# 1.6. Potenzen

## 1.6.1. Potenzen mit natürlichen Exponenten

**Definition:** Das **Produkt** aus dem natürlichen **Faktor** n und dem reellen **Faktor** a ist definiert als die **Summe**, die aus n Summanden a zusammengesetzt ist.

$$\underbrace{n\cdot a}_{\substack{\text{Produkt aus}\\ \text{2 Faktoren}}} := \underbrace{a + \ldots + a}_{\substack{\text{Summe aus}\\ \text{n Summanden}}}, \text{ wobei } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

**Merke**: Produkte sind eine Kurzschreibweise für Summen mit gleichen Summanden.

**Definition:** Die **Potenz** aus der reellen **Grundzahl** (**Basis**) a und der natürlichen **Hochzahl** (**Exponent**) n ist definiert als das **Produkt**, das aus n Faktoren a zusammengesetzt ist.

$$\underbrace{a^n}_{\substack{\text{Potenz aus}\\ \text{Basis und}\\ \text{Exponent}}} := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{\substack{\text{Produkt aus}\\ \text{n Faktoren}}}, \text{ wobei } a \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

**Merke**: Potenzen sind eine Kurzschreibweise für Produkte mit gleichen Faktoren

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 1 und 2*

## 1.6.2. Potenzen mit negativen Exponenten

Potenzen mit negativen Exponenten werden definiert, indem man die Reihe der Potenzen mit natürlichen Exponenten zu einer gegebenen Basis a in Richtung negativer Exponenten fortsetzt:

**Beispiel mit der Basis 2:**

Veränderung des Exponenten: $-1$ $-1$ $-1$ $-1$

| $2^{-n}$ | ... | $2^{-2}$ | $2^{-1}$ | $2^0$ | $2^1$ | $2^2$ | ... | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2\cdot\ldots\cdot 2}$ | ... | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | ... | $2\cdot\ldots\cdot 2$ |

Veränderung der Potenz: :2 :2 :2 :2

**Verallgemeinerug auf beliebige reelle Basen a:**

Veränderung des Exponenten: $-1$ $-1$ $-1$ $-1$

| $a^{-n}$ | ... | $a^{-2}$ | $a^{-1}$ | $a^0$ | $a^1$ | $a^2$ | ... | $a^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{a\cdot\ldots\cdot a}$ | ... | $\frac{1}{a\cdot a}$ | $\frac{1}{a}$ | 1 | a | $a\cdot a$ | ... | $a\cdot\ldots\cdot a$ |

Veränderung der Potenz: :a :a :a :a

**Definition**:

$a^{-z} := \dfrac{1}{a^z}$ für $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

$a^0 := 1$ für $a \in \mathbb{R}$

**Merke**:
Ersetzt man den Exponenten durch seine Gegenzahl, so erhält man den Kehrwert der Potenz.
**Bemerkung**:
Beachte, dass $a^0$ durch die erste Definition nicht eindeutig bestimmt werden kann: $a^0 = \dfrac{1}{a^0} \Leftrightarrow (a^0)^2 = 1 \Leftrightarrow$ $a^0 \in \{-1, 1)$. Das 1. Potenzgesetz $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ mit $m = 0$ bleibt aber nur bei der Wahl $a^0 := 1$ gültig!

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 3 und 4*

**Definition und Satz:**
Jede reelle Zahl lässt sich durch ein eindeutig bestimmtes Produkt aus einer Dezimalzahl mit einer von Null verschiedenen Ziffer vor dem Komma und einer Zehnerpotenz darstellen. Diese Darstellung heißt **Normdarstellung.**

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 5*

### 1.6.3. Potenzgesetze für ganze Exponenten

**Satz 1**: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$:
**Merke:** Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.
**Beweis**:
Für $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt $a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{m Faktoren}} = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{\text{n + m Faktoren}} = a^{n+m}$.
Die übrigen Fälle $n < 0$ und $m \geq 0$, $n \geq 0$ und $m < 0$ sowie $n < 0$ und $m < 0$ werden analog behandelt.

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 6 und 7*

**Satz 2**: Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$:
**Merke:** Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert.
**Beweis**:
Für $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt $a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} \cdot \underbrace{(b \cdot ... \cdot b)}_{\text{n Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot ... \cdot (a \cdot b)}_{\text{n Produkte}} = (a \cdot b)^n$.
Die übrigen Fälle $n < 0$ und $m \geq 0$, $n \geq 0$ und $m < 0$ sowie $n < 0$ und $m < 0$ werden analog behandelt.

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 8*

**Satz 3**: Für $a \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $a^{n \cdot m} = (a^n)^m$:
**Merke:** Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.
**Beweis**:
Für $n \geq 0$ und $m \geq 0$ gilt $(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}} \cdot ... \cdot \underbrace{(a \cdot ... \cdot a)}_{\text{n Faktoren}}}_{\text{m Produkte}} = \underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{\text{n · m Faktoren}} = a^{n \cdot m}$
Die übrigen Fälle $n < 0$ und $m \geq 0$, $n \geq 0$ und $m < 0$ sowie $n < 0$ und $m < 0$ werden analog behandelt.

*Übungen: Aufgaben zur Potenzrechnung Aufgabe 9 a) - j)*

**Vereinfachen von Potenzausdrücken**
1. nach gleichen Basen ordnen
2. Brüche durch negative Exponenten ausdrücken
3. Potenzgesetze anwenden

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 9 k) - o)*

## 1.6.4. Die n-te Wurzel

**Definition:**
Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist die **n-te Wurzel** aus a definiert als die **positive** Zahl $\sqrt[n]{a}$ , deren n-te Potenz wieder a ergibt: $(\sqrt[n]{a}\,)^n = a$ mit $a \geq 0$ und $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 10*

## 1.6.5. Potenzen mit rationalen Exponenten

Potenzen mit rationalen Exponenten werden definiert, indem man die Reihe der Potenzen mit natürlichen Exponenten zu einer gegebenen Basis a in Richtung negativer Exponenten fortsetzt:

**Beispiel mit der Basis 2:**

Veränderung des Exponenten: :2 :2 :2 :2

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{1/2n}$ | ... | $2^{1/4}$ | $2^{1/2}$ | $2^1$ | $2^2$ | $2^4$ | ... | $2^{2n}$ |
| $\sqrt[2n]{2}$ | ... | $\sqrt[4]{2}$ | $\sqrt[2]{2}$ | 2 | 4 | 16 | ... | $2 \cdot \ldots \cdot 2$ |

Veränderung der Potenz: $\sqrt{\phantom{a}}$ $\sqrt{\phantom{a}}$ $\sqrt{\phantom{a}}$ $\sqrt{\phantom{a}}$

**Definition 1:**

Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ sei $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$
**Merke:**
Man darf nicht durch 0 teilen, daher $n \neq 0$; man darf nicht Wurzeln einer negativen Zahl ziehen, daher $a \geq 0$.
**Definition 2:**

Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ sei $a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

**Begründung:** Wenn das 3. Potenzgesetz für rationale Exponenten weiterhin gelten soll, erhält man

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 11 und 12*

**Satz:**
Die Potenzgesetze Satz 1 - 3 gelten auch für rationale Exponenten.
**Beweis:**
Satz 1: Für $n, m, p, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ erhält man unter Anwendung des Satzes über ganzzahlige Exponenten und der Definition $a^{\frac{n}{m}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{n \cdot q}{m \cdot q}} \cdot a^{\frac{p \cdot m}{q \cdot m}} = \left(\sqrt[m \cdot q]{a}\right)^{n \cdot q} \cdot \left(\sqrt[m \cdot q]{a}\right)^{m \cdot p} = \left(\sqrt[m \cdot q]{a}\right)^{n \cdot q + m \cdot p} = a^{\frac{n \cdot q + p \cdot m}{q \cdot m}} = a^{\frac{n}{m} + \frac{p}{q}}$

Die Beweise für Satz 2 und 3 verlaufen analog.

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 13*

## 1.6.6. Potenzen mit irrationale Exponenten

Potenzen mit irrationalen Exponenten wie z.B. $3^{\sqrt{2}}$ werden definiert als die Zahl, die man erhält, wenn man sich dem irrationalen Exponenten mit rationalen Näherungswerten immer mehr nähert:

| n | $3^n$ |
|---|---|
| 1,4 | 4,656 |
| 1,41 | 4,707 |
| 1,414 | 4,728 |
| 1,4142 | 4,729 |
| 1,41421 | 4,729 |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $\sqrt{2}$ | $3^{\sqrt{2}}$ |

**Definition**

Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenz $a^x$ definiert als die Zahl, die man erhält, wenn man den Exponenten x mit rationalen Exponenten n immer näher kommt: Für $n \to x$ gilt auch $a^n \to a^x$.

**Merke:**
Für Potenzen mit irrationalen Exponenten gilt da gleiche wie für die irrationalen Exponenten selber: Sie lassen sich zwar niemals exakt, aber dafür mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

**Satz:**
Die Potenzgesetze gelten für alle Näherungswerte mit rationalen Exponenten und daher auch für Potenzen mit irrationalen Exponenten

**Satz und Definition:**

Für alle $0 < a < 1$ bzw. $1 > a$ und $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{Q}$ mit $n < x < m$ auch $a^m < y < a^n$ bzw. $a^n < y < a^m$ gilt. Diese Zahl wird als Potenz $a^x$ bezeichnet: $a^x := y$.

**Beweis:**
Man benötigt auf jeden Fall das Vollständigkeits- oder Intervallschachtelungsaxiom und darüber hinaus die Taylorentwicklung mit Restglied 1. Ordnung für die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$:
Für $n < m$ ist für $0 < a < 1$ auch $a^m < a^n$ und für $1 < a$ gilt $a^n < a^m$, da $f(n) = a^n$ für $0 < a < 1$ streng monoton fallend und für $1 < a$ streng monoton steigend ist. Ist $m - n < \delta$ so ist $|a^n - a^m| = a^n \cdot |a^{m-n} - 1| < a^n \cdot 2 \cdot (m-n) \cdot \ln(a) < a^n \cdot 2 \cdot \delta \cdot \ln(a)$, d.h. $|a^n - a^m|$ wird beliebig klein, wenn $|m - n|$ genügend klein gewählt wurde. Insgesamt ist damit gezeigt: Bilden die (m, n) eine Intervallschachtelung mit Zentrum x, so bilden die $(a^n, a^m)$ ebenfalls wieder eine Intervallschachtelung. Wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen hat die Intervallschachtelung $(a^n, a^m)$ genau ein Zentrum y.
Oder kürzer: Die Menge der $n < x < m$ bildet eine Folge, die gegen x konvergiert und insbesondere eine Cauchy-Folge darstellt. Wegen der Stetigkeit von $f(n) = a^n$ für $n \in \mathbb{Q}$ bilden die $a^n$ und $a^m$ ebenfalls eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit der reellen Zahlen gegen genau ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert.

**Definition:**
Die im obigen Satz erwähnte Zahl wird als Potenz $a^x$ bezeichnet

*Übung: Erkläre die Definition und näherungsweise Berechnung von Potenzen mit reellen Exponenten anhand eines selbst gewählten Beispiels.*

## 1.6.7. Potenz- und Wurzelgleichungen

*Einführung: Aufgaben zu Potenzen Nr. 14 a) -h)*

**Satz**

Für die Lösung der Potenzgleichung $x^n = a$ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt L =

| | n gerade | n ungerade |
|---|---|---|
| a > 0 | $\{+\sqrt[n]{a}\ ;\ -\sqrt[n]{a}\}$ | $\{\sqrt[n]{a}\}$ |
| a = 0 | $\{0\}$ | $\{0\}$ |
| a < 0 | $\{\}$ | $\{-\sqrt[n]{\lvert a \rvert}\}$ |

*Übungen: Aufgaben zu Potenzen Nr. 14 i) - l)*