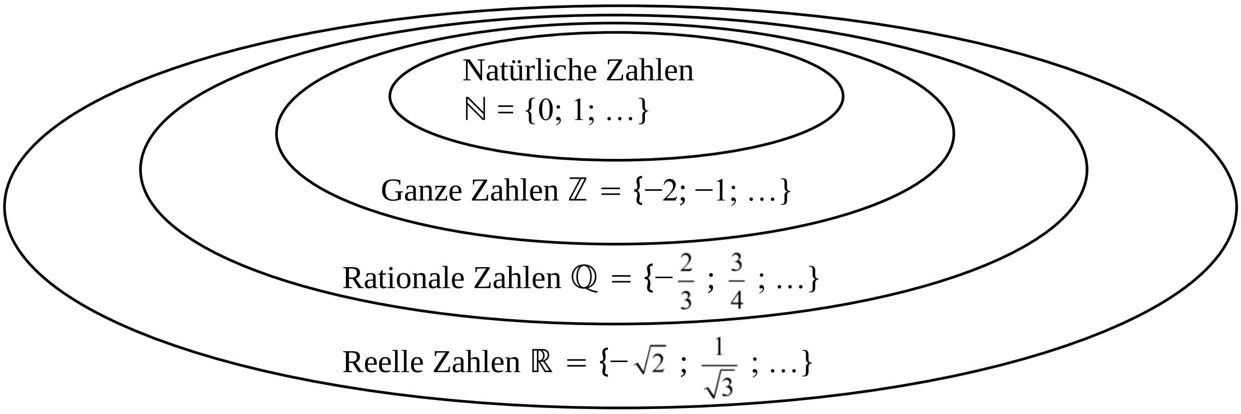
Aufgabe 1a: Zahlenmengen (4)

Zahlenmenge	**Abkürzung**	**Beispiele**
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	0; 1
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	−1; −2
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\frac{2}{3}$; $-\frac{12}{13}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	$\sqrt{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Aufgabe 1b: Zahlenmengen (4)
Ergänze das Mengendiagramm. Nenne jeweils Mengenbezeichnung, Abkürzung und zwei Beispiele:



Aufgabe 1b: Zahlenmengen (4)



Aufgabe 2: Intervallschreibweise
Schreibe als Intervall

a) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x < 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x\}$ c) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 10\}$ d) $\{x \in \mathbb{R}: x < 10\}$

Lösungen

a) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x < 4\} = [-10; 4[$ (1)

b) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x\} = [-10; \infty[$ (1)

c) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 10\} =]-10; 4[$ (1)

d) $\{x \in \mathbb{R}: x < 10\} =]-\infty; 10[$ (1)

Aufgabe 3a: Intervallschachtelung (4)
Berechne $\sqrt{5}$ auf zwei Nachkommastellen genau mit Hilfe der Intervallschachtelung. Starte mit dem Intervall [2; 3] und gib alle Zwischenintervalle an.

Aufgabe 3a: Intervallschachtelung (4)

linke Grenze	rechte Grenze
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
2	$2{,}5^2 = 6{,}25$
2	$2{,}25^2 \approx 5{,}06$
2	$2{,}24^2 \approx 5{,}02$
$2{,}23^2 \approx 4{,}97$	2,24
$2{,}235^2 \approx 4{,}99$	2,24

$\Rightarrow 2{,}235 < \sqrt{5} < 2{,}24$

$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2{,}24$

Aufgabe 3b: Intervallschachtelung (4)
Berechne $\sqrt{6}$ auf zwei Nachkommastellen genau mit Hilfe der Intervallschachtelung. Starte mit dem Intervall [2; 3] und gib alle Zwischenintervalle an.

Aufgabe 3b: Intervallschachtelung (4)

linke Grenze	rechte Grenze
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
2	$2{,}5^2 = 6{,}25$
$2{,}25^2 \approx 5{,}06$	2,5
$2{,}4^2 \approx 5{,}76$	2,5
2,4	$2{,}45^2 \approx 6{,}001$
$2{,}44^2 \approx 5{,}95$	2,45
$2{,}445^2 \approx 5{,}98$	2,45

$\Rightarrow 2{,}445 < \sqrt{6} < 2{,}45$

$\Rightarrow \sqrt{6} \approx 2{,}45$

Aufgabe 3c: Intervallschachtelung (4)
Berechne $\sqrt{7}$ auf zwei Nachkommastellen genau mit Hilfe der Intervallschachtelung. Starte mit dem Intervall [2; 3] und gib alle Zwischenintervalle an.

Aufgabe 3c: Intervallschachtelung (4)

linke Grenze	rechte Grenze
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2{,}5^2 = 6{,}25$	3
2,5	$2{,}75^2 \approx 7{,}56$
$2{,}6^2 = 6{,}76$	$2{,}7^2$
2,6	$2{,}7^2 = 7{,}29$
2,6	$2{,}65^2 \approx 7{,}02$
$2{,}64^2 \approx 6{,}97$	2,65
$2{,}645^2 \approx 6{,}99$	2,65

$\Rightarrow 2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}65$

$\Rightarrow \sqrt{7} \approx 2{,}65$

Aufgabe 4a: Quadratische Gleichungen (16)
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen und führe die Probe durch:

a) $x^2 = -4$ (1)
b) $x^2 = 9$ (2)
c) $x^2 = 8$ (2)
d) $\frac{1}{2}x^2 - 4 = 4$ (3)
e) $(2x + 3)^2 = (x + 6)^2$ (4)
f) $(3x - 2)^2 = (x - 6)^2$ (4)

Lösungen

a) L = {} (1)
b) L = {± 3}, Probe für x = +3: $3^2 = 9$ ☺ (1)
Probe für x = −3: $(-3)^2 = 9$ ☺ (1)
c) L = {± $\sqrt{8}$ }, Probe für x = + $\sqrt{8}$: $\left(\sqrt{8}\right)^{2\ 2} = 8$ ☺ (1)
Probe für x = − $\sqrt{8}$: $\left(-\sqrt{8}\right)^2 = 8$ ☺ (1)
d) L = {± 4}, Probe für x = +4: $\frac{1}{2}4^2 - 4 = 8 - 4 = 4$ ☺ (2)
Probe für x = −4: $\frac{1}{2}(-4)^2 - 4 = 8 - 4 = 4$ ☺ (1)
e) L = {± 3}, Probe für x = +3: linke Seite $(2\cdot 3 + 3)^2 = 9^2 = 81$ und rechte Seite $(3 + 6)^2 = 9^2 = 81$ ☺ (3)
Probe für x = −3: linke Seite $(2\cdot(-3) + 3)^2 = (-3)^2 = 9$ und rechte Seite $(-3 + 6)^2 = 3^2 = 9$ ☺ (1)
f) L = {± 2}, Probe für x = +2: linke Seite $(3\cdot 2 - 2)^2 = 4^2 = 16$ und rechte Seite $(2 - 6)^2 = (-4)^2 = 16$ ☺ (3)
Probe für x = −2: linke Seite $(3\cdot(-2) - 2)^2 = (-8)^2 = 64$ und rechte Seite $(-2 - 6)^2 = (-8)^2 = 64$ ☺ (1)

Aufgabe 4b: Quadratische Gleichungen (16)
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen und führe die Probe durch:

a) $x^2 = -9$ (1)
b) $x^2 = 4$ (2)
c) $x^2 = 5$ (2)
d) $\frac{1}{3}x^2 + 3 = 6$ (3)
e) $(2x - 3)^2 = (x - 6)^2$ (4)
f) $(3x + 2)^2 = (x + 6)^2$ (4)

Lösungen

a) L = {} (1)
b) L = {± 2}, Probe für x = +2: $2^2 = 4$ ☺ (1)
Probe für x = −2: $(-2)^2 = 4$ ☺ (1)
c) L = {± $\sqrt{5}$ }, Probe für x = + $\sqrt{5}$: $\left(\sqrt{5}\right)^{2\ 2} = 5$ ☺ (1)
Probe für x = − $\sqrt{5}$: $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$ ☺ (1)
d) L = {± 3}, Probe für x = +3: $\frac{1}{3}3^2 + 3 = 3 + 3 = 6$ ☺ (2)
Probe für x = −3: $\frac{1}{3}(-3)^2 + 3 = 3 + 3 = 6$ ☺ (1)
e) L = {± 3}, Probe für x = +3: linke Seite $(2\cdot 3 - 3)^2 = 3^2 = 9$ und rechte Seite $(3 - 6)^2 = (-3)^2 = 9$ ☺ (3)
Probe für x = −3: linke Seite $(2\cdot(-3) - 3)^2 = (-9)^2 = 81$ und rechte Seite $(-3 - 6)^2 = (-9)^2 = 81$ ☺ (1)
f) L = {± 2}, Probe für x = +2: linke Seite $(3\cdot 2 + 2)^2 = 8^2 = 64$ und rechte Seite $(2 + 6)^2 = 8^2 = 64$ ☺ (3)
Probe für x = −2: linke Seite $(3\cdot(-2) + 2)^2 = (-4)^2 = 16$ und rechte Seite $(-2 + 6)^2 = 4^2 = 16$ ☺ (1)

Aufgabe 4c: Quadratische Gleichungen (16)

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen und führe die Probe durch:

a) $x^2 = 6$ (1)
b) $x^2 = -6$ (2)
c) $x^2 = 81$ (2)
d) $\frac{1}{5}x^2 - 3 = 2$ (3)
e) $(2x - 5)^2 = (x - 10)^2$ (4)
f) $(5x + 2)^2 = (x + 10)^2$ (4)

Lösungen

a) $L = \{\pm\sqrt{6}\}$, Probe für $x = +\sqrt{6}$: $\left(\sqrt{6}\right)^{2\;2} = 6$ ☺ (1)
Probe für $x = -\sqrt{6}$: $\left(-\sqrt{6}\right)^2 = 6$ ☺ (1)
b) $L = \{\}$ (1)
c) $L = \{\pm 9\}$, Probe für $x = +9$: $9^2 = 81$ ☺ (1)
Probe für $x = -9$: $(-9)^2 = 81$ ☺ (1)
d) $L = \{\pm 5\}$, Probe für $x = +5$: $\frac{1}{5}5^2 - 3 = 5 - 3 = 2$ ☺ (2)
Probe für $x = -5$: $\frac{1}{5}(-5)^2 - 3 = 5 - 3 = 2$ ☺ (1)
e) $L = \{\pm 5\}$, Probe für $x = +5$: linke Seite $(2\cdot 5 - 5)^2 = 5^2 = 25$ und rechte Seite $(5 - 10)^2 = (-5)^2 = 25$ ☺ (3)
Probe für $x = -5$: linke Seite $(2\cdot(-5) - 5)^2 = (-15)^2 = 225$ und rechte Seite $(-5 - 10)^2 = (-15)^2 = 225$ ☺ (1)
f) $L = \{\pm 2\}$, Probe für $x = +2$: linke Seite $(5\cdot 2 + 2)^2 = 12^2 = 144$ und rechte Seite $(2 + 10)^2 = 12^2 = 144$ ☺ (3)
Probe für $x = -2$: linke Seite $(5\cdot(-2) + 2)^2 = (-8)^2 = 64$ und rechte Seite $(-2 + 10)^2 = 8^2 = 64$ ☺ (1)

Aufgabe 5a: Vereinfachen von Wurzelausdrücken (5)

Vereinfache soweit wie möglich:

a) $\sqrt{5a^3}\cdot\sqrt{5a}$ b) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{z}}}{\sqrt{\frac{y^2}{z}}}$ c) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$

Aufgabe 5a: Vereinfachen von Wurzelausdrücken (5)

a) $\sqrt{5a^3}\cdot\sqrt{5a} = \sqrt{25\cdot a^4} = 5a^2$ (1)

b) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{z}}}{\sqrt{\frac{y^2}{z}}} = \sqrt{\frac{1}{z}:\frac{y^2}{z}} = \sqrt{\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{y^2}} = \sqrt{\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y}$ (2)

c) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{24}{1}:\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{24}{1}\cdot\frac{2}{3}} = \sqrt{16} = 4$ (2)

Aufgabe 5b: Vereinfachen von Wurzelausdrücken (5)

Vereinfache soweit wie möglich:

a) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{4}{5}}}$ c) $\dfrac{\sqrt{xy^3}}{\sqrt{\frac{x}{y}}}$

Aufgabe 5b: Vereinfachen von Wurzelausdrücken (5)

a) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{27\cdot 3} = \sqrt{81} = 9$ (1)

b) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{4}{5}}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}:\dfrac{4}{5}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{5}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ (2)

c) $\dfrac{\sqrt{xy^3}}{\sqrt{\frac{x}{y}}} = \sqrt{\dfrac{xy^3}{1}:\dfrac{x}{y}} = \sqrt{\dfrac{xy^3}{1}\cdot\dfrac{y}{x}} = \sqrt{y^4} = y^2$ (2)

Aufgabe 5c: Vereinfachen von Wurzelausdrücken (5)

Vereinfache soweit wie möglich: a) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}$ c) $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{\sqrt{xy}}$

Aufgabe 5c: Vereinfachen von Wurzelausdrücken (5)

a) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{72\cdot 2} = \sqrt{144} = 12$ (1)

b) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}:\dfrac{5}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}} = \sqrt{\dfrac{4}{25}} = \dfrac{2}{5}$ (2)

c) $\dfrac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}:\dfrac{xy}{1}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{xy}} = \sqrt{\dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{1}{y}$ (2)

Question 5d: Simplifying algebraic expressions with roots (12)
Simplify. Reduce the roots as far as possible and make the denominator free of roots.

a) $\sqrt{9\cdot 7}$	b) $\sqrt{9+7}$	c) $\sqrt{9:7}$	d) $\sqrt{9-7}$
e) $\sqrt{216}\cdot\sqrt{27}$	f) $\sqrt{216}:\sqrt{27}$	g) $\sqrt{216}+\sqrt{27}$	h) $\sqrt{216}-\sqrt{27}$
i) $\dfrac{2}{\sqrt{98}}$	j) $\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	k) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	l) $\dfrac{\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}$

Question 5d: Simplifying algebraic expressions with roots (12)

a) $\sqrt{9\cdot 7} = 3\cdot\sqrt{7}$ (1)

b) $\sqrt{9+7} = 4$ (1)

c) $\sqrt{9:7} = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3}{7}\sqrt{7}$ (1)

d) $\sqrt{9-7} = \sqrt{2}$ (1)

e) $\sqrt{216}\cdot\sqrt{27} = 6\cdot\sqrt{6}\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 18\sqrt{18} = 56\sqrt{3}$ (1)

f) $\sqrt{216}:\sqrt{27} = \dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$ (1)

g) $\sqrt{216}+\sqrt{27} = 6\cdot\sqrt{6} + 3\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3}\,(2\sqrt{2} + 1)$ (1)

h) $\sqrt{216}-\sqrt{27} = 6\cdot\sqrt{6} - 3\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3}\,(2\sqrt{2} - 1)$ (1)

i) $\dfrac{2}{\sqrt{98}} = \dfrac{2}{7\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$ (1)

j) $\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

k) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (1)

l) $\dfrac{\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot(1+2\sqrt{3})}{1-4\cdot 3} = \dfrac{6+\sqrt{3}}{-11}$ (1)

Question 5e: Simplifying algebraic expressions with roots (12)
Simplify. Reduce the roots as far as possible and make the denominator free of roots.

a) $\sqrt{9\cdot 8}$ b) $\sqrt{9+8}$ c) $\sqrt{9:8}$ d) $\sqrt{9-8}$

e) $\sqrt{125}\cdot\sqrt{32}$ f) $\sqrt{125}:\sqrt{32}$ g) $\sqrt{125}+\sqrt{32}$ h) $\sqrt{125}-\sqrt{32}$

i) $\dfrac{2}{\sqrt{50}}$ j) $\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ k) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ l) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}}$

Question 5e: Simplifying algebraic expressions with roots (12)

a) $\sqrt{9\cdot 8} = 3\cdot\sqrt{8} = 6\cdot\sqrt{2}$ (1)
b) $\sqrt{9+8} = \sqrt{17}$ (1)
c) $\sqrt{9:8} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ (1)
d) $\sqrt{9-8} = 1$ (1)
e) $\sqrt{125}\cdot\sqrt{32} = 5\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{2} = 20\sqrt{10}$ (1)
f) $\sqrt{125}:\sqrt{32} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{5}{8}\sqrt{10}$ (1)
g) $\sqrt{125}+\sqrt{32} = 5\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$ (1)
h) $\sqrt{125}-\sqrt{32} = 5\sqrt{5} - 4\sqrt{2}$ (1)
i) $\dfrac{2}{\sqrt{50}} = \dfrac{2}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ (1)
j) $\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{3} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (1)
k) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (1)
l) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot(1+3\sqrt{2})}{1-9\cdot 2} = \dfrac{6+\sqrt{2}}{-17}$ (1)

Question 5f: Simplifying algebraic expressions with roots (6)
Simplify. Reduce the roots as far as possible and make the denominator free of roots.

a) $\sqrt{48}\cdot\sqrt{75}$ b) $\sqrt{48}+\sqrt{75}$ c) $\dfrac{12}{\sqrt{216}}$ d) $\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{8}}{2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

Question 5f: Simplifying algebraic expressions with roots (6)

a) $\sqrt{48}\cdot\sqrt{75} = 4\cdot\sqrt{3}\cdot 5\cdot\sqrt{3} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$ (1)
b) $\sqrt{48}+\sqrt{75} = 4\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ (1)
c) $\dfrac{12}{\sqrt{216}} = \dfrac{12}{6\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (1)
d) $\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\dfrac{1}{5}\sqrt{5} = \dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ (1)
e) $\dfrac{3}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{8}}{2} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ (1)
f) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \dfrac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = 2-\sqrt{3}$ (1)

Question 5g: Simplifying algebraic expressions with roots (6)
Simplify. Reduce the roots as far as possible and make the denominator free of roots.

a) $\sqrt{98}\cdot\sqrt{28}$ b) $\sqrt{63}+\sqrt{28}$ c) $\dfrac{15}{\sqrt{125}}$ d) $\sqrt{7}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{8}}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

Question 5g: Simplifying algebraic expressions with roots (6)

a) $\sqrt{98}\cdot\sqrt{28} = 7\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{7} = 14\sqrt{14}$ (1)

b) $\sqrt{63}+\sqrt{28} = 3\sqrt{7}+2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$ (1)

c) $\dfrac{15}{\sqrt{125}} = \dfrac{15}{5\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{5}\sqrt{5}$ (1)

d) $\sqrt{7}-\dfrac{1}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}-\dfrac{1}{7}\sqrt{7} = \dfrac{6}{7}\sqrt{7}$ (1)

e) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}-\dfrac{\sqrt{8}}{3} = \dfrac{2}{3\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{6}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (1)

f) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1} = \dfrac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ (1)

Question 5h: Simplifying algebraic expressions with roots (6)

Simplify. Reduce the roots as far as possible and make the denominator free of roots.

a) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{18}$ b) $\sqrt{147}-\sqrt{75}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt{32}}$ d) $\sqrt{11}-\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ e) $\dfrac{3}{\sqrt{27}}-\dfrac{\sqrt{27}}{3}$ f) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Question 5h: Simplifying algebraic expressions with roots (6)

a) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{18} = 5\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2} = 30$ (1)

b) $\sqrt{147}-\sqrt{75} = 7\sqrt{3}-5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (1)

c) $\dfrac{4}{\sqrt{32}} = \dfrac{15}{4\sqrt{2}} = \dfrac{15}{8}\sqrt{2}$ (1)

d) $\sqrt{11}-\dfrac{3}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}-\dfrac{3}{11}\sqrt{11} = \dfrac{8}{11}\sqrt{11}$ (1)

e) $\dfrac{3}{\sqrt{27}}-\dfrac{\sqrt{27}}{3} = \dfrac{3}{3\sqrt{3}}-\dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ (1)

f) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \dfrac{1}{3}\left(5-\sqrt{10}+\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)$ (1)

Aufgabe 6: Rechenregeln für Wurzelausdrücke

Vereinfache:

a) $\sqrt{(5a)^2-(4a)^2}$

b) $(\sqrt{8}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}$

c) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

d) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$

e) $x\sqrt{a}+2y\sqrt{b}+3x\sqrt{a}-y\sqrt{b}$

f) $2x\sqrt{a}-a\sqrt{x}-x\sqrt{a}-a\sqrt{x}$

g) $\sqrt{8}-\sqrt{3}\;^2$

h) $\sqrt{8}-\sqrt{3}\quad\sqrt{8}+\sqrt{3}$

i) $(\sqrt{48a}-\sqrt{3a})^2$

j) $\dfrac{\sqrt{a^2-9}}{\sqrt{a+3}}$

k) $\sqrt{\dfrac{1}{3}x}\;\sqrt{27x^3}+\sqrt{75x^3}$

l) $\sqrt{125y}-\sqrt{80y}\;\sqrt{\dfrac{1}{5}y^3}$

m) $3\sqrt{t^4+2t^2}-t\sqrt{4t^2+8}$

n) $3\sqrt{a^4-3a^2}-a\sqrt{4a^2-12}$

o) $\sqrt{9x^2+12xy+4y^2}$

p) $\sqrt{\dfrac{1}{4}u^2+uv+v^2}$

q) $\sqrt{2x^2+x\sqrt{6x^2-(x\sqrt{2})^2}}$

r) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x-y}}$

Lösungen

a) $\sqrt{(5a)^2-(4a)^2} = 3a$ (2)

b) $(\sqrt{8}-\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} = 11 - 2\sqrt{6}$ (2)

c) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5}) = -3$ (2)

d) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 7$ (2)

e) $x\sqrt{a}+2y\sqrt{b}+3x\sqrt{a}-y\sqrt{b} = 4x\sqrt{a} + y\sqrt{b}$ (2)

f) $2x\sqrt{a}-a\sqrt{x}-x\sqrt{a}-a\sqrt{x} = x\sqrt{a} - 2a\sqrt{x}$ (2)

g) $\sqrt{8}-\sqrt{3}\ ^{2} = 8 - 2\sqrt{24} + 3 = 11 - 2\sqrt{24}$ (3)

h) $\sqrt{8}-\sqrt{3}\quad \sqrt{8}+\sqrt{3} = 8 - 3 = 5$ (2)

i) $(\sqrt{48a}-\sqrt{3a})^2 = 27a$ (2)

j) $\dfrac{\sqrt{a^2-9}}{\sqrt{a+3}} = \sqrt{a-3}$ (2)

k) $\sqrt{\frac{1}{3}x}\quad \sqrt{27x^3}+\sqrt{75x^3} = 3x^2 + 5x^2 = 8x^2$ (4)

l) $\sqrt{125y}-\sqrt{80y}\quad \sqrt{\frac{1}{5}y^3} = 5y^2 - 4y^2 = y^2$ (3)

m) $3\sqrt{t^4+2t^2} - t\sqrt{4t^2+8} = t\cdot\sqrt{t^2+2}$ (2)

n) $3\sqrt{a^4-3a^2} - a\sqrt{4a^2-12} = a\cdot\sqrt{a^2-3}$ (2)

o) $\sqrt{9x^2+12xy+4y^2} = 3x + 2y$ (3)

p) $\sqrt{\frac{1}{4}u^2+uv+v^2} = \frac{1}{2}u + v$ (3)

q) $\sqrt{2x^2+x\sqrt{6x^2-(x\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2x^2+x\sqrt{6x^2-2x^2}} = \sqrt{2x^2+x\sqrt{4x^2}} = \sqrt{2x^2+x\cdot 2x} = 2x$ (3)

r) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y}$ (2)

Aufgabe 7: Teilweises Wurzelziehen

Ziehe die Wurzeln teilweise:

a) $\sqrt{288}$ b) $\sqrt{242}$ c) $\sqrt[3]{250}$ d) $\sqrt{98}$

Lösungen

a) $\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ (1)

b) $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$ (1)

c) $\sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2}$ (1)

d) $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ (1)

Aufgabe 8: Rechenregeln für Wurzelausdrücke und teilweises Wurzelziehen
Ziehe die Wurzeln teilweise, mache den Nenner wurzelfrei und vereinfache soweit wie möglich:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3}$

b) $\frac{10}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{5}$

c) $\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}x\sqrt{x}$

d) $\frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$

e) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{45}}{\sqrt{8}}$

f) $\frac{\sqrt{54}-\sqrt{24}}{\sqrt{125}}$

g) $\frac{\sqrt{75}-\sqrt{48t^2}}{\sqrt{108}}$

h) $\frac{\sqrt{98t^2}-\sqrt{50}}{\sqrt{32t^2}}$

i) $\frac{\sqrt{63x^3}-\sqrt{28x^3}}{\sqrt{7x}}$

j) $\frac{\sqrt{20a^3}+\sqrt{45a^3}}{\sqrt{5a}}$

k) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

l) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

m) $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{112}-\sqrt{63}}$

n) $\frac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{\sqrt{28}+\sqrt{175}}$

o) $\frac{2\sqrt{s}+\sqrt{t}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}}$

p) $\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

q) $\frac{1}{\sqrt{5x}+\sqrt{4x}}$

r) $\frac{1}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$

Lösungen

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$ (2)

b) $\frac{10}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$ (2)

c) $\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ (2)

d) $\frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a}$ (2)

e) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{45}}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{4}$ (2)

f) $\frac{\sqrt{54}-\sqrt{24}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{25}$ (2)

g) $\frac{\sqrt{75}-\sqrt{48t^2}}{\sqrt{108}} = \frac{5-4t}{6}$ (2)

h) $\frac{\sqrt{98t^2}-\sqrt{50}}{\sqrt{32t^2}} = \frac{7t-5}{4t}$ (2)

i) $\frac{\sqrt{63x^3}-\sqrt{28x^3}}{\sqrt{7x}} = 3x - 2x = x$ (3)

j) $\frac{\sqrt{20a^3}+\sqrt{45a^3}}{\sqrt{5a}} = 2a + 3a = 5a$ (3)

k) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ (1)

l) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$ (1)

m) $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{12}}{\sqrt{112}-\sqrt{63}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{21}}{7}$ (2)

n) $\frac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{\sqrt{28}+\sqrt{175}} = \frac{\sqrt{5}}{7\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{49}$ (2)

o) $\frac{2\sqrt{s}+\sqrt{t}}{\sqrt{s}+\sqrt{t}} = \frac{2s-\sqrt{st}-t}{s-t}$ (2)

p) $\dfrac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{a+\sqrt{ab}-2b}{a-b}$ (2)

q) $\dfrac{1}{\sqrt{5x}+\sqrt{4x}} = \dfrac{\sqrt{5x}-\sqrt{4x}}{x}$ (2)

r) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{3}$ (2)

Aufgabe 9: Wurzelgleichungen
Gib die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen an und denke an die Probe!

a) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 0$

b) $2 + \sqrt{x} - \sqrt{x+8} = 0$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = 0$

d) $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$

e) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x}$

Lösungen
a) Rechnung ergibt x = 1, aber wegen Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ist L = {}.
b) L = {1}
c) Rechnung ergibt x = 3, aber wegen Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ist L = {}.
d) L = {2}
e) Rechnung ergibt $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 2$, Probe führt auf L = {2}
f) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x} \Leftrightarrow 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1}\ \sqrt{x-1} + x - 1 = 5x \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) = (x+1)^2$ (1)

$x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 5$ (1)
D = [1; ∞[(1)
Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ergibt L = {5}. (1)

Aufgabe 10a: Wurzelgleichungen
Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{1} &= 5 \\ \sqrt{x} + 1 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 4 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Lösung falsch ist
b) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

Lösung
a) Probe: $\sqrt{16+1} \neq 5$. Der erste Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} + \sqrt{1}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)
b) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man L = {24}

Aufgabe 10b: Wurzelgleichungen
Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{x-4} \\ 1 &= \sqrt{x} - \sqrt{4} \\ 1 &= \sqrt{x} - 2 \\ 3 &= \sqrt{x} \\ 9 &= x \end{aligned}$$

a) Zeige, dass die Lösung falsch ist
b) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

Lösung
a) Probe: $\sqrt{9-4} \neq 1$. Der erste Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{x-4} \neq \sqrt{x} - \sqrt{4}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)
b) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man L = {24}

Aufgabe 10c: Wurzelgleichungen
Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 1 &= \sqrt{x+5} \\ 1 &= \sqrt{x+5} - \sqrt{x} \\ 1 &= \sqrt{x+5-x} \\ 1 &= \sqrt{5} \text{ immer falsch, also L = \{\}} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

a) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.
b) Welcher Schritt war falsch?

Lösung
a) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man L = {4}
b) Der zweite Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{2x-x} \neq \sqrt{2x} - \sqrt{x}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)