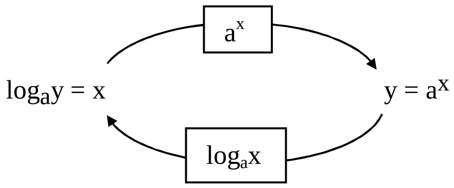
1.7. Logarithmen

1.7.1. Der Logarithmus

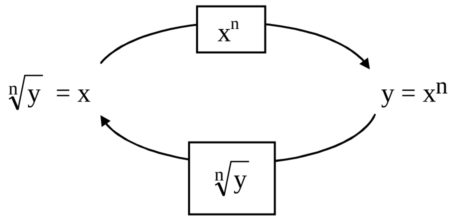
Seit dem 17. Jahrhundert schreibt man sehr große oder sehr kleine Zahlen z.B. in der Astronomie oder Chemie als Zehnerpotenzen, z.B. 1 000 000 = 10^6. Abgesehen von der Platzersparnis ergab sich dadurch der Vorteil, das die Multiplikation solcher Potenzen sich auf die Addition ihrer Exponenten vereinfachte. Diese Erkenntnis führte zur Verbreitung von Logarithmentafeln und Rechenschiebern, in denen die passenden Exponenten (Logarithmen von arithmos = Zahl und logos = Basis) zur Basis 10 oder 2 für möglichst viele Zahlen abgedruckt waren. Um zwei Zahlen zu multiplizieren, musste man nur die passenden Logarithmen nachschlagen, miteinander addieren und anschließend wieder die passende Potenz nachschlagen, z.B. $512\cdot 671 \approx 10^{2,7093}\cdot 10^{2,8267} = 10^{5,5350} \approx$ 342767,78, exakter Wert 343552.

Definition:
Der **Logarithmus** $\log_a x$ von x > 0 zur Basis a > 0 ist er **Exponent**, mit dem man a potenzieren muss, um wieder x zu erhalten. Das Logarithmieren zur Basis a ist also die **Umkehrung** zum Exponieren über der **Basis a**:



Der Logarithmus zur Basis a = e mit der **Eulerschen Zahl** e = 2,718... heißt **natürlicher** Logarithmus und wird mit ln x bezeichnet: $\log_e x = \ln x$
Der Logarithmus zur Basis a = 10 heißt **dekadischer** Logarithmus und wird mit log x bezeichnet: $\log_{10} x = \log x$.

Wiederholung: (siehe 1.5.1.)
Die n-te Wurzel $\sqrt[n]{y}$ von x > 0 ist die **Basis**, deren n-te Potenz wieder x ergibt. Das Ziehen der n-ten Wurzel ist die **Umkehrung** zum Potenzieren mit dem **Exponenten n**:



Merke:
Die Wurzel liefert die gesuchte Basis.
Der Logarithmus liefert den gesuchten Exponenten

Übungen: Aufgaben zu Logarithmen Nr. 1 - 3

1.7.2. Logarithmengesetze

Satz 1: Für a, x, y > 0 und a ≠ 1 gilt $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$
Merke: Ein Produkt wird durch Logarithmieren in eine Summe umgewandelt
Beweis: Mit der 1. Potenzregel gilt $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y} = x\cdot y = a^{\log_a (x\cdot y)}$.

Satz 2: Für a, x, y > 0 gilt $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

Merke: Ein Quotient wird durch Logarithmieren in eine Differenz umgewandelt

Beweis: Mit der 1. Potenzregel für negative Hochzahlen ist $a^{\log_a x - \log_a y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \frac{x}{y} = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$.

Übungen: Aufgaben zu Logarithmen Nr. 4

Satz 3: Für a, x > 0 und n ϵ $\mathbb{N}$ gilt $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a x$
Merke: Eine Potenz wird durch Logarithmieren in eine Produkt umgewandelt.

Beweis: Mit der 3. Potenzgesetz gilt: $a^{n \cdot \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^n = x^n = a^{\log_a (x^n)}$

Bemerkung:
Mit dieser Regel lassen sich **Exponentialgleichungen** durch **Logarithmieren** zu beliebigen Basen lösen:

$a^x = b \Leftrightarrow \log a^x = \log b \Leftrightarrow x \cdot \log a = \log b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$

Entsprechend lassen sich **Logarithmengleichungen** durch **Exponieren** über passenden Basen lösen:

$\log_a x = b \Leftrightarrow a^{\log x} = a^b \Leftrightarrow x = a^b$

Übungen: Aufgaben zu Logarithmen Nr. 5 - 8