

1.7. Prüfungsaufgaben zu Logarithmen

Aufgabe 1: Definition

Vereinfache und schreibe als Logarithmus:

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3$

b) $\sqrt[4]{16} = 2$

c) $\frac{1}{2^3} = 0,125$

Lösungen

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \log_9(3) = \frac{1}{2}$ (2)

b) $\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \log_{16}(2) = \frac{1}{4}$ (2)

c) $\frac{1}{2^3} = 0,125 \Leftrightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ (2)

Aufgabe 2: Definition

Bestimme den Logarithmus und begründe:

a) $\log_{10}(0,0001)$

b) $\log_7\left(\frac{1}{343}\right)$

c) $\log_{27}(3)$

Lösungen

a) $\log_{10}(0,0001) = -4$, weil $10^{-4} = 0,0001$ (1)

b) $\log_7\left(\frac{1}{343}\right) = -3$, weil $7^{-3} = \frac{1}{343}$ (1)

c) $\log_{27}(3) = \frac{1}{3}$, weil $27^{\frac{1}{3}} = 3$ (1)

Aufgabe 3: Logarithmenregeln (2)

Vereinfache den folgenden Ausdruck sowie wie möglich:

$$\log \frac{a^2 + b^2}{a^3 + ab^2} + \log \frac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{a - b}$$

Lösung:

$$\log \frac{a^2 + b^2}{a^3 + ab^2} + \log \frac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{a - b} = \log \frac{(a^2 + b^2)}{a(a^2 + b^2)} \cdot \frac{a(a - b)^2}{a - b} = \log(a - b)$$
 (2)

Aufgabe 4: Exponential- und Potenzgleichungen im Vergleich (4)

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen und führe die Probe durch. Bei Näherungslösungen genügt die Angabe der ersten beiden Nachkommastellen.

a) $(x^2 - x) \cdot e^{2x} = 0$

b) $(2x + 3)^3 = 125$

c) $(4x - 2)^3 = 64$

d) $(5x + 7)^3 = -27$

e) $3^{2x+3} = 125$

f) $3^{4x-2} = 64$

g) $3^{5x+7} = 27$

Lösungen:

a) $(x^2 - x) \cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 0$ (2)

b) $(2x + 3)^3 = 125 \Rightarrow x = 1$ (1)

c) $(4x - 2)^3 = 64 \Rightarrow x = 1,5$ (1)

d) $(5x + 7)^3 = -27 \Rightarrow x = -2$ (1)

e) $3^{2x+3} = 125 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(\frac{\log 125}{\log 3} - 3 \right) \approx 0,69$ (1)

$$f) 3^{4x-2} = 64 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \left(2 + \frac{\log 64}{\log 3} \right) \approx 1,445 \quad (1)$$

$$g) 3^{5x+7} = 27 \Rightarrow x = \frac{1}{5} \left(\frac{\log 27}{\log 3} - 7 \right) \approx -0,8 \quad (1)$$

Aufgabe 5: Exponentialgleichungen ohne Substitution

Bestimme die exakte Lösung und rechne gegebenenfalls auf Zehnerlogarithmus \log_{10} um:

- a) $2^x = 0,25$
- b) $2^{-x} = 0,25$
- c) $2^{3x} = -6$
- d) $2^{3x} = 4$
- e) $4 \cdot 2^{-2x+2} = 64$
- f) $2 \cdot 4^{-x+2} = 32$
- g) $3 \cdot 2^{2x-1} = 12$
- h) $10^x \cdot 10^{x-3} = 10$
- i) $5^x \cdot 5^{x-3} = 25$
- j) $\frac{3}{2} \cdot 0,6^x + 3 = 5$
- k) $15 \cdot 0,7^x + 30 = 50$
- l) $3 \cdot 0,5^x - 6 = 10$
- m) $5 \cdot 6^{3x-2} = 10$
- n) $6 \cdot 5^{2x-3} = 12$
- o) $3 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 5^x$

Lösungen:

$$a) 2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \quad (2)$$

$$b) 2^{-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = 2 \quad (2)$$

c) keine Lösung, da Potenzen mit positiver Basis niemals negativ werden können! (2)

$$d) 2^{3x} = 2^2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$e) 4 \cdot 2^{-2x+2} = 64 \Leftrightarrow 2^{-2x+2} = 16 \Leftrightarrow -2x + 2 = \log_2(16) \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1 \quad (2)$$

$$f) 2 \cdot 4^{-x+2} = 32 \Leftrightarrow 4^{-x+2} = 16 \Leftrightarrow -x + 2 = \log_4(16) \Leftrightarrow -x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \quad (2)$$

$$g) 3 \cdot 2^{2x-1} = 12 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = \log_2(4) \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$h) 10^x \cdot 10^{x-3} = 10 \Leftrightarrow 10^{x+x-3} = 10^1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \quad (2)$$

$$i) 5^x \cdot 5^{x-3} = 25 \Leftrightarrow 5^{x+x-3} = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$j) \frac{3}{2} \cdot 0,6^x + 3 = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 0,6^x = 2 \Leftrightarrow 0,6^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \cdot \log_{10}(0,6) = \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)}{\log_{10}(0,6)} \quad (2)$$

$$k) 15 \cdot 0,7^x + 30 = 50 \Leftrightarrow 15 \cdot 0,7^x = 20 \Leftrightarrow 0,7^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \cdot \log_{10}(0,7) = \log_{10}\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)}{\log_{10}(0,7)} \quad (2)$$

$$l) 3 \cdot 0,5^x - 6 = 10 \Leftrightarrow 3 \cdot 0,5^x = 16 \Leftrightarrow 0,5^x = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x \cdot \log_{10}(0,5) = \log_{10}\left(\frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\log_{10}\left(\frac{16}{3}\right)}{\log_{10}(0,5)} \quad (2)$$

$$m) 5 \cdot 6^{3x-2} = 10 \Leftrightarrow 6^{3x-2} = 2 \Leftrightarrow (3x-2) \cdot \log(6) = \log(2) \Leftrightarrow x = \frac{\log(2)}{3 \cdot \log(6)} + \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$n) 6 \cdot 5^{2x-3} = 12 \Leftrightarrow 5^{2x-3} = 2 \Leftrightarrow (2x-3) \cdot \log(5) = \log(2) \Leftrightarrow x = \frac{\log(2)}{2 \cdot \log(5)} + \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$o) 3 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 5^x \Leftrightarrow 6 \cdot 2^x = 5^x \Leftrightarrow \ln(6) + x \cdot \ln(2) = x \cdot \ln(5) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(6)}{\ln(5) - \ln(2)} \approx 1,95 \quad (4)$$

Aufgabe 6: Exponentialgleichungen mit Substitution

Bestimme die exakte Lösung und rechne gegebenenfalls auf Zehnerlogarithmus \log_{10} um:

- a) $e^{4x} - 10e^{3x} + 25e^{2x} = 0$.
- b) $5 \cdot 3^x - 3^{2x} = 6$
- c) $5 \cdot 3^x + 3^{2x} = -6$
- d) $3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10$
- e) $6 \cdot 3^{-x} - 15 + 3^{x+1} = 0$
- f) $4 \cdot 3^{-x} - 5 + 3^x = 0$
- g) $2^{2x+1} + 8 - 10 \cdot 2^x = 0$

Lösungen:

- a) $e^{4x} - 10e^{3x} + 25e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^{2x} - 5)^2 = 0$ Substitution $e^x = z$ ergibt $z^2(z - 5)^2 = 0$. (2)
 $\Rightarrow z_1 = 0$ und $z_2 = 5$ (2)
Rücksubstitution $z = e^x$ ergibt $x = \frac{1}{2} \ln 5$. (2)
- b) $5 \cdot 3^x - 3^{2x} = 6 \Leftrightarrow 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ Substitution $3^x = z$ ergibt $z^2 - 5z + 6 = 0$. (2)
Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = 2$ und $z_2 = 3$ (2)
Rücksubstitution $z = 3^x$ ergibt $3^{x_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\log 2}{\log 3}$ und $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$. (2)
- c) $5 \cdot 3^x + 3^{2x} = -6 \Leftrightarrow 3^{2x} + 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ Substitution $3^x = z$ ergibt $z^2 + 5z + 6 = 0$. (2)
Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = -2$ und $z_2 = -3$ (2)
Rücksubstitution $z = 3^x$ ergibt $3^{x_1} = -2$ und $3^{x_2} = -3 \Leftrightarrow L = \{ \}$ (2)
- d) $3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10 \Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ Substitution $3^x = z$ ergibt $z^2 - 10z + 9 = 0$. (2)
Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = 9$ und $z_2 = 1$ (2)
Rücksubstitution $z = 3^x$ ergibt $3^{x_1} = 1$ und $3^{x_2} = 9 \Leftrightarrow L = \{0; 2\}$. (2)
- e) $6 \cdot 3^{-x} - 15 + 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 2 = 0 \Rightarrow 3^x = 2,5 \pm \frac{1}{2} \sqrt{17}$ (1)
 $\Leftrightarrow x_1 = \frac{\log 4,56}{\log 3} \approx 1,38$ und $x_2 = \frac{\log 0,438}{\log 3} = -0,75$ (1)
- f) $4 \cdot 3^{-x} - 5 + 3^x = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 4 = 0 \Rightarrow 3^x = 2,5 \pm 1,5$ (1)
 $\Rightarrow x_1 = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26$ und $x_2 = \frac{\log 1}{\log 3} = 0$. (1)
- g) $2^{2x+1} + 8 - 10 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2,5 \pm 1,5 \Rightarrow x_1 = \frac{\log 4}{\log 2} = 2$ und $x_2 = \frac{\log 1}{\log 2} = 0$ (2)

Aufgabe 7: Logarithmengleichungen (4)

Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

- a) $\log(x+1) + 2 \log(x-1) - \log(x^2-1) = 0$
- b) $2 \log(x+1) - \log(x^2-1) + \log(x-1) = 0$

Lösung

- a) $\log(x+1) + 2 \log(x-1) - \log(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \log \frac{(x+1)(x-1)^2}{(x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow \log(x-1) = 0$ (2)
 $\Rightarrow D =]1; \infty[$ und $L = \{2\}$ (2)
- b) $2 \log(x+1) - \log(x^2-1) + \log(x-1) = 0 \Leftrightarrow \log \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = 0$ (2)
 $\Rightarrow x = 0$ aber wegen $D =]1; \infty[$ folgt $L = \{ \}$ (2)