1.7. Prüfungsaufgaben zu Logarithmen

Aufgabe 1: Definition
Vereinfache und schreibe als Logarithmus:

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3$ b) $\sqrt[4]{16} = 2$ c) $\frac{1}{2^3} = 0{,}125$

Lösungen

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \log_9(3) = \frac{1}{2}$ (2)

b) $\sqrt[4]{16} = 2 \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \log_{16}(2) = \frac{1}{4}$ (2)

c) $\frac{1}{2^3} = 0{,}125 \Leftrightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_2(\frac{1}{8}) = -3$ (2)

Aufgabe 2: Definition
Bestimme den Logarithmus und begründe:

a) $\log_{10}(0{,}000\,1)$ b) $\log_7\left(\frac{1}{343}\right)$ c) $\log_{27}(3)$

Lösungen
a) $\log_{10}(0{,}000\,1) = -4$, weil $10^{-4} = 0{,}000\,1$ (1)
b) $\log_7\left(\frac{1}{343}\right) = -3$, weil $7^{-3} = \frac{1}{343}$ (1)
c) $\log_{27}(3) = \frac{1}{3}$, weil $27^{\frac{1}{3}} = 3$ (1)

Aufgabe 3: Logarithmenregeln (2)
Vereinfache die folgenden Ausdrücke sowie wie möglich und gib die jeweils verwendete Regel an:
1. - 3.P = Potenzregeln und 1. – 3. L = Logarithmenregeln: $\log(a) \pm \log(b) = \ldots$; $k\cdot\log(a) = \ldots$ und $\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{?}$

a) $\frac{1}{4}\log(x^3) - \frac{1}{2}\log(x) + 3\cdot\log(x)$

b) $\log\left(a^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{3}{2}\log(a) - \log\left(\sqrt{a}\right)$

c) $\log(a^2 + b^2) - \log(a^3 + ab^2) + \log\frac{a^3 - 2a^2b + ab^2}{a - b}$

Lösung:

a) $\frac{1}{4}\log(x^3) - \frac{1}{2}\log(x) + 3\cdot\log(x) \overset{2.L}{=} \log\left(x^{\frac{3}{4}}\right) - \log\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \log\left(x^3\right) \overset{1.L}{=} \log\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^3}{x^{\frac{1}{2}}}\right) \overset{1.P}{=} \log\left(x^{\frac{3}{4}+3-\frac{1}{2}}\right) \overset{2.L}{=} \frac{13}{4}\log(x).$ (3)

b) $\log\left(a^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{3}{2}\log(a) - \log\left(\sqrt{a}\right) \overset{2.L}{=} \log\left(a^{\frac{1}{4}}\right) + \log\left(a^{\frac{3}{2}}\right) - \log\left(a^{\frac{1}{2}}\right) \overset{1.L}{=} \log\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\right) \overset{1.P}{=} \log\left(a^{\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right) \overset{2.L}{=} \frac{5}{4}\log(a)$ (3)

c) $\log(a^2 + b^2) - \log(a^3 + ab^2) + \log \overset{1.L}{=} \log\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+ab^2}\cdot\frac{a^3-2a^2b+ab^2}{a-b}\right) = \log\left(\frac{(a^2+b^2)}{a(a^2+b^2)}\cdot\frac{a(a-b)^2}{a-b}\right) = \log(a - b)$ (2)

Aufgabe 4: Exponential- und Potenzgleichungen im Vergleich (4)
Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen und führe die Probe durch. Bei Näherungslösungen genügt die Angabe der ersten beiden Nachkommastellen.

a) $(x^2 - x)\cdot e^{2x} = 0$ b) $(2x + 3)^3 = 125$ c) $(4x - 2)^3 = 64$ d) $(5x + 7)^3 = -27$
e) $3^{2x+3} = 125$ f) $3^{4x-2} = 64$ g) $3^{5x+7} = 27$

Lösungen:

a) $(x^2 - x)\cdot e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 0$ (2)

b) $(2x + 3)^3 = 125 \Rightarrow x = 1$ (1)

c) $(4x - 2)^3 = 64 \Rightarrow x = 1{,}5$ (1)

d) $(5x + 7)^3 = -27 \Rightarrow x = -2$ (1)

e) $3^{2x+3} = 125 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(\frac{\log 125}{\log 3} - 3\right) \approx 0{,}69$ (1)

f) $3^{4x-2} = 64 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\left(2 + \frac{\log 64}{\log 3}\right) \approx 1{,}445$ (1)

g) $3^{5x+7} = 27 \Rightarrow x = \frac{1}{5}\left(\frac{\log 27}{\log 3} - 7\right) \approx -0{,}8$ (1)

Aufgabe 5: Exponentialgleichungen ohne Substitution
Bestimme die exakte Lösung und rechne gegebenenfalls auf den natürlichen Logarithmus ln um:

a) $2^x = 0{,}25$ b) $2^{-x} = 0{,}25$ c) $2^{3x} = -6$ d) $2^{3x} = 4$
e) $4\cdot 2^{-2x+2} = 64$ f)$2\cdot 4^{-x+2} = 32$ g) $3\cdot 2^{2x-1} = 12$ h) $10^x\cdot 10^{x-3} = 10$
i) $5^x\cdot 5^{x-3} = 25$ j) $\frac{3}{2}\cdot 0{,}6^x + 3 = 5$ k) $15\cdot 0{,}7^x + 30 = 50$ l) $3\cdot 0{,}5^x - 6 = 10$
m) $5\cdot 6^{3x-2} = 10$ n) $6\cdot 5^{2x-3} = 12$ o) $3\cdot 2^{x+3} = 4\cdot 5^x$ p)$3\cdot 2^{x-1} = 4\cdot 5^x$
q) $2\cdot 3^{x+1} = 5\cdot 4^x$

Lösungen:

a) $2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2$ (2)

b) $2^{-x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = 2$ (2)

c) keine Lösung, da Potenzen mit positiver Basis niemal negativ werden können! (2)

d) $2^{3x} = 2^2 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (2)

e) $4\cdot 2^{-2x+2} = 64 \Leftrightarrow 2^{-2x+2} = 16 \Leftrightarrow -2x + 2 = \log_2(16) \Leftrightarrow -2x + 2 = 4 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$ (2)

f) $2\cdot 4^{-x+2} = 32 \Leftrightarrow 4^{-x+2} = 16 \Leftrightarrow -x + 2 = \log_4(16) \Leftrightarrow -x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$ (2)

g) $3\cdot 2^{2x-1} = 12 \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 4 \Leftrightarrow 2x - 1 = \log_2(4) \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (2)

h) $10^x\cdot 10^{x-3} = 10 \Leftrightarrow 10^{x+x-3} = 10^1 \Leftrightarrow 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (2)

i) $5^x\cdot 5^{x-3} = 25 \Leftrightarrow 5^{x+x-3} = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (2)

j) $\frac{3}{2}\cdot 0{,}6^x + 3 = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\cdot 0{,}6^x = 2 \Leftrightarrow 0{,}6^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x\cdot\ln(0{,}6) = \ln(\frac{4}{3}) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(0{,}6)}$ (2)

k) $15\cdot 0{,}7^x + 30 = 50 \Leftrightarrow 15\cdot 0{,}7^x = 20 \Leftrightarrow 0{,}7^x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x\cdot\ln(0{,}7) = \ln(\frac{4}{3}) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(0{,}7)}$ (2)

l) $3\cdot 0{,}5^x - 6 = 10 \Leftrightarrow 3\cdot 0{,}5^x = 16 \Leftrightarrow 0{,}5^x = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x\cdot\ln(0{,}5) = \ln(\frac{16}{3}) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{16}{3}\right)}{\ln(0{,}5)}$ (2)

m) $5\cdot 6^{3x-2} = 10 \Leftrightarrow 6^{3x-2} = 2 \Leftrightarrow (3x-2)\cdot\ln(6) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{3\cdot\ln(6)} + \frac{2}{3}$ (2)

n) $6 \cdot 5^{2x-3} = 12 \Leftrightarrow 5^{2x-3} = 2 \Leftrightarrow (2x-3) \cdot \ln(5) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{2 \cdot \ln(5)} + \frac{3}{2}$ (2)

o) $3 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 5^x \Leftrightarrow 6 \cdot 2^x = 5^x \Leftrightarrow \ln(6) + x \cdot \ln(2) = x \cdot \ln(5) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(6)}{\ln(5) - \ln(2)} \approx 1{,}95$ (4)

p) $3 \cdot 2^{x-1} = 4 \cdot 5^x \Leftrightarrow \ln(3) + (x-1) \cdot \ln(2) = \ln(4) + x \cdot \ln(5) \Leftrightarrow \ln(3) - \ln(2) - \ln(4) = x \cdot [\ln(5) - \ln(2)] \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{3}{8}\right)}{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$ (3)

q) $2 \cdot 3^{x+1} = 5 \cdot 4^x \Leftrightarrow \ln(2) + (x+1) \cdot \ln(3) = \ln(5) + x \cdot \ln(4) \Leftrightarrow \ln(2) + \ln(3) - \ln(5) = x \cdot [\ln(4) - \ln(3)] \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$ (3)

Aufgabe 6: Exponentialgleichungen mit Substitution

Bestimme die exakte Lösung und rechne gegebenenfalls auf den natürlichen Logarithmus ln um:

a) $e^{4x} - 10e^{2x} + 25e^{2x} = 0.$

b) $e^{4x} - 10e^{3x} + 25e^{2x} = 0.$

c) $5 \cdot 3^x - 3^{2x} = 6$

d) $5 \cdot 3^x + 3^{2x} = -6$

e) $3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10$

f) $6 \cdot 3^{-x} - 15 + 3^{x+1} = 0$

g) $4 \cdot 3^{-x} - 5 + 3^x = 0$

h) $2^{2x+1} + 8 - 10 \cdot 2^x = 0$

i) $\frac{2^w + 5 \cdot 2^{-w}}{2} = 3$

Lösungen:

a) $e^{4x} - 10e^{2x} + 25e^{2x} = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - 5)^2 = 0$ Substitution $e^x = z$ ergibt $(z^2 - 5)^2 = 0.$ (2)

$\Rightarrow z_{1/2} = \pm\sqrt{5}$ (2)

Rücksubstitution $z = e^x$ ergibt $x = \frac{1}{2}\ln(5).$ (2)

b) $e^{4x} - 10e^{3x} + 25e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 5)^2 = 0$ Substitution $e^x = z$ ergibt $z^2(z-5)^2 = 0.$ (2)

$\Rightarrow z_1 = 0$ und $z_2 = 5$ (2)

Rücksubstitution $z = e^x$ ergibt $x = \ln(5).$ (2)

c) $5 \cdot 3^x - 3^{2x} = 6 \Leftrightarrow 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ Substitution $3^x = z$ ergibt $z^2 - 5z + 6 = 0.$ (2)

Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = 2$ und $z_2 = 3$ (2)

Rücksubstitution $z = 3^x$ ergibt $3^{x1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ und $3^{x2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1.$ (2)

d) $5 \cdot 3^x + 3^{2x} = -6 \Leftrightarrow 3^{2x} + 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ Substitution $3^x = z$ ergibt $z^2 + 5z + 6 = 0.$ (2)

Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = -2$ und $z_2 = -3$ (2)

Rücksubstitution $z = 3^x$ ergibt $3^{x1} = -2$ und $3^{x2} = -3 \Leftrightarrow L = \{\}$ (2)

e) $3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10 \Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ Substitution $3^x = z$ ergibt $z^2 - 10z + 9 = 0.$ (2)

Mit der p-q-Formel erhält man $z_1 = 9$ und $z_2 = 1$ (2)

Rücksubstitution $z = 3^x$ ergibt $3^{x1} = 1$ und $3^{x2} = 9 \Leftrightarrow L = \{0; 2\}.$ (2)

f) $6 \cdot 3^{-x} - 15 + 3^{x+1} = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 2 = 0 \Rightarrow 3^x = 2{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$ (1)

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\ln(4{,}56)}{\ln(3)} \approx 1{,}38$ und $x_2 = \frac{\ln(0{,}438)}{\ln(3)} = -0{,}75$ (1)

g) $4 \cdot 3^{-x} - 5 + 3^x = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 4 = 0 \Rightarrow 3^x = 2{,}5 \pm 1{,}5$ (1)

$\Rightarrow x_1 = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1{,}26$ und $x_2 = \frac{\ln(1)}{\ln(3)} = 0.$ (1)

h) $2^{2x+1} + 8 - 10 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2{,}5 \pm 1{,}5 \Rightarrow x_1 = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 2$ und $x_2 = \frac{\ln(1)}{\ln(2)} = 0$ (2)

i) $\frac{2^w + 5 \cdot 2^{-w}}{2} = 3 \Leftrightarrow 2^w + 5 \cdot 2^{-w} = 6 \Leftrightarrow (2^w)^2 - 6 \cdot 2^w + 5 = 0$ (2)

$\Leftrightarrow (2^w - 1)(2^w - 5) = 0$ (1)

$2^w \in \{1; 5\} \Leftrightarrow$ (1)

$w \in \{0; \log_2(5)\}$ (1)

Aufgabe 7: Logarithmengleichungen (4)
Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung:

a) $\log_3(x) + \log_3(x-6) = 3$

b) $\log_2(x) + \log_2(x-6) = 4$

c) $\frac{1}{2}\log_3(x) + \log_9\left(\sqrt[3]{x}\right) = 2$

d) $\frac{1}{3}\log_2(x) + \log_8\left(\sqrt{x}\right) = 2$

d) $\log(x+1) + 2\log(x-1) - \log(x^2-1) = 0$

e) $2\log(x+1) - \log(x^2-1) + \log(x-1) = 0$

f) $\log_2(3x+1) - \log_2(x-2) = 3 + \log_2(3)$

g) $x^{\lg(x)} = \frac{1000}{x^2}$

Lösungen

a) $\log_3(x) + \log_3(x-6) = 3 \Leftrightarrow \log_3(x^2-6x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 27 \Leftrightarrow (x+3)(x-9) = 0 \Rightarrow L = \{9\}$, da $-3 \notin D$ (3)

b) $\log_2(x) + \log_2(x-6) = 4 \Leftrightarrow \log_2(x^2-6x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 16 \Leftrightarrow (x+2)(x-9) = 0 \Rightarrow L = \{9\}$, da $-2 \notin D$ (3)

c) $2 = \frac{1}{2}\log_3(x) + \log_9\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{2}\log_3(x) + \frac{\log_3\left(\sqrt[3]{x}\right)}{\log_3(9)} = \frac{1}{2}\log_3(x) + \frac{1}{2}\log_3\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}\log_3\left(x^{1+\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\log_3(x)$ (2)

$\Leftrightarrow 1 = \log_3(x) \Leftrightarrow x = 3^1 = 3.$ (1)

d) $2 = \frac{1}{3}\log_2(x) + \log_8\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{3}\log_2(x) + \frac{\log_2\left(\sqrt{x}\right)}{\log_2(8)} = \frac{1}{3}\log_2(x) + \frac{1}{3}\log_2\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{3}\log_2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\log_2(x)$ (2)

$\Leftrightarrow 4 = \log_2(x) \Leftrightarrow x = 2^4 = 16.$ (1)

e) $\log(x+1) + 2\log(x-1) - \log(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \log\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow \log(x-1) = 0$ (2)

$\Rightarrow D =]1; \infty[$ und $L = \{2\}$ (2)

f) $2\log(x+1) - \log(x^2-1) + \log(x-1) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x^2-1)} = 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = 0$ (2)

$\Rightarrow x = 0$ aber wegen $D =]1; \infty[$ folgt $L = \{\}$ (2)

g) $\log_2(3x+1) - \log_2(x-2) = 3 + \log_2(3) \Rightarrow \log_2\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 3 + \log_2(3)$ (2)

$\Leftrightarrow \left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 2^3\cdot 3 \Leftrightarrow 3x + 1 = 24x - 48 \Leftrightarrow L = \{\frac{7}{3}\}$ (2)

h) $x^{\lg(x)} = \frac{1000}{x^2}$ (1)

$\Leftrightarrow (\lg(x))^2 = \lg(1000) - 2\cdot\lg(x)$ (1)

$\Leftrightarrow (\lg(x))^2 + 2\cdot\lg(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow (\lg(x) - 1)(\lg(x) + 2) = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \lg(x) \in \{-2; 1\}$ (1)

$\Leftrightarrow x \in \{\frac{1}{100}; 10\}$ (1)