

1.5. Prüfungsaufgaben zur Wurzelrechnung

Aufgabe 1: Intervallschreibweise

Schreibe als Intervall

- a) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x < 4\}$ b) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x\}$ c) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 10\}$ d) $\{x \in \mathbb{R}: x < 10\}$

Lösungen

- a) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x < 4\} = [-10; 4[$ (1)
 b) $\{x \in \mathbb{R}: -10 \leq x\} = [-10; \infty[$ (1)
 c) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 10\} =]-4; 10[$ (1)
 d) $\{x \in \mathbb{R}: x < 10\} =]-\infty; 10[$ (1)

Aufgabe 2: Rechenregeln für Wurzelausdrücke

Vereinfache:

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\sqrt{(5a)^2 - (4a)^2}$ | g) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})^2$ | m) $3\sqrt{t^4 + 2t^2} - t\sqrt{4t^2 + 8}$ |
| b) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}$ | h) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3})$ | n) $3\sqrt{a^4 - 3a^2} - a\sqrt{4a^2 - 12}$ |
| c) $(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5})$ | i) $(\sqrt{48a} - \sqrt{3a})^2$ | o) $\sqrt{9x^2 + 12xy + 4y^2}$ |
| d) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{5})$ | j) $\frac{\sqrt{a^2 - 9}}{\sqrt{a + 3}}$ | p) $\sqrt{\frac{1}{4}u^2 + uv + v^2}$ |
| e) $x\sqrt{a} + 2y\sqrt{b} + 3x\sqrt{a} - y\sqrt{b}$ | k) $\sqrt{\frac{1}{3}x(\sqrt{27x^3} + \sqrt{75x^3})}$ | q) $\sqrt{2v^2 - v\sqrt{6v^2 - (v\sqrt{2})^2}}$ |
| f) $2x\sqrt{a} - a\sqrt{x} - x\sqrt{a} - a\sqrt{x}$ | l) $(\sqrt{125y} - \sqrt{80y})\sqrt{\frac{1}{5}y^3}$ | r) $\frac{x-y}{x+y} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x-y}}$ |

Lösungen

- a) $\sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = 3a$ (2)
 b) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6} = 11 - 2\sqrt{6}$ (2)
 c) $(\sqrt{2} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = -3$ (2)
 d) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 7$ (2)
 e) $x\sqrt{a} + 2y\sqrt{b} + 3x\sqrt{a} - y\sqrt{b} = 4x\sqrt{a} + y\sqrt{b}$ (2)
 f) $2x\sqrt{a} - a\sqrt{x} - x\sqrt{a} - a\sqrt{x} = x\sqrt{a} - 2a\sqrt{x}$ (2)
 g) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})^2 = 8 - 2\sqrt{24} + 3 = 11 - 2\sqrt{24}$ (3)
 h) $(\sqrt{8} - \sqrt{3})(\sqrt{8} + \sqrt{3}) = 8 - 3 = 5$ (2)
 i) $(\sqrt{48a} - \sqrt{3a})^2 = 27a$ (2)
 j) $\frac{\sqrt{a^2 - 9}}{\sqrt{a + 3}} = \sqrt{a - 3}$ (2)
 k) $\sqrt{\frac{1}{3}x(\sqrt{27x^3} + \sqrt{75x^3})} = 3x^2 + 5x^2 = 8x^2$ (4)
 l) $(\sqrt{125y} - \sqrt{80y})\sqrt{\frac{1}{5}y^3} = 5y^2 - 4y^2 = y^2$ (3)
 m) $3\sqrt{t^4 + 2t^2} - t\sqrt{4t^2 + 8} = t \cdot \sqrt{t^2 + 2}$ (2)
 n) $3\sqrt{a^4 - 3a^2} - a\sqrt{4a^2 - 12} = a \cdot \sqrt{a^2 - 3}$ (2)

$$o) \sqrt{9x^2 + 12xy + 4y^2} = 3x + 2y \quad (3)$$

$$p) \sqrt{\frac{1}{4}u^2 + uv + v^2} = \frac{1}{2}u + v \quad (3)$$

$$q) \sqrt{2v^2 - v\sqrt{6v^2 - (v\sqrt{2})^2}} = 0 \quad (3)$$

$$r) \frac{x-y}{x+y} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x-y}} = \sqrt{x-y} \quad (2)$$

Aufgabe 3: Teilweises Wurzelziehen

Ziehe die Wurzeln teilweise:

$$a) \sqrt{288} \quad b) \sqrt{242} \quad c) \sqrt[3]{250} \quad d) \sqrt{98}$$

Lösungen

$$a) \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \quad (1)$$

$$b) \sqrt{242} = 11\sqrt{2} \quad (1)$$

$$c) \sqrt[3]{250} = 5\sqrt[3]{2} \quad (1)$$

$$d) \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \quad (1)$$

Aufgabe 4: Rechenregeln für Wurzelausdrücke und teilweises Wurzelziehen

Ziehe die Wurzeln teilweise, mache den Nenner wurzelfrei und vereinfache soweit wie möglich:

a) $\frac{6}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3}$	g) $\frac{\sqrt{75} - \sqrt{48t^2}}{\sqrt{108}}$	m) $\frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{112} - \sqrt{63}}$
b) $\frac{10}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{5}$	h) $\frac{\sqrt{98t^2} - \sqrt{50}}{\sqrt{32t^2}}$	n) $\frac{\sqrt{80} - \sqrt{45}}{\sqrt{28} + \sqrt{175}}$
c) $\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}x\sqrt{x}$	i) $\frac{\sqrt{63x^3} - \sqrt{28x^3}}{\sqrt{7x}}$	o) $\frac{2\sqrt{s} + \sqrt{t}}{\sqrt{s} + \sqrt{t}}$
d) $\frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$	j) $\frac{\sqrt{20a^3} + \sqrt{45a^3}}{\sqrt{5a}}$	p) $\frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$
e) $\frac{\sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{8}}$	k) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$	q) $\frac{1}{\sqrt{5x} + \sqrt{4x}}$
f) $\frac{\sqrt{54} - \sqrt{24}}{\sqrt{125}}$	l) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$	r) $\frac{1}{\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}}$

Lösungen

$$a) \frac{6}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$b) \frac{10}{\sqrt{5}} - 4\sqrt{5} = -2\sqrt{5} \quad (2)$$

$$c) \frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \quad (2)$$

$$d) \frac{2a^2}{\sqrt{a}} - \frac{4}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} \quad (2)$$

$$e) \frac{\sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{4} \quad (2)$$

$$f) \frac{\sqrt{54} - \sqrt{24}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{6}}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{25} \quad (2)$$

$$g) \frac{\sqrt{75} - \sqrt{48t^2}}{\sqrt{108}} = \frac{5 - 4t}{6} \quad (2)$$

$$h) \frac{\sqrt{98t^2} - \sqrt{50}}{\sqrt{32t^2}} = \frac{7t - 5}{4t} \quad (2)$$

$$i) \frac{\sqrt{63x^3} - \sqrt{28x^3}}{\sqrt{7x}} = 3x - 2x = x \quad (3)$$

$$j) \frac{\sqrt{20a^3} + \sqrt{45a^3}}{\sqrt{5a}} = 2a + 3a = 5a \quad (3)$$

$$k) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \quad (1)$$

$$l) \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \quad (1)$$

$$m) \frac{\sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{112} - \sqrt{63}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{21}}{7} \quad (2)$$

$$n) \frac{\sqrt{80} - \sqrt{45}}{\sqrt{28} + \sqrt{175}} = \frac{\sqrt{5}}{7\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{49} \quad (2)$$

$$o) \frac{2\sqrt{s} + \sqrt{t}}{\sqrt{s} + \sqrt{t}} = \frac{2s - \sqrt{st} - t}{s - t} \quad (2)$$

$$p) \frac{\sqrt{a} + 2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a + \sqrt{ab} - 2b}{a - b} \quad (2)$$

$$q) \frac{1}{\sqrt{5x} + \sqrt{4x}} = \frac{\sqrt{5x} - \sqrt{4x}}{x} \quad (2)$$

$$r) \frac{1}{\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2}}{3} \quad (2)$$

Aufgabe 5: Quadratische Gleichungen

Gib die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

- $x^2 = -9$
- $(2x - 3)^2 = (x - 6)^2$
- $x^2 = 9$
- $(2x + 3)^2 = (x + 6)^2$

Lösungen

- $L = \{ \}$
- $L = \{ \pm 3 \}$
- $L = \{ \pm 3 \}$
- $L = \{ \}$

Aufgabe 6: Wurzelgleichungen

Gib die Lösungsmenge der folgenden Wurzelgleichungen an und denke an die Probe!

- $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 0$
- $2 + \sqrt{x} - \sqrt{x+8} = 0$
- $\sqrt{x} + \sqrt{2x-3} = 0$
- $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$
- $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
- $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{5x}$

Lösungen

- a) Rechnung ergibt $x = 1$, aber wegen Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ist $L = \{\}$.
- b) $L = \{1\}$
- c) Rechnung ergibt $x = 3$, aber wegen Probe bzw. da Wurzeln nie negativ sein können ist $L = \{\}$.
- d) $L = \{2\}$
- e) Rechnung ergibt $x_1 = 0,5$ und $x_2 = 2$, Probe führt auf $L = \{2\}$
- f) Rechnung führt auf $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$, Probe führt auf $L = \{5\}$.

Aufgabe 7: Wurzelgleichungen

Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgenden Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} &= 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{1} &= 5 \\ \sqrt{x} + 1 &= 5 \\ \sqrt{x} &= 4 \\ x &= 16\end{aligned}$$

- a) Zeige, dass die Lösung falsch ist
- b) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

Lösung

- a) Probe: $\sqrt{16+1} \neq 5$. Der erste Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{x+1} \neq \sqrt{x} + \sqrt{1}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)
- b) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man $L = \{24\}$

Aufgabe 8: Wurzelgleichungen

Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned}1 &= \sqrt{x-4} \\ 1 &= \sqrt{x} - \sqrt{4} \\ 1 &= \sqrt{x} - 2 \\ 3 &= \sqrt{x} \\ 9 &= x\end{aligned}$$

- a) Zeige, dass die Lösung falsch ist
- b) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.

Lösung

- a) Probe: $\sqrt{9-4} \neq 1$. Der erste Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{x-4} \neq \sqrt{x} - \sqrt{4}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)
- b) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man $L = \{24\}$

Aufgabe 9: Wurzelgleichungen

Dein unkonzentrierter Mathelehrer hat die folgende Rechnung an die Tafel geschrieben:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + 1 &= \sqrt{x+5} \\ 1 &= \sqrt{x+5} - \sqrt{x} \\ 1 &= \sqrt{x+5-x} \\ 1 &= \sqrt{5} \text{ immer falsch, also } L = \{\} \\ 1 &= x\end{aligned}$$

- a) Verbessere seine Rechnung und gib die korrekte Lösungsmenge an.
- b) Welcher Schritt war falsch?

Lösung

- a) Lässt man den fehlerhaften ersten Rechenschritt weg und quadriert sofort, erhält man $L = \{4\}$
- b) Der zweite Rechenschritt ist falsch: $\sqrt{2x-x} \neq \sqrt{2x} - \sqrt{x}$ (Summanden lassen sich nicht einzeln radizieren!)

Aufgabe 10: Intervallhalbierungsverfahren

Berechne $\sqrt{5}$ mit dem Intervallhalbierungsverfahren auf 2 Nachkommastellen genau. Gib für jeden Schritt die Grenzen an.

Lösung:

Schritt	linke Grenze	rechte Grenze
1	2	3
2	2	2,5
3	2	2,25
4	2,125	2,25
5	2,1875	2,25
6	2,21875	2,25
7	2,234375	2,25
8	2,234375	2,2421875

$$\Rightarrow \sqrt{5} \approx 2,24$$

Aufgabe 11: Intervallhalbierungsverfahren

Berechne $\sqrt{6}$ mit dem Intervallhalbierungsverfahren auf 2 Nachkommastellen genau. Gib für jeden Schritt die Grenzen an.

Lösung:

Schritt	linke Grenze	rechte Grenze
1	2	3
2	2,5	3
3	2,25	2,5
4	2,375	2,5
5	2,4375	2,5
6	2,4375	2,46875
7	2,4375	2,453125
8	2,4453125	2,453125

$$\Rightarrow \sqrt{6} \approx 2,45$$