Mengenlehre

Arne Pönitz

Dezember 2012

Vorwort

Die axiomatische Mengenlehre bildet zusammen mit dem **Axiomensystem von Hilbert** für die Geometrie das Fundament der Mathematik. In dem vorliegenden Text handelt es sich um eine komprimierte Darstellung des Axiomensystems von **John von Neumann**, **Paul Bernays** und **Kurt Gödel** (NBG) in der Variante von **John Kelley** und **Anthony Morse**. Ausgehend von den **semantischen Antinomien** werden zunächst die Symbole der **mathematischen Objektsprache** motiviert und erklärt. Auch bei der Beschränkung auf die Objektsprache bleiben jedoch **logische Antinomien**, die sich nur vermeiden lassen, wenn man auch die Inhalte der Mathematik auf möglichst wenige Grundannahmen (**Axiome**) zurückführt. Der wesentliche Unterschied des NBG-Systems zum verbreiteten ZFC-Modell besteht in der Auflösung der logischen Antinomien mit Hilfe der Unterscheidung von **Mengen und Klassen**. Eine Klasse kann alles sein, was sich mit Hilfe der mathematischen Objektsprache beschreiben lässt. Der Mengenbegriff enthält bereits die Vorstellung einer Absonderung von einer übergeordneten Gesamtheit. In NBG fordert man daher, dass jede Menge Element einer übergeordneten Klasse sein muss. Die folgende Behandlung der Mengenalgebra mit **Relationen, Funktionen und Ordnungen** ist Standard. Die **Ordinalzahlen** als verallgemeinertes Zählprinzip werden in dieser Darstellung zunächst durch **Inklusion** geordnet, welche sich dann als gleichwertig zur üblichen Element-oder-gleich-Beziehung erweist. Wichtige Anwendungen des verallgemeinerten Zählprinzips mit Ordinalzahlen sind Definitionen mit **transfiniter Rekursion** und Beweise mit **transfiniter Induktion**. Die **endlichen Ordinalzahlen** lassen sich über die **Peano-Axiome** mit den **natürlichen Zahlen** identifizieren. Entsprechend findet man in diesem Abschnitt Definitionen mit **finiter Rekursion** und Beweise mit **finiter Induktion**. Die Erweiterungen der natürlichen Zahlen auf **ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen** sind algebraisch und topologisch motiviert und werden in diesem Text daher nahezu ohne Beweise beschrieben. Für die Erweiterung des Zählprinzips auf beliebige Menge mit Hilfe der **Kardinalzahlen** benötigt man das **Auswahlaxiom**. Dieses ist unabhängig von den übrigen Axiomen und wird für wichtige Aussagen in Topogie und Algebra in Form von gleichwertigen Aussagen wie z.B. dem **Lemma von Zorn** oder dem **Maximalprinzip von Haussdorff** benötigt. Die Gleichwertigkeit der vier häufigsten Alternativen zum Auswahlaxiom wird daher ziemlich ausführlich bewiesen. Die endlichen und unendlichen Kardinalzahlen werden kurz bis zur **Kontinuumshypothese** dargestellt. Der Text enthält aus Gründen der Übersichtlichkeit nur das Nötigste zum Verständnis der Begriffe. Die Begründungen einfacherer Aussagen sind häufig in den Text einbezogen oder ausgelassen. Für das Verständnis reichen formal Schulkenntnisse aus; in der zweiten Hälfte wird allerdings eine Vertrautheit mit mathematischen Denkweisen vorausgesetzt, die weit über die übliche Schulbildung hinausgeht.

Weilheim, im Dezember 2012 Arne Pönitz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Mathematik dient wie die anderen Naturwissenschaften auch dazu, unser Verständnis der Welt um uns zunächst zu vereinfachen und dann zu erweitern. Bei der Entwicklung der Begriffe von Unendlichkeit und Grenzwerten sowie der Erweiterung der Zahlbereiche auf irrationale, transzendente und imaginäre Zahlen ergaben sich im 19. Jahrhundert zunehmend Widersprüche (**Paradoxone** = neben der vorherrschenden Meinung (dogma) oder besser **Antinomien** = gegen die eigene Bedeutung) und Unsicherheiten um den Begriff der Zahl und des Zählens. Das Ziel der Mengenlehre besteht darin, die Möglichkeiten und Grenzen des Zählens zu verstehen, indem man die Zahlen auf möglichst wenigen einfachen und verständlichen Voraussetzungen aufbauend nachkonstruiert.

2 Objektsprache und Metasprache

Die Vielfalt der alltäglichen Umgangssprache bietet Raum für **semantische Antinomien**, wie z.B. die folgenden:

1. Wenn jemand sagt: “Ich lüge.” , lügt er dann oder lügt er nicht?
2. Das Krokodil hat ein Kind geraubt und sagt dem Vater: “Wenn du errätst, ob ich das Kind zurückgebe, werde ich es tatsächlich zurückgeben. Der Vater antwortet: “Du wirst das Kind nicht zurückgeben.” Was soll das Krokodil tun?
3. Richards Paradox: Ordnet man alle endlichen und ausschließlich aus lateinischen Buchstaben gebildeten Ausdrücke für reelle Zahlen (z.B. „Achtunddreissig geteilt durch Sieben” oder „Die Maßzahl der Diagonale eines Quadrates mit einer Kantenlänge von einem Meter in Metern”) lexikographisch, so erhält man eine Folge a(n) reeller Zahlen. Der Ausdruck „Dies ist die Zahl, die man erhält, wenn man die n-te Stelle von a(n) um eins vermehrt, wenn sie den Wert Null bis Acht besitzt und auf Null setzt, wenn sie den Wert Neun besitzt” gehört einerseits zur Folge a(n), ist aber andererseits verschieden von jeder Zahl in a(n).

Alle semantischen Antinomien kommen dadurch zustande, dass sich Ausdrücke auf sich selbst beziehen und dadurch Zirkelschlüsse und Widersprüche ermöglichen. In Beispiel 1 stellt sich der Ausdruck selbst in Frage. In Beispiel 2 ist eine wenn-dann-Bedingung nicht korrekt formuliert, denn die Folge „dann gebe ich das Kind zurück“ legt bereits die Bedingung „Wenn du errätst, ob ich das Kind zurückgebe oder nicht“ fest. Auch hier entsteht der Widerspruch durch den Selbstbezug des Ausdruckes. In Richards Paradox steht der zitierte Ausdruck ja tatsächlich an einer Stelle n der Folge a(n) und bezieht sich damit auf sich selbst.

Um semantische Antinomien zu vermeiden, schränkt man die mathematische **Objektsprache** soweit ein, dass Selbstbezüge und Mehrdeutigkeiten unmöglich oder zumindest leicht erkennbar werden. Die Beschränkung auf möglichst wenige mathematischen Symbole (Vokabeln) und klar definierte Verknüpfungsregeln (Grammatik) sollen die Formulierung eindeutiger und widerspruchsfreier Anweisungen erleichtern und ähnelt daher den **Programmiersprachen** für Computer. Demgegenüber verwendet man weiterhin die alltägliche **Metasprache**, um Aussagen der Objektsprache zu kommentieren.

3 Axiome, Definitionen und Sätze

Logische Antinomien sind inhaltliche Widersprüche, die auch durch Beschränkung auf eine reduzierte Objektsprache erhalten bleiben. Beispiele sind:

1. Die **Russel-Antinomie** betrifft das **Universum** U aller Mengen. Ist es tatsächlich eine Menge, so ist sie Element von sich selber ($U \in U$), was absurd erscheint. Ist es keine Menge, was ist es dann?

2. Die **Burali-Forti-Antinomie** betrifft die Menge ω der verallgemeinerten natürlichen Zahlen (**Ordinalzahlen**). Die Menge aller Ordinalzahlen bis und einschließlich einer gegebenen Ordinalzahl entspricht der Ordinalzahl, die um eins größer ist als die gegebene Ordinalzahl. Die Menge ω aller Ordinalzahlen selbst hat aber auch wieder alle Eigenschaften einer Ordinalzahl und ist daher Element von sich selbst: Die Menge aller Ordinalzahlen einschließlich ω entspricht dann aber der Ordinalzahl $\omega + 1$ und ω ist also doch nicht die Menge aller Ordinalzahlen.
3. Die **Cantor-Antinomie** bestrifft die Mächtigkeiten (**Kardinalzahlen**) C(U) des Universums U und C(P(U)) der Menge P(U) (Potenzmenge) ihrer Teilmengen. Einerseits muss U die größte Mächtigkeit aller Mengen besitzen, andererseits muß C(P(U)) noch größer sein.

Diese drei Antinomien klingen alle recht ähnlich, da sie die größten aller vorstellbaren Mengen und ihre mögliche Erweiterung im Widerspruch zu ihre Maximaleigenschaft beschreiben. Erstaunlicherweise sind die drei Antinomien aber zumindest nicht gleichwertig. Es gibt logische Systeme, die Nr.1 vermeiden und Nr. 3 zulassen.

Um auch logische Widersprüche möglichst weitgehend zu vermeiden, beschränkt man sich beim inhaltlichen Aufbau der Mathematik auf wenige Grundannahmen (**Axiome**), aus denen alle weiteren Aussagen (**Sätze**) hergeleitet werden. Die logischen Regeln der Herleitung mittels der primitiven logischen Konstanten ⇒ („daraus folgt“ ; „wenn..., dann...“) und ⇔ („ist gleichwertig zu“; „...genau dann, wenn...“) werden aber nicht weiter definiert. Ihre Gültigkeit beschränkt sich auf menschliches Ermessen und menschliche Überzeugung! Häufig auftretende Konstruktionen werden in der Regel durch Symbole und Begriffe abgekürzt, die aber natürlich mittels **Definitionen** vorher eindeutig erklärt werden müssen.

4 Elemente der mengentheoretischen Objektsprache

Logische Variablen a, b, c, ... , A, B, C, ... , α, β, γ, ... bezeichnen die **Objekte** der Mengenlehre. Dabei kann es sich z.B. um Zahlen, Mengen, Funktionen und Ausdrücke handeln. Steht eine Variable a in Abhängigkeit von einer frei wählbaren (siehe unten) Variablen x, so bringt man dies durch die üblichen Klammern zum Ausdruck und schreibt a(x). Ersetzt man in einem Ausdruck eine Variable durch eine andere Variable, die bisher nicht in dem Ausdruck auftrat, so bleibt der Ausdruck unverändert. Z.B. hat der Ausdruck $\varphi(x,y,\delta) = |x - y| < \delta$ die gleiche Bedeutung wie der Ausdruck $\varphi(x,z,\delta) = |x - z| < \delta$, da die Variable y bzw. z in diesem Ausdruck frei gewählt werden kann.

Logische Konstanten =, ∈, ∃, ...bezeichnen die **Beziehungen** zwischen den Objekten der Mengenlehre. Im Gegensatz zu den Variablen dürfen sie nicht durch andere Konstanten ersetzt werden, wenn die Bedeutung eines Ausdruckes erhalten bleiben soll. Die einfachsten logischen Konstanten sind die **primitiven Symbole**. Dabei handelt es sich um Abkürzungen für Ausdrücke der Metasprache und werden darüberhinaus nicht näher erklärt. Sie unterliegen daher voll dem **subjektiven Vorbehalt** der menschlichen Metasprache. Zwei Objekte des täglichen Lebens (Menschen, Ameisen, Elektronen, Rechenausdrücke, ...) erscheinen z.B. **gleich**, wenn sie für den Beobachter **ununterscheidbar** sind. Die Unterscheidbarkeit hängt aber von den Wahrnehmungen und Interessen des Beobachters ab. Die Rechenausdrücke 14 : 2 und 3 + 4 sind (wie jeder Grundschüler bezeugen kann) in ihrer Qualität und Schwierigkeit völlig verschieden, werden aber in der Mathematik gewöhnlich gleich gesetzt, da man sich bei der Betrachtung auf das Ergebnis 7 beschränkt und den Rechenweg und die Ausgangsziffern außer Acht lässt. Ähnliche Vorbehalte gelten für die meisten anderen primitiven Symbole, insbesondere aber für ⇒ und ⇔, die sich auf den „gesunden Menschenverstand“, d.h. menschliche Logik und Überzeugung berufen.

Symbol	Bedeutung
$=$	ist gleich
$\in$	ist Element von
$\wedge$	und
$\vee$	einschließliches oder
$\neg$	nicht
$\exists$	es gibt ein ... mit
$\forall$	für alle ... gilt:
$\Rightarrow$	daraus folgt:
$\Leftrightarrow$	ist gleichwertig zu
$:$	, für die gilt:

Ausdrücke werden aus logischen Konstanten und Variablen zusammengesetzt. Um sinnlose Ausdrücke wie z.B. $\Rightarrow \in$ xy auszuschließen, hält man sich an die folgenden **rekursiven Konstruktionsregeln**:

1. Ausdrücke können die Gestalt „$x \in y$" oder „$x = y$" haben.
2. Sind φ und χ Ausdrücke und x eine Variable, so sind auch $\neg\varphi$, $\varphi\vee\chi$, $\varphi\wedge\chi$, $\varphi\Rightarrow\chi$, $\varphi\Leftrightarrow\chi$, $\exists x\colon \varphi$ und $\forall x\colon \varphi$ Ausdrücke.

Enthält ein Ausdruck eine Variable, die nicht durch die **Quantoren** $\exists$ oder $\forall$ bestimmt wird, so ist die Variable einerseits frei wählbar; andererseits ist die Aussage des Ausdruckes von der Wahl dieser Variablen abhängig. Die Variable hat dann die Rolle eines **Parameters** und wird **freie** Variable genannt. Die Abhängigkeit des Ausdruckes φ von einer freien Variablen x wird durch die übliche Klammerschreibweise $\varphi(x)$ kenntlich gemacht. Ist die Auswahl der Variablen durch die Quantoren $\exists$ oder $\forall$ festgelegt, so spricht man von einer **gebundenen** Variablen, deren Auswahl keinen Einfluss auf die Aussage des Ausdruckes hat. Z.B. ist der Ausdruck $\varphi(x,y) = x \in y$ für $x = \frac{7}{2}$ und $y = \mathbb{Z}$ falsch und für $x = \frac{7}{2}$ und $y = \mathbb{Q}$ richtig. Der Ausdruck $\chi(y) = \exists\ x\colon x \in y$ ist wahr für $y = \mathbb{Z}$ und falsch für $y = \emptyset$. Der Ausdruck $\psi = \exists x\colon x \in \mathbb{Z}$ ist immer wahr, denn es gibt ein solches x, z.B. $x = 2$. Der Ausdruck $\vartheta = \forall x\colon x \in \mathbb{Z}$ ist immer falsch, denn für $x = \frac{7}{2}$ ergibt sich ein Widerspruch.

Axiome, Sätze und Definitionen enthalten keine freien Variablen, da ihre Gültigkeit unabhängig von der willkürlichen Auswahl einer einzelnen Variable sein soll. Zur Förderung der Übersichtlichkeit werden daher die Erklärungen $\forall x$, $\forall y$, $\forall z$, usw. zu Beginn von Axiomen, Definitionen und Sätzen weggelassen. In Axiomen, Definitionen und Sätzen erhalten also scheinbar freie Variablen x, y, z, ... automatisch die Erklärungen $\forall x$, $\forall y$, $\forall z$, ... zu Beginn.

Definitionen sind Erklärungen für neue logische Symbole, die zur Abkürzung eingeführt werden. Man erhält durch Einsetzen der neu definierten Symbole kürzere und übersichtlichere Ausdrücke, die sich aber jederzeit wieder auf primitive Ausdrücke zurückführen lassen müssen.

Unsere erste Definition dient der Abkürzung der Negation in den beiden häufigsten Anwendungfällen. Die vollständige Formulierung wäre $\forall x \forall y : (x \notin y := \neg(x \in y))$ und $\forall x \forall y : (x \neq y := \neg(y = y))$. Wie oben angekündigt, lassen wir die Erklärung $\forall x \forall y$ zu Beginn weg und formulieren:

4.1 Definition der Negation: $x \notin y := \neg(x \in y)$ und $x \neq y := \neg(y = y)$.

Als Beispiel für die Verwendung von Metasprache und Objektsprache betrachten wir sechs gängige Definitionen für die Stetigkeit einer Funktion:

1. Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle x in ihren Definitionsbereich D, wenn für jede noch so kleine reelle Zahl ε ein passendes reelles δ existiert, so dass gilt: Für jede weitere Stelle y im Definitionsbereich, die einen Abstand kleiner als δ zu x besitzt, ist der Abstand ihres Bildes f(y) zum Bild f(x) auch kleiner als ε.
2. f heißt stetig an der Stelle $x \in D_f :\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ y \in D_f\colon d(x;y) < \delta \Rightarrow d(f(x);f(y)) < \varepsilon$.
3. Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle x in ihren Definitionsbereich D, wenn für jede noch so kleine reelle Zahl ε ein passendes reelles δ existiert, so dass das Bild der δ-Umgebung von x in der ε-Umgebung von f(x) liegt.
4. f heißt stetig an der Stelle $x \in D_f :\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ y \in D_f\colon f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$.
5. Eine Funktion f heißt stetig an der Stelle x ihres Definitionsbereiches, wenn das Urbild jeder f(x) enthaltenden offenen Menge des Wertebereichs auch wieder offen im Definitionsbereich ist.
6. f heißt stetig an der Stelle $x \in D_f :\Leftrightarrow f(x) \in U$ offen in $W_f \Rightarrow f^{-1}[U]$ offen in D_f.

In der Objektsprache erzielt man größtmögliche Exaktheit und Kürze durch die Beschränkung auf an anderer Stelle definierte mathematische Symbole, wodurch allerdings die Übersichtlichkeit nicht immer gesteigert wird. Aber auch in der Metasprache können Informationen mit allgemeinerer Bedeutung durch die Verwendung mathematische Fachwörter wie „Funktion", Definitionsbereich", „Bild", Urbild" und „offen" in die entsprechenden Definitionen ausgelagert werden. Dadurch gelingt es, hinreichend präzise und übersichtliche Aussagen zu formulieren, die durch Ergänzungen wie „auch" und „wieder" zusätzlich betont werden können. Im folgenden Text wird wird die übliche pragmatische Mischung aus Objekt- und Metasprache verwendet, um die Vorteile beider Darstellungsarten zu nutzen.

5 Mengen und Klassen

Die Ursache für das Russell-Antinomie war die unkritische Annahme des **Abstraktionsaxioms**: Für jeden Ausdruck $\varphi(x)$ gibt es eine entsprechende Menge $y(\varphi) = \{x\colon \varphi(x)\}$, die genau diejenigen Elemente x enthält, für die der Ausdruck $\varphi(x)$ gilt. Für $\varphi(x,y(\varphi)) = x \notin y(\varphi)$ erhält man im Fall $x = y(\varphi)$ zunächst einen einfachen **semantischen Widerspruch durch Selbstbezug**, den man mit der folgenden leicht einsehbaren Einschränkung des Abstraktionsaxioms aber vermeiden kann: Der **beschreibende** Ausdruck φ darf nicht von der **zu beschreibenden** Menge $y(\varphi)$ (oder gar von sich selber) **abhängig** sein. Diese Einschränkung wurde 1922 von **Thoralf Skolem** formuliert. Schwerwiegender ist der Fall $\varphi(x) = x \notin x$, der einen **logischen Widerspruc**h nach sich zieht: Da x frei wählbar ist, kann man $x = y(\varphi)$ einsetzen und erhält die **Russell-Antinomie**. Wie in 3.1 schon bemerkt, ist die Menge $\{x\colon x \notin x\}$ zu groß für eine eindeutige Charakterisierung. Die Abgrenzung einer Menge mittels einer bestimmten Eigenschaft ist nur sinnvoll, wenn nicht von vornherein alle erdenklichen Elemente dieser Eigenschaft schon genügen.

Man könnte nun versuchen, alle diejenigen Eigenschaften auszuschließen, die infolge ihrer Allgemeinheit auf zu große Mengen führen. Einfacher ist die 1908 von **Ernst Zermelo** vorgeschlagene Einschränkung auf das **Separationsaxiom**: Man lässt alle möglichen Eigenschaften zu und beschränkt sich dafür auf eine **Grundmenge** z. Für jede Grundmenge z und jeden Ausdruck $\varphi(x)$ gibt es eine entsprechende Menge $y(\varphi,z) = \{x\colon x \in z \land \varphi(x)\}$, die genau diejenigen Elemente x **aus der Grundmenge z** enthält, für die der Ausdruck $\varphi(x)$ gilt. Mit dem **Russell-Ausdruck** $\varphi(x) = x \notin x$ erhält man die Menge $y(\varphi,z) = \{x\colon x \in z \land x \notin x\}$. Die Eigenschaft $\varphi(x) = x \notin x$ als Ausdruck einer minimalen Struktur sollte für alle Mengen erfüllt sein und folgt auch tatsächlich aus dem **Fundierungsaxiom VII**, welches aber erst in Kapitel 11 bei der Konstruktion der Ordinalzahlen konkret formuliert wird. Demnach beschreibt $y(\varphi)$ einfach alle Mengen, die in der Grundmenge z enthalten sind. Setzt man einerseits $x = z$, so ergibt sich $z \in y \Leftrightarrow z \in z \land z \notin z$. Da die rechte Seite falsch ist, muss auch die linke Seite falsch sein, d.h., es muss $z \notin y$ gelten: Die Grundmenge z kann nicht Element ihrer eigenen Teilmenge y sein. Das war zu erwarten und ist akzeptabel. Setzt man andererseits $x = y$, so erhält man die Aussage $y \in y \Leftrightarrow y \in z \land y \notin y$. Da es nach unseren Vorstellungen keine Menge geben darf, die Element von sich selber ist, muss die linke Seite falsch sein. Dann ist auch die rechte Seite falsch und da $y \notin y$ wahr ist, folgt $y \notin z$: Die Menge y kann auch nicht Element der Grundmenge z sein. Es gibt damit keine Grundmenge, die so groß ist, dass sie die Menge aller Mengen als Element enthält. Die Menge aller Mengen (das **Universum**) ist durch die Annahme des Separationsaxioms also von weiteren Betrachtungen ausgeschlossen.

Wegen der Unbestimmtheit des Ausdruckes $\varphi(x)$ handelt es sich bei dem Separationsaxiom eigentlich um ein **Schema** für die Formulierung **unendlich** vieler Axiome. Im Jahr 1922 gelang es Thoralf Skolem und Abraham **F**raenkel, ein System aus acht endlichen Axiomen und dem Schema der Separationaxiome aufzustellen, dass einerseits frei von direkten Widersprüchen ist und andererseits die Herleitung aller gängigen mathematischen Aussagen erlaubt. Unter den acht endlichen Axiomen ist auch das berühmte, von Ernst **Z**ermelo formulierte **Auswahlaxiom** (Axiom of **C**hoice), woraus sich die Abkürzung **ZFC** für dieses bis heute weit verbreitete Axiomensystem ableitet.

Das Separationsaxiom vermeidet logische Antinomien, indem es die entsprechenden sehr großen Objekte einfach von der Betrachtung ausschließt. Da es das Universum U aller Objekte in diesesm System nicht gibt, erhält man allerdings in Grenzfällen etwas unbefriedigende Aussagen wie z.B. $\cap\emptyset = \emptyset$. Der Durchschnitt $\cap x$ einer Menge x enthält nämlich alle Elemente, die in allen Elemente von x enthalten sind. Für $x = \emptyset$ enthält A keine Elemente, so dass die Bedingung leer ist und daher auf alle Elemente zutrifft. Es müsste also eigentlich gelten $\cap\emptyset = U$. Abgesehen von solchen Schönheitsfehlern besteht die Motivation für die Entwicklung der Mengenlehre in dem Wunsch, sehr große Objekte wie z.B. gerade das Universum U besser zu verstehen und zu beschreiben. Durch Arbeiten von John von **N**eumann (1923), Paul **B**ernays (1937) und Kurt **G**ödel (1940) wurde der Mengenbegriff erweitert, um auch diese größten und interessantesten Objekte etwas zugänglicher zu machen: Jeder Ausdruck $\varphi(x)$ definiert zunächst eine **Klasse** $\{x\colon \varphi(x)\}$ von **Mengen** x, für die dieser Ausdruck wahr ist.

5.1 Definition der Menge: Eine Klasse x heißt **Menge**, wenn sie Element einer Klasse z ist, d.h., wenn $\exists$z: x $\in$ z. Eine Klasse, die keine Menge ist, wird auch als **echte Klasse** bezeichnet.

Das Separationsschema wird dann ersetzt durch das folgende

I Klassifizierungsschema : Für jeden Ausdruck φ(x) gibt es eine entsprechende **Klasse** y(φ) = {x: $\exists$z: x $\in$ z $\wedge\varphi$(x)}, die genau diejenigen **Mengen x** enthält, für die der Ausdruck φ(x) gilt.

Der Unterschied zum Separationsschema des ZFC-Systems besteht in der Behandlung der Grundklasse z: z kann eine echte Klasse sein und ist kein freier wählbarer Parameter mehr, sondern eine durch den Quantor $\exists$ gebundene Variable. Mit dem **Russell-Ausdruck** ϱ(x) = x $\notin$ x erhält man die Klasse r = {x: $\exists$z: x $\in$ z $\wedge$ x $\notin$ x}. Mit x = r ergibt sich r $\in$ r $\Leftrightarrow$ $\exists$z: r $\in$ z $\wedge$ r $\notin$ r. Da die linke Seite falsch ist, muss auch die rechte Seite falsch sein und da r $\notin$ r wahr ist, folgt $\nexists$z: r $\in$ z: Die Klasse r ist keine Menge. Sie ist zu groß, um sie von einer anderen Menge abzugrenzen. Das ist akzeptabel. Die Überlegung x = z erübrigt sich, weil die Grundmenge z von x abhängig ist und nicht willkürlich festgelegt werden darf. Die Mengendefinition und das Klassifizierungsschema sowie acht weitere Axiome bilden die Grundlage des nach seinen Hauptentwicklern benannten **NBG**-Systems, das heute eine ähnliche Verbreitung wie ZFC gefunden hat. Man kann zeigen, dass in NBG die gleichen Sätze über **Mengen** bewiesen werden können wie in ZFC. Darüber hinaus sind aber Aussagen über **echte Klassen** formulierbar, die in ZFC nicht möglich sind. Ein eher formal-ästhetisches Argument für NBG besteht darin, dass sich das Klassifizierungsschema durch acht Spezialfälle ersetzen lässt. NBG lässt sich also durch ein **endliches Axiomensystem** von insgesamt 16 Axiomen beschreiben. Dies ist bei ZFC nicht möglich.

Aus dem Klassifizierungsschema folgt unmittelbar der folgende

5.2 Satz über die Elementbeziehung: x $\in$ y(φ) $\Leftrightarrow$ φ(x) und x ist eine Menge.

Im ursprünglichen NBG-System sind nicht nur die ungebundene Variable x, sondern auch etwaige **gebundenen Variablen** in dem Ausdruckg φ(x) auf **Mengen** beschränkt. Diese Einschränkung wird in den Lehrbüchern von **John Kelley** 1955 (Anhang von *General Topology*) und Anthony Morse 1965 (*set theory*) aufgehoben, wodurch das Klassifizierungsschema so erweitert wird, dass es sich nicht mehr durch acht Spezalfälle ersetzen lässt. Die Variante von Kelley und Morse ist weitergehend als NBG und ZFC und lässt sich nicht mehr durch ein endliches Axiomensystem beschreiben. Sie ermöglicht aber vor allem bei den Relationen und Funktionen eine übersichtlichere Darstellung und wird daher in diesem Text übernommen. Das Klassifizierungsschema und die acht Axiome werden lateinisch von I - IX nummeriert, während Defintionen und Sätze abschnittsweise arabisch nummeriert werden.

Nach unserem primitiven Gleichheitsbegriff haben zwei gleiche Klassen x und y zumindest auch die gleichen Elemente: x = y $\Rightarrow$ $\forall$z: z $\in$ x $\Leftrightarrow$ z $\in$ y. Diese im Alltag **notwendige** Minimalbedingung der Gleichheit wird in der heute verbreiteten **extensionalen** Auffassung der Mathematik auch schon als **hinreichend** betrachtet:

II Extensionalitätsaxiom: x = y $\Leftrightarrow$ $\forall$z: z $\in$ x $\Leftrightarrow$ z $\in$ y.

Im rein extensionalen Sinn ist also ein Haufen Einzelteile gleich der zusammengebauten und betriebsbereiten Maschine. Im Alltag erwartet man von der Gleichheit zweier Objekten natürlich mehr: Die Elemente sollten nicht nur übereinstimmen, sondern auch in der gleichen Anordnung und mit der gleichen Vorgeschichte und Darstellung in den beiden Objekten auftreten. Diese **intensionale** Auffassung hat sich in der Mathematik aus praktischen Gründen nicht durchsetzen können, weil die Definition von weiteren Elementeigenschaften wie Anordnung, Vorgschichte, usw. für allgemeine Zwecke zu aufwendig ist.

6 Elementare Algebra für Klassen

6.1 Definitionen: Die **kleine Vereinigung** x $\cup$ y := {z: z $\in$ x $\vee$ z $\in$ y} ist die Klasse aller Elemente, die in x **oder** y liegen und der **kleine Schnitt** x $\cap$ y := {z: z $\in$ x $\wedge$ z $\in$ y} die Klasse aller Elemente, die in x **und** y liegen. x und y sind **disjunkt**, wenn x $\cap$ y = $\emptyset$.

6.2 Definitionen: Die **große Vereinigung** $\bigcup x := \{z\colon \exists y\colon z \in y \in x\}$ ist die Klasse aller Elemente, die in **irgendeinem** Element von x liegen und der **große Schnitt** $\bigcap x := \{z\colon \forall y\colon y \in x \Rightarrow z \in y\}$ ist die Klasse aller Elemente, die in **jedem** Element von x liegen. Die Klasse x wird in der Praxis häufig durch eine **Indexklasse** I gegliedert. Mit $x = \{x_i : i \in I\}$ erhält man dann $\bigcup x = \bigcup_{i \in I} x_i = \{z : \exists i \in I : z \in x_i\}$ und $\bigcap x = \bigcap_{i \in I} x_i = \{z : \forall i \in I : z \in x_i\}$. Die Klasse x heißt **paarweise disjunkt**, wenn $u \cap v = \emptyset$ für alle $u, v \in x$.

6.3 Sätze über Rechenregeln für Vereinigung und Schnitt:

1. **Neutrale Elemente:** $x \cup x = x$ und $x \cap x = x$.
2. **Kommutativität**: $x \cup y = y \cup x$ und $x \cap y = y \cap x$.
3. **Assoziativität:** $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ und $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$.
4. **Distributivität**: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ und $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Die Beweise zu den Rechenregeln ergeben sich durch direkte Anwendung des Klassifizierungsschemas I und des Extensionalitätsaxioms II. Die Rechenregeln sind hier für die kleine Version formuliert und gelten analog für die große Version. Bei intensionaler Auffassung der Gleichheit etwa unter Einbeziehung der Reihenfolge der Elemente würden Kommutativität und Assoziativität nicht mehr gelten!

6.4 Definition: $x^c := \{y : y \notin x\}$ ist das **Komplement** von x.

6.5 Sätze über Rechenregeln für Komplemente (de Morgan):

1. $(x^c)^c = x$
2. $(x \cup y)^c = x^c \cap y^c$
3. $(x \cap y)^c = x^c \cup y^c$

Beweis zu 2.: $z \in (x \cup y)^c \overset{I,6.4}{\Leftrightarrow} z \notin x \cup y \wedge \exists u\colon z \in u \overset{I,6.1}{\Leftrightarrow} \neg(z \in x \vee z \in y) \wedge \exists u\colon z \in u \overset{\text{Logik}}{\Leftrightarrow}$
$z \notin x \wedge z \notin y \wedge \exists u\colon z \in u \overset{I,6.4}{\Leftrightarrow} z \in x^c \vee z \in y^c \overset{I,6.1}{\Leftrightarrow} z \in x^c \cap y^c$.
Die konsequente Verwendung der Objektsprache verdeutlicht die typische Struktur dieses Beweises: Die Mengenaussauge wird mittels der bisher eingeführten Definitionen 6.1 und 6.4 sowie des Klassifizierungsschemas I in die rein logische Aussage $\neg(z \in x \vee z \in y)$ übersetzt. Der Kern des Beweises besteht in der Umformulierung dieser Aussage in die Form $z \notin x \wedge z \notin y$ mittels der Anwendung eines logischen Schlusses bzw. des gesunden Menschenverstandes auf die primitiven Konstanten $\in$ und $\vee$. Anschließend wird dieses Aussage rein formal wieder in die gewünschte Mengendarstellung umgewandelt. Die Beweise der ersten und dritten Aussage sowie der meisten folgenden Sätze verlaufen analog und werden daher ausgelassen.

6.6 Definition: Die **mengentheoretischen Differenz** von x und y ist $x \setminus y := x \cap y^c$.

6.7 Definition: Die **symmetrische Differenz** von x und y ist $x \,\Delta\, y := (x \cup y) \setminus (x \cap y)$

6.8 Definition: $x \subset y \Leftrightarrow \forall z : z \in x \Rightarrow z \in y$. x ist dann eine **Teilklasse** von y.

6.9 Sätze über Teilklassen:

1. $x = y \Leftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x$
2. $x \subset y \wedge y \subset z \Rightarrow x \subset z$
3. $x \subset y \Leftrightarrow x \cup y = y \Leftrightarrow x \cap y = x$
4. $x \subset y \Leftrightarrow x \setminus y = \emptyset \Leftrightarrow y \triangle x = y \setminus x$
5. $x \subset y \Rightarrow \bigcup x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset \bigcap x$
6. $x \in y \Rightarrow x \subset \bigcup y \wedge \bigcap y \subset x$

6.10 Definition: $2^{x} := \{y : y \subset x\}$ ist die **Potenzklasse** von x. Nach dem Klassifizierungsschema I enthält die Potenzklasse nur diejenigen Teilklassen von x, welche auch **Mengen** sind. Handelt es sich um eine endliche Menge mit $|x| \in \mathbb{N}$ Elementen, so enthält die Potenzklasse $|2^{x}| = 2^{|x|}$Elemente, denn jede Teilmenge $y \subset x$ entspricht einer Abbildung y: $x \to \{0;1\}$ und umgekehrt.

III Potenzmengenaxiom: Für jede **Menge** x ist die Potenzklasse 2^{x} wieder eine Menge und enthält **alle** Teilklassen von x.

6.11 Satz: Jede Teilklasse einer Menge ist eine Menge

Beweis: Nach 6.10 und III ist **jede** Teilklasse z einer Menge x ein Element der Potenzmenge 2^{x} und daher eine Menge.

7 Existenz von Mengen

Die Existenz einer Menge kann bisher und auch im Folgenden nicht bewiesen werden. Sie ist im **Unendlichkeitsaxiom VIII** enthalten, welches aber noch viel weitergehende Forderungen umfasst und daher auf den Abschnitt 12 verschoben wird.

7.1 Definition: $U := \{x : x = x\}$ ist das **Universum**. Es enthält genau die Klassen, die im extensionalen Sinn eindeutig beschrieben werden können. Für jede Klasse $x \in U$ und jedes Element y gilt entweder $y \in x$ oder $y \notin x$.

7.2 Satz: Das Universum ist die Klasse aller Mengen.

Beweis: Jedes $x \in U$ ist nach Definition 5.1 eine Menge. Umgekehrt ist jede Menge x Element einer Klasse z. Über die Zugehörigkeit zu einer Klasse z kann aber nur dann eindeutig entschieden werden, wenn für jedes Element y bestimmt werden kann, ob entweder $y \in x$ oder $y \notin x$ gilt. Es muss daher $x = x$ gelten und nach dem Klassifizierungsschema I folgt $x \in U$.

7.3 Definition: $\emptyset := \{x : x \neq x\}$ heißt **leere Klasse** .

7.4 Satz: Die leere Klasse enthält keine Elemente.

Beweis: Angenommen, $x \in \emptyset \overset{7.2}{\Rightarrow} x \in U \overset{7.1}{\Rightarrow} x = x \overset{7.3}{\Rightarrow} x \notin \emptyset$.

7.5 Sätze über das Universum und die leere Klasse:

1. $\emptyset^{c} = U$ und $U^{c} = \emptyset$
2. $\emptyset \subset x$ und $x \subset U$
3. $x \cap \emptyset = \emptyset$ und $x \cap U = x$
4. $x \cup \emptyset = x$ und $x \cup U = U$
5. $\bigcap \emptyset = U$ und $\bigcap U = \emptyset$
6. $\bigcup \emptyset = \emptyset$ und $\bigcup U = U$

Beweise der letzten vier Aussagen:

$\bigcap \emptyset = U$, denn $x \in \bigcap \emptyset \overset{\mathrm{I}, 6.2}{\Leftrightarrow} \forall y : y \in \emptyset \Rightarrow x \in y \wedge \exists z : x \in z \overset{7.4}{\Leftrightarrow} \exists z : x \in z \overset{7.2}{\Leftrightarrow} z \in U$.

$\bigcap U = \emptyset$, denn $\emptyset \subset x \in \bigcap U \overset{6.11}{\Rightarrow} \emptyset$ ist eine Menge $\overset{7.2}{\Rightarrow} \emptyset \in U \overset{6.2}{\Rightarrow} \bigcap U \subset \emptyset$ und $\emptyset \overset{7.4}{\subset} \bigcap U$.

$\bigcup \emptyset = \emptyset$, denn $x \in \bigcup \emptyset \overset{\mathrm{I}, 6.2}{\Leftrightarrow} \exists y : y \in \emptyset \wedge x \in y \overset{7.4}{\Rightarrow} \bigcup \emptyset \subset \emptyset$ und $\emptyset \overset{7.4}{\subset} \bigcup \emptyset$.

$\bigcup U = U$, denn $x \in U \overset{7.2}{\Rightarrow} x$ ist eine Menge $\overset{\mathrm{III}}{\Rightarrow} x \in 2^{x} \in U \overset{\mathrm{I}, 6.2}{\Rightarrow} x \in \bigcup U \Rightarrow U \subset \bigcup U$ und $\bigcup U \overset{7.2}{\subset} U$
.

7.6 Satz: Für alle $x \neq \emptyset$ ist $\bigcap x$ eine Menge.

Beweis: $x \neq \emptyset \overset{7.4}{\Rightarrow} \exists y : y \in x \overset{6.2}{\Rightarrow} \bigcap x \subset y \overset{6.11}{\Rightarrow} \bigcap x$ ist eine Menge.

7.7 Satz: $2^U = U$.

Beweis: $x \in 2^U \overset{7.2}{\Rightarrow} x \in U$ und umgekehrt $x \in U \overset{7.5}{\Rightarrow} x \subset U \overset{6.10}{\Rightarrow} x \in 2^U$.

7.8 Satz: U ist keine Menge.

Beweis: Die Russell-Klasse $r = \{x : x \notin x\}$ ist keine Menge, denn nach dem Klassifizierungsschema I gilt $r \in r \Leftrightarrow r \notin r$ und r ist eine Menge. Wegen Satz 7.5 gilt außerdem $r \subset U$ und wegen Satz 6.11 kann dann U keine Menge sein.

IV Axiom der Vereinigung: Mit x und y ist auch ihre Vereinigung $x \cup y$ eine Menge.

Beweis: Angenommen, für eine Menge x ist auch ihr Komplement x^c eine Menge, dann müsste nach Axiom IV auch das Universum $U = x \cup x^c$ eine Menge sein im Widerspruch zu Satz 7.8.

Die Aussagen $\emptyset \neq U$ und insbesondere „$\emptyset$ ist eine Menge“ sind nicht beweisbar und müssen postuliert werden. Sie folgen aus dem Unendlichkeitsaxiom VIII in Abschnitt 12.

Die folgenden Abschnitte befassen sich mit der Ordnung von (bis auf weiteres hypothetischen) Mengen durch **Relationen** und **Funktionen**. Diese führen zur mengentheoretischen Herleitung des Zählens in Gestalt der **Ordinalzahlen**. Die für die Konstruktion der Ordinalzahlen benötigten „geschachtelten“ Mengen werden im **Unendlichkeitsaxiom VIII** postuliert. Die endlichen Ordinalzahlen entsprechen den **natürlichen Zahlen**. Für den Vergleich unendlich großer Mengen verwendet man die ebenfalls aus den Ordinalzahlen abgeleiteteten **Kardinalzahlen** und benötigt dafür ein letztes Axiom, das **Auswahlaxiom IX**.

8 Relationen

Die Konstruktion von geordneten Paaren auf einer zunächst völlig amorphen Menge ist mit gewissem technischen Aufwand verbunden. Die Beweise zu den folgenden Sätzen ergeben sich durch direkte Anwendung der Rechenregeln aus Abschnitt 6 und werden hier nicht dargestellt. Entscheidend ist der Satz 8.8 über die Eindeutigkeit der geordneten Paare.

8.1 Definition: $\{x\} := \{z\colon x \in U \Rightarrow z = x\}$ wird **Atom** x genannt. Ist x eine Menge, so ist $\{x\}$ die Klasse, deren einziges Element x ist. Wegen $x \in 2^x$ folgt in diesem Fall $\{x\} \subset 2^x$. Insbesondere ist $\{x\}$ dann ebenfalls eine Menge und es gilt $\bigcup\{x\} = \bigcap\{x\} = x$. Ist x keine Menge, so gilt $x \notin U$ und daher $\{x\} = \bigcup\{x\} = U$ und $\bigcap\{x\} = \emptyset$.

8.2 Definition: $\{x;y\} := \{x\} \cup \{y\}$ heißt **ungeordnetes Paar** von x und y. Wegen 8.1 und IV ist $\{x;y\}$ **genau dann** eine Menge, **wenn** dies auch für x **und** y gilt und in diesem Fall ist $z \in \{x; y\} \Leftrightarrow z = x \vee z = y$. Nach 8.1 gilt $\{x;y\} = U$ **genau dann, wenn** x **oder** y keine Menge ist.

8.3 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $\bigcap\{x; y\} = x \cap y$ und $\bigcup\{x; y\} = x \cup y$. Ist x **oder** y keine Menge, so gilt wegen 8.2 $\bigcap\{x; y\} = \emptyset$ und $\bigcup\{x; y\} = U$.

8.4 Definition: $(x;y) := \{\{x\};\{x;y\}\}$ heißt **geordnetes Paar**. Wegen 8.2 und IV ist $(x;y)$ **genau dann** eine Menge, **wenn** dies auch für x **und** y gilt. Nach 8.2 gilt $\{x;y\} = U$ **genau dann, wenn** x **oder** y keine Menge ist.

8.5 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $\bigcup(x; y) = \{x; y\}$, $\bigcap(x; y) = \{x\}$, $\bigcup\bigcap(x; y) = \bigcap\bigcap(x; y) = x$, $\bigcup\bigcup(x; y) = x \cup y$ und $\bigcap\bigcup(x; y) = x \cap y$. Ist x **oder** y **keine** Menge, so gilt $\bigcup\bigcap(x; y) = \bigcap\bigcup(x; y) = \emptyset$ und $\bigcup\bigcup(x; y) = \bigcap\bigcap(x; y) = U$.

8.6 Definition: $p_1(z) := \bigcap\bigcap z$ ist die erste und $p_2(z) := (\bigcap\bigcup z) \cup ((\bigcup\bigcup z) \setminus (\bigcup\bigcap z))$ die zweite **Koordinate** von z.

8.7 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $p_1(x; y) = x$ und $p_2(x; y) = y$. Ist x **oder** y **keine** Menge, so gilt $p_1(x; y) = p_2(x; y) = U$.

8.8 Satz: Sind x **und** y Mengen, so gilt $(x;y) = (u;v) \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$.

8.9 Definitionen: R heißt **Relation**, wenn für jedes $z \in R$ zwei **Klassen** x und y existieren mit z = (x;y). Eine Relation ist also eine Klasse geordneter Paare. Für $(x;y) \in R$ schreibt man auch xRy. Ihre **Inverse** ist $R^{-1} := \{(x;y): (y;x) \in R\}$. Damit folgt $(R^{-1})^{-1} = R$. Zwei Relationen lassen sich **verketten** gemäß $S \circ R := \{(x;z): \exists\ y: (x;y) \in R \wedge (y;z) \in S\}$. Die Verkettung ist **assoziativ** mit $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$. Offensichtlich gilt $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.Spezielle Relationen sind die **Produktklasse** $x \times y := \{(u; v) : u \in x \wedge v \in y\}$ und die **Diagonale** $\Delta := \{(x;y): x = y\}$. Eine Relation R heißt **reflexiv**, wenn $\Delta \subset R$; **symmetrisch**, wenn $R = R^{-1}$; **antisymmetrisch**, wenn $R \cap R^{-1} = \Delta$ und **transitiv**, wenn $R \circ R \subset R$. Man nennt sie **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Klasse $R(x) := \{y: (x;y) \in R\}$ ist dann die **Äquivalenzklasse** von x. Aus der **Reflexivität** folgt $x \in R(x)$. Wegen der **Symmetrie** und der **Transitivität** ist $xRy \Leftrightarrow R(x) = R(y)$ und $\neg xRy \Leftrightarrow R(x) \cap R(y) = \emptyset$. Für eine Äquivalenzrelation $R \subset x \times x$ ist die **Quotientenklasse x/R** $:= \{R(u): u \in x\}$ aller Äquivalenzklassen eine Familie paarweise disjunkter Klasse mit $x = \bigcup x/R$.

9 Funktionen

9.1 Definitionen: Eine Relation f heißt **Funktion**, wenn gilt: $(x;y) \in f \wedge (x;z) \in f \Rightarrow y = z$. Eine Funktion ist also eine Relation, deren zweite Koordinate durch die erste Koordinate eindeutig bestimmt wird. Sie wird daher als **Wert** $f(x) := \bigcap\{y: (x;y) \in f\}$ von f an der Stelle x bezeichnet. Die Klasse $D_f := \{x: \exists y: (x;y) \in f\}$ heißt **Definitionsbereich**. Nach Satz 7.4 gilt $x \notin D_f \Rightarrow f(x) = \bigcap\emptyset = U$: der Funktionswert ist dann **unbestimmt**. Nach 8.1 gilt $x \in D_f \Leftrightarrow f(x) = \bigcap\{y\} = y$ mit $(x;y) \in f$. Insbesondere ist nach 8.4 für jedes $x \in D_f$ der Wert f(x) eine **Menge**. Die Funktion lässt sich also in der Form $f = \{(x;y): y = f(x)\}$ beschreiben. Außerdem definiert man das **Bild** $f[x] := \{y: \exists u \in x: (u;y) \in f\}$ einer Klasse x unter f. Das Bild $f\,[D_f]$ wird **Wertebereich** genannt. Man schreibt dann $f: D_f \to f\,[D_f]$. Beschränkt man die Definition auf eine Menge $A \subset D_f$, so erhält man die **Restriktion** $f|A: A \to f[A]$. Häufig ist vom Wertebereich f[A] nur bekannt, dass er in einer eventuell größeren Menge B liegt. Man schreibt dann $f: A \to B$ und nennt f **surjektiv** bzw. **Surjektion**, wenn $f[A] = B$. Die Funktion f heißt **injektiv** bzw. **Injektion**, wenn gilt: $(x;y) \in f \wedge (u;y) \in f \Rightarrow x = u$. Dann lässt sich die erste Koordinate eindeutig aus der zweiten Koordinate bestimmen und die **Umkehrfunktion** f^{-1} ist ebenfalls wieder eine Funktion. Schließlich heißt sie **bijektiv** bzw. **Bijektion**, wenn sie injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall ist $f^{-1}[B] = A$.

9.2 Satz: Für eine Funktion $f: A \to B$ und alle $C, D \subset A$ gilt

1. $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$
2. $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$
3. $f[C \cup D] = f[C] \cup f[D]$
4. $f[C \cap D] \subset f[D] \cap f[D]$
5. f ist injektiv genau dann, wenn $f[C \cap D] = f[C] \cap f[D]$ für alle $C, D \subset A$

9.3 Satz: $f = g \Leftrightarrow \forall x: f(x) = g(x)$.

Zwei Funktionen f und g sind gleich, wenn ihre Werte an **jeder** Stelle x übereinstimmen. Der Beweis verwendet ausschließlich die Definitionen und Aussagen aus 9.1. Die Fallunterscheidung $x \in D_f$ bzw. $x \notin D_f$ ist vor allem dann von Bedeutung, wenn g eine **Fortsetzung** von f ist, d.h., wenn $g \supset f$.

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei f = g: Falls $x \in D_f \Rightarrow \exists y: (x;y) \in f$ mit $y = f(x) \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} (x;y) \in g$ mit $y = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Falls $x \notin D_f \Rightarrow \nexists y: (x;y) \in f$ und $f(x) = U \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \nexists y: (x;y) \in g \Rightarrow g(x) = U$.

$\Leftarrow$: Sei $f \neq g$ und o.B.d.A $(x;y) \in f \setminus g \Rightarrow y = f(x)$. Falls $x \in D_g \Rightarrow \exists z$: $(x;z) \in g$ mit $z = g(x) \overset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} f(x) = y \neq z = g(x)$. Falls $x \notin D_g \Rightarrow g(x) = U \quad \overset{\text{Vor.}}{\text{und}} \quad f(x) \neq U \Rightarrow f(x) \neq g(x)$.

Für den folgenden Satz über Produktmengen benötigt man gleich zwei Axiome:

V Ersetzungsaxiom: Das Bild $f[x]$ einer Menge x ist wieder eine Menge.

VI Großes Vereinigungsaxiom: Die Vereinigung $\bigcup x$ der Mengen einer Menge x ist wieder eine Menge.

Das kleine Vereinigungsaxiom IV lässt sich nicht aus dem großen Vereinigungsaxiom VI herleiten, weil sich die kleine Vereinigung nicht durch die große Vereinigung ersetzen lässt. Z.B. ist $x \cup y = \bigcup\{x\} \cup \{y\}$.

9.4 Satz: Für zwei Mengen x und y ist auch ihr Produkt $x \times y$ eine Menge.

Beweis: Für jedes $u \in x$ ist $\{u\} \times y$ das Bild der auf y definierten Funktion f mit $f(v) = (u;v)$ und nach Axiom V daher eine Menge. Das Bild der auf x definierten Funktion g mit $g(u) = \{u\} \times y$ ist dann nach Axiom V ebenfalls eine Menge. Nach Axiom VI ist $x \times y = \bigcup\{\{(u,v): \exists v: v \in y\} : \exists u: u \in x\} = \bigcup\{\{u\} \times y : \exists u: u \in x\} = \bigcup g[x]$ dann wieder eine Menge.

9.5 Satz: Ist der Definitionsbereich einer Funktion f eine Menge, so ist auch f eine Menge.

Beweis: Mit Axiom V und VI, denn $f \subset D_f \times f[D_f]$.

9.6 Definition: $y^x := \{f: x \to y \text{ ist eine Funktion}\}$.

Handelt es sich um endliche Mengen mit $|x| \in \mathbb{N}$ bzw. $|y| \in \mathbb{N}$ Elementen, so gilt $|y^x| = |\, y \,|^{|x|}$.

9.7 Satz: Für zwei Mengen x und y ist auch y^x eine Menge.

Beweis: $f \in y^x \overset{9.5}{\Rightarrow} f \subset x \times y \overset{\text{III}, 9.4}{\Rightarrow} f \in 2^{x \times y}$ und $2^{x \times y}$ ist eine Menge. Damit folgt $y^x \subset 2^{x \times y}$ $\overset{\text{III}}{\Rightarrow}$ y^x ist eine Menge.

10 Ordnungen

10.1 Definitionen: Eine Relation $\leq$ heißt **Ordnung**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Das geordnete Paar $(A;\leq)$ mit $\leq \in A \times A$ heißt dann geordnete Klasse. Für eine geordnete Klasse $(A;\leq)$ unterscheidet man das **kleinste Element** $a_0 \in A$, wenn $\forall\, a \in A$: $a_0 \leq a$ und das **minimale Element** $b_0 \in A$, wenn $\forall\, a \in A$: $a \leq b_0 \Rightarrow a = b_0$. Entsprechendes gilt für das **größte** und das **maximale Element** von A. Für eine Teilmenge $B \subset A$ nennt man $b_0 \in A$ eine **untere Schranke** von B, wenn $\forall\, b \in B$: $b_0 \leq b$. Die größte untere Schranke heißt **Infimum** inf B. Entsprechend definiert man die **obere Schranke** und das **Supremum** sup B. Eine Klasse ist **beschränkt**, wenn sie sowohl eine obere als auch eine untere Schranke beitzt. Eine geordnete Klasse $(A;\leq)$ heißt **linear geordnet**, wenn $\leq \cup \leq^{-1} = A \times A$. Sie besitzt die **Supremumseigenschaft**, wenn jede nicht leere und nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Eine linear geordnete Klasse mit Supremumseienschaft heißt **vollständig geordnet**. Schließlich ist $(A;\leq)$ **wohlgeordnet**, wenn jede nicht leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

10.2 Sätze und Beispiele:

1. Besitzt eine linear geordneten Menge ein kleinstes Element, so ist es eindeutig bestimmt und gleich dem minimalen Element.
2. Die Supremumseigenschaft ist gleichwertig zur **Infimumseigenschaft**, wenn jede nicht leere und nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum besitzt. Das gesuchte Infimum ist das Supremum der nicht leeren Menge der unteren Schranken der Teilmenge. Umgekehrt erhält man das Supremum einer nicht leeren nach oben beschränkten Menge als Infimum der nicht leeren Menge der oberen Schranken der Teilmenge.

3. Jede wohlgeordnete Menge wie z.B. die **natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$;$\leq$)** ist auch linear geordnet.
4. Die **reellen Zahlen ($\mathbb{R}$;$\leq$)** sind vollständig geordnet, aber nicht wohlgeordnet.
5. Die **rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$;$\leq$)** sind linear geordnet, aber weder vollständig noch wohlgeordnet.
6. Die **Potenzmenge der natürlichen Zahlen** $2^{\mathbb{N}}$ wird durch die **Inklusion** $\subset$ geordnet und besitzt dann ein **größtes Element** $\mathbb{N}$. Damit ist jede Teilmengenfamilie $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ beschränkt. Ihr **Supremum** ist die Vereinigung $\bigcup A$. ($2^{\mathbb{N}}$,$\subset$) ist aber weder linear noch wohlgeordnet.

10.3 Definitionen: Auf einer **linear geordneten** Klasse (X;$\leq$) mit $x < y := x \leq y \wedge x \neq y$ defniert man die **Intervallschreibweise** : $[a;b] := \{x \in X\colon a \leq x \leq b\}$, $]a;b] := \{x \in X\colon a < x \leq b\}$, $]-\infty;b] := \{x \in X\colon x \leq b\}$, usw.. Die Teilmenge $X_0 \subset X$ liegt **dicht** in X, wenn $\forall$ x,y $\in$ X: $x < y \Rightarrow \exists\, z \in X_0$: $x < z < y$. Insbesondere ist dann jedes offene Intervall $]x;y[\ \subset X$ mit $x < y$ nicht leer. Für den Fall $X_0 = X$ spricht man von einer **in sich dichten** Klasse. Die wichtigesten Beispiele sind die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Ein **Schnitt** S ist definiert als **nicht leere echte Teilmenge** $\emptyset \neq S \subsetneq X$ mit **Intervallcharakter**, d.h., $\forall\, x \in S\colon \forall\, a \in X\colon a \leq x \Rightarrow a \in S$. Ein Schnitt heißt **offen**, wenn er **kein größtes Element** besitzt. Auf einer in sich dichten Klasse X ist jedes Intervall $]-\infty;x[$ mit $x \in X$ ein offener Schnitt. Sind (X;$\leq$) und (Y;$\preccurlyeq$) zwei **linear** geordnete Klassen, so heißt die Funktion f: $X \to Y$ **monoton**, wenn $\forall$ x,y $\in$ X: $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \preccurlyeq f(y)$ und **streng monoton** wenn $x < y \Leftrightarrow f(x) \prec f(y)$. Eine **streng monotone** Funktion ist **injektiv** und ihre **Umkehrung** f^{-1}: $f[X] \to X$ ist wieder streng monoton. Ist die Funktion auch **surjektiv**, so heißen (X;$\leq$) und (Y;$\preccurlyeq$) **isoton** zueinander. Eine **streng montone** Funktion f: $X \to Y$ ist eine **Einbettung**, wenn das Bild f[X] **dicht** in Y liegt. Die Funktion $\bar{f}$: $X \to Y$ heißt **Fortsetzung** der Funktion f: $X_0 \to Y$, wenn $X_0 \subset A$ und $f \subset \bar{f}$. Umgekehrt heißt $f|X_0$ **Restriktion** von f auf X_0, wenn $A \subset X_0$ und $f|X_0 \subset f$.

Der folgenden Satz beschreibt im Wesentlichen die Vervollständigung der **rationalen Zahlen** zu den **reellen Zahlen** mit Hilfe der **Dedekind-Schnitte** und wird in Satz 13.3 wieder aufgegriffen.

10.4 Satz (Vervollständigung einer in sich dichten Ordnung): Jede in sich dichte geordnete Klasse ist isoton zu einer dichten Teilmenge einer vollständig geordneten Klasse.

Beweis: Sei (X;$\leq$) in sich dicht und (Y;$\subset$) die durch Inklusion geordnete Klasse der offenen Schnitte auf X. Aufgrund ihres Intervallcharakters sind die offenen Schnitte linear geordnet. Sie sind auch vollständig geordnet, denn für jede Familie von offenen Schnitten $A \subset Y$ mit der oberen Schranke $s \in Y$ ist wegen $a \subset s\ \forall\, a \in A$ auch ihre Vereinigung $\bigcup A \subset s \subsetneq Y$ ein offener Schnitt und außerdem kleinste obere Schranke bzw. Supremum von A. Da X in sich dicht ist, ist die Funktion f: $X \to Y$ mit $f(x) :=]-\infty;x[$ wohldefiniert und streng monoton. f[X] liegt dicht in Y, denn für zwei offene Schnite $A \subsetneq B$ existiert ein $x \in B\backslash A$ und es folgt $A \subsetneq\ ]-\infty;x[\ \subsetneq B$.

Der nächste Satz beschreibt die hauptsächliche Motivation für die Vervollständigung einer Menge. Er deutet außerdem durch die Vorwegnahme des bekannten Satzes über die **Fortsetzung stetiger Funktionen** die Erweiterung des Ordnungsbegriffes auf die Begriffe **Metrik** und **Topologie** an.

10.5 Satz (Eindeutige Fortsetzung einer monotonen Funktion): Seien (X;$\leq$) eine linear geordnete und (Y;$\preccurlyeq$) eine vollständig geordnete Klasse. $X_0 \subset X$ sei eine dichte Teilmenge von X. Dann hat die Einbettung f: $X_0 \to Y$ genau dann eine eindeutig bestimmte, streng monotone Fortsetzung $\bar{f}$: $X \to Y$, wenn für jede beschränkte Teilmenge $A \subset X_0$ auch ihr Bild f[A] beschränkt ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei $\bar{f}$ die Fortsetzung von f und $A \subset X_0$ mit der oberen Schranke $a \in X$. Wegen der strengen Monotonie von $\bar{f}$ und $f \subset \bar{f}$ ist dann $\bar{f}$ (a) eine obere Schranke von f[A]. $\Leftarrow$: Sei $x \in X$ gegeben. Existiert ein $y \in S_x := X_0 \cap\ ]-\infty;x[$, so ist $X_0 \cap\ ]y;x[\ \neq \emptyset$ beschränkt und es existiert $\bar{f}(x) := \sup f[S_x] = \sup f[X_0 \cap]y;x[]$. Existiert kein $y \in S_x$, so ist x das Infimum von X_0 und es existiert dann ein $y \in X_0 \cap [x;\infty[$. Wegen der Beschränktheit von $X_0 \cap [x;y]$ existiert $\bar{f}(x) := \inf f[X_0] = \inf f[X_0 \cap [x;y]]$. f ist eine Fortsetzung von $\bar{f}$, denn für $x \in X_0$ und wegen X_0 dicht in X gilt im ersten Fall ist $x = \sup S_x$ und wegen der strengen Monotonie von f folgt $f(x) = f(\sup S_x) = \sup f[S_x] = \bar{f}(x)$. Im zweiten Fall ist $x = \inf X_0$ und wieder aufgrund der strengen Monotonie folgt $f(x) = f(\inf X_0) = \inf f[X_0] = \bar{f}(x)$. $\bar{f}$ ist streng monoton, denn für $x < y$ und $S_x \neq \emptyset$ folgt wegen $X_0 \cap\ ]x;y[\ \neq \emptyset$ auch $S_x \subsetneq S_y \neq \emptyset$ und daher $\bar{f}(x) = \sup f[S_x] < \sup f[S_y] = \bar{f}(y)$. Für $x < y$ mit $S_x = \emptyset$ ist aus dem gleichen Grund $S_y \cap X_0 \neq \emptyset$ und $\bar{f}(x) = \inf f[X_0] < \sup f[S_y] = \bar{f}(y)$. Seien und $\hat{f}$ und $\bar{f}$ zwei streng monotone

Fortsetzungen von f mit $\overline{f}(x) < \hat{f}(x)$ für ein $x \in X$. Da $f[X_0]$ dicht in Y liegt, gibt es dann ein $y \in X_0$ mit $\overline{f}(x) < f(y) < \hat{f}(x)$. Da $(X;\leq)$ linear geordnet ist, gilt dann $x < y$ oder $y < x$ und wegen $f(y) = \overline{f}(y) = \hat{f}(y)$ steht dies im Widerspruch zur geforderten strengen Monotonie einer der beiden Fortsetzungen.

Die beiden folgenden Sätze werden für die Entwicklung der **Kardinalzahlen** im Abschnitt 15 benötigt:

10.6 Satz: Seien $(X;\leq)$ und $(Y;\preccurlyeq)$ zwei wohlgeordnete Klassen und $A \subset X$ ein Schnitt auf X. Seien f und $\overline{f}$ zwei verschiedene streng monotone Funktionen auf X, deren Bilder $f[A]$ und $\overline{f}[A]$ Schnitte auf Y sind. Dann gilt $f \subset \overline{f}$ oder umgekehrt.

Beweis: und $x_1 \in A$ das kleinste Element der Menge $\{x \in X\colon f(x) \neq \overline{f}(x)\}$. Da $(Y;\preccurlyeq)$ linear geordnet ist, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $f(x_1) \prec \overline{f}(x_1) \in \overline{f}[A]$ und da $\overline{f}[A]$ ein Schnitt ist, ist auch $f(x_1) \in \overline{f}[A]$. Wegen der strengen Montonie folgt $x_2 := \overline{f}^{-1}(f(x_1)) < \overline{f}^{-1}\left(\overline{f}(x_1)\right) = x_1$ und daher nach Annahme $f(x_2) = \overline{f}(x_2) = f(x_1)$ im Widerspruch zu $x_2 < x_1$.

10.7 Satz: Seien $(X;\leq)$ und $(Y;\preccurlyeq)$ zwei wohlgeordnete Klassen. Dann ist X isoton zu Y oder einem Schnitt in Y oder umgekehrt. Der zweite Fall tritt immer ein, wenn Y keine Menge ist.

Beweis: Die Menge $f := \{(u;g(u))\colon u \in A$ für ein streng monotones g, das den Schnitt $A \subset X$ auf einen Schnitt $g[A] \subset Y$ abbildet$\}$ ist nach Satz 10.6. selbst eine streng monotone Funktion. Angenommen $D_f \subsetneq X$ und $f[D_f] \subsetneq Y$. Dann gibt es die kleinsten Elemente x_1 von $X\backslash D_f$ und y_1 von $Y\backslash f[D_f]$ und nach der Definition von f gilt $f\colon [x_0;x_1[\ \to [y_0;y_1[$. Dann ist $\overline{f} := f \cup (x_1;y_1)\colon [x_0;x_1] \to [y_0;y_1]$ wieder streng monoton im Widerspruch zur Definition von f bzw. x_1. Also muss $D_f = X$ oder $f[D_f] = Y$ gelten. Ist Y keine Menge, so ist wegen des Ersetzungsaxiom V der zweite Fall ausgeschlossen.

11 Ordinalzahlen

In diesem Abschnitt werden abzählbare und wohlgeordnete Mengen konstruiert, die später auf die natürlichen Zahlen führen. Wie in Abschnitt 7 schon erwähnt, kann die Existenz irgendwelcher Mengen bisher und auch später nicht bewiesen werden. Falls es Mengen gibt, fordern wir aber dieser Stelle ein Mindestmaß an Ordnung und Hierarchie in ihrer Struktur, um die angekündigte Konstruktion durchführen zu können:

VII Fundierungsaxiom: Jede nichtleere Klasse x besitzt ein Element, dessen Elemente nicht in x liegen.

11.1 Satz: $x \notin x$.

Beweis: Wende das Fundierungsaxiom VII auf das Atom $\{x\}$ an.

11.2 Satz: Es gibt keine zwei Klassen x und y mit $x \in y$ und $y \in x$.

Beweis: Wende das Fundierungsaxiom VII auf das ungeordnete Paar $\{x;y\}$ an.

Aus dem Fundierungsaxiom läßt sich außerdem schließen, dass **es keine unendlich kleinen Mengen gibt**: Jede Kette der Gestalt $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni ...$ hat einen Abschluss x_n. Zum Beweis wendet man das Fundierungsaxiom VII auf die Folge $\{x_0;x_1;x_2; ...\}$ an. Dazu muss dieses Folge bzw. die entsprechende Funktion auf den natürlichen Zahlen aber erst sauber definiert werden. Dies geschieht mit Hilfe des Begriffes der Ordinalzahlen:

11.3 Definitionen: Eine Klasse x heißt **Ordinalzahl**, wenn sie durch die **Inklusion** $\subset$ linear geordnet wird und außerdem jedes Element von x auch Teilmenge von x ist. Die **Klasse der Ordinalzahlen** wird mit ω bezeichnet. Um einen Widerspruch mit dem Fundierungsaxiom VII zu vermeiden, muss jede Ordinalzahl die **leere Menge** enthalten. Da sich die lineare Ordnung auf beliebige Teilmengen überträgt und jedes Element eines Elementes von x selbst wieder zu x gehört, ist jedes Element einer Ordinalzahl selbst wieder Ordinalzahl. Eine Teilmenge einer Ordinalzahl x ist dagegen nur dann auch Element von x, wenn sie außerdem selber Ordinalzahl ist. Die einfachsten Ordinalzahlen sind $\mathbf{0} := \emptyset$, $\mathbf{1} := 0 \cup \{0\} = \{0\}$, $\mathbf{2} := 1 \cup \{1\} = \{0,1\}$, usw.. Für jede Ordinalzahl x ist $x + 1 := x \cup \{x\}$ wieder eine Ordinalzahl, denn jedes Element von $x + 1$ ist entweder schon Element von x oder x selber und

$x + 1$ ist offensichtlich wieder linear geordnet mit kleinstem Element $\emptyset$ und größtem Element x. Es gibt keine Ordinalzahl zwischen x und $x + 1$, denn jedes Element einer solchen Ordinalzahl müsste entweder in x liegen oder gleich x selber sein. x heißt daher der **Vorgänger** von $x + 1$ und $x + 1$ ist der **Nachfolger** von x.

11.4 Satz: Jede Ordinalzahl $x \in \omega$ läßt sich als Intervall $x = [\emptyset;x[\subset \omega$ schreiben.

Beweis: $x \subset [\emptyset;x[$, denn jedes Element einer Ordinalzahl x ist selbst Ordinalzahl und außerdem echte Teilmenge von x. Umgekehrt gilt $[\emptyset;x[\subset x$, denn aus $y \subsetneq x$ folgt nach den in 11.3 bemerkten Eigenschaften $y \cup \{y\} \subset x$ und damit $y \in x$.

11.5 Satz: Für zwei Ordinalzahlen x und y ist der **Schnitt** $x \cap y$ wieder eine Ordinalzahl.

Beweis: Wegen $x \cap y \subset x$ ist der Schnitt durch Inklusion linear geordnet und jedes Element von $x \cap y$ ist Teilmenge sowohl von x als auch von y und damit auch von $x \cap y$.

Der folgende Satz beschreibt die Auflösung der **Burali-Forti-Antinomie 3.2** im NBG-System:

11.6 Satz: ω ist eine Ordinalzahl**,** aber keine Menge.

Beweis: Für x, y $\in\omega$ gilt wegen Satz 11.4 und Satz 11.5 entweder $x \cap y \in x = [\emptyset; x[$ oder $x \cap y = x$. Im ersten Fall folgt $x \cap y \notin y = [\emptyset;y[$, weil sonst $x \cap y \in x \cap y$ und damit $x \cap y = y$, also $y \subset x$. Im zweiten Fall folgt direkt $x \subset y$. Die Klasse ω wird also durch Inklusion linear geordnet und wegen Satz 11.4 ist jedes ihrer Elemente auch Teilmenge von ω**.** ω ist ebenfalls eine Ordinalzahl**,** aber keine Menge, da sonst $\omega \in \omega$ gelten würde.

11.7 Satz: Für jede **Teilmenge** $x \subset \omega$ ist die **Vereinigung** $\bigcup x$ ihrer Elemente die kleinste Ordinalzahl, die alle Elemente von x als Teilmengen enthält. Ist x selbst eine Ordinalzahl, so gilt $\bigcup x = x$.

Beweis: Jedes Element aus $\bigcup x$ ist ein Element einer Ordinalzahl aus x und daher einerseits selbst wieder Ordinalzahl und andererseits Teilmenge dieser Ordinalzahl und damit auch von $\bigcup x$. Daraus folgt einerseits $\bigcup x \subset \omega$ und andererseits $\bigcup x \in \omega$. Da jedes Element von x eine Ordinalzahl ist und in der Ordinalzahl $\bigcup x$ als Teilmenge enthalten ist, gilt $x \subset \bigcup x$. Jede Ordinalzahl y, die alle Elemente von x als Teilmengen enthält, muss diese auch als Elemente enthalten und damit auch alle Elemente dieser Elemente, also $\bigcup x \subset y$. Ist x selbst eine Ordinalzahl, so ist jedes Element eines Elementes aus x wieder Element aus x und damit $\bigcup x \subset x$.

11.8 Satz: Für jede Teilmenge $x \subset \omega$ ist der **Durchschnitt** $\bigcap x$ ihrer Elemente ebenfalls eine Ordinalzahl und gleich dem **kleinsten** Element der Klasse x. Ist x selbst eine Ordinalzahl, so gilt $x = [\emptyset;x[$ und daher $\bigcap x = \emptyset$. Die Klasse ω und jedes ihrer Elemente sind also sogar **wohlgeordnet** durch die Inklusion.

Wichtigste Hilfsmittel bei der Verwendung von Ordinalzahlen sind die **rekursive Definition** von Funktionen und das Beweisprinzip der **transfiniten Induktion**. Zunächst wird gezeigt, dass die rekursive Definition der Funktion f: $x \to A$ auf einer Ordinalzahl x mittels der Rekursionsregel g **eindeutig** ist. Die **Rekursionsregel** g: $D_g \to A$ gibt an, wie man von den Funktionswerten der **Elemente** einer Ordinalzahl $u \in x$ auf den Funktionswert f(u) für u selber gelangt. Wegen $u = [\emptyset;u[$ wird dabei von den Funktionswerten f|u **aller** vorangehenden Ordinalzahlen $v \subset u$ auf u selber geschlossen: $f(u) = g(f|u)$. Die ersten Funktionswerte sind also $f(\emptyset) = g(f|\emptyset) = g(\emptyset)$, $f(1) = g(f|1) = g((\emptyset;f(\emptyset)))$, $f(2) = g(f|2) = g(\{(\emptyset;f(\emptyset))\}\cup\{(1;f(1)\})$, usw. Sobald ein $u \in x$ erreicht wird mit $f|u \notin D_g$, folgt $f(u) = U$ und wegen $(u;f(u)) = (u;U) = U \notin D_g$ gilt dies dann auch für alle folgenden Ordinalzahlen $v \supset u$. Entsprechend ist dann der Definitionsbereich von f eingeschränkt auf $D_f = [\emptyset;u[$. Erst mit $D_g = \bigcup_{u\in x} A^u$ erreicht man $D_f = [\emptyset;x[$. Dabei kann sich der Informationsgehalt der Rekursionsregel durchaus auf wenige der vorangegangenen Funktionswerte beschränken. Unter Verwendung der im nächsten Abschnitt axiomatisch begründeten **natürlichen Zahlen** $x = \mathbb{N} \in \omega$ (Satz 12.3) kann man z.B. die **Fibonacci-Folge** f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beschreiben durch die Rekursionsregel g: $\bigcup_{u\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^u \to \mathbb{N}$ mit $g(0) = g(1) = 1$ und $g(f|u{+}2) = f(u) + f(u + 1)$. Die Rekursionsregel nimmt also nur auf die **letzten beiden Funktionswerte** Bezug. Die Rekursionsregel h: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $h((a;b)) = a + b$ dagegen produziert $f(x) = U \ \forall \ x \in \omega$, da sie wegen $\emptyset \notin \mathbb{N}^2$ keinen **Startwert** liefert. Auch eine zusätzliche Angabe eines oder mehrerer Startwerte ändert daran nichts, da h keine Informationen über die **Auswahl** der beiden zu addierenden Werte a und b enthält. Zur Vereinfachung wird in den beiden folgenden Sätzen über Eindeutigkeit und Existenz der rekursiv definierten Funktion f kein Bezug auf Definitions- und Wertebereiche der Rekursionsregel g genommen. Der Fall $g(f|u) = f(u) = U$ für $f|u \notin D_g$ bei zu kleinem D_g bzw. unzureichend definierten Rekursionsregeln wird damit stillschweigend in Kauf genommen.

11.9 Satz: Seien x und y zwei Ordinalzahlen mit $x \in y$ und $f: x \to A$ sowie $h: y \to A$ zwei Funktionen. Existiert eine gemeinsame Rekursionsregel g mit $f(u) = g(f|u)$ für alle $u \in x$ und $h(u) = g(h|u)$ für alle $u \in y$, so stimmen g und h auf x überein.

Beweis: Angenommen, $u \in x$ ist das kleinste Element mit $f(u) \neq h(u)$, dann stimmen f und h auf der **Menge** $u = [\emptyset;u[$ überein und daraus folgt $f(u) = g(f|u) = g(h|u) = h(u)$ im Widerspruch zur Annahme.

11.10 Satz (Transfinite Rekursion): Für jede Rekursionsregel g existiert eine eindeutig bestimmte Funktion f mit $f(x) = g(f|x)$ für jede Ordinalzahl x und $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$.

Beweis: Die Menge $f := \{(u;h(u))\colon u \in D_h$ mit $h(v) = g(h|v)$ für alle $v \in D_h$ und $D_h \in \omega$ oder $D_h = \omega\}$ ist nach Satz 11.9 selbst eine Funktion mit $f(v) = g(f|v)$ für alle $v \in D_f$ und $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$. f ist auch eindeutig bestimmt, denn nach Definition von f ist jede weitere Funktion mit den gewünschten Eigenschaften schon in f enthalten. Im Fall $D_f = \omega$ ist der Satz schon bewiesen. Falls $D_f \in \omega$ sei $x \in \omega \setminus D_f$ und mit 9.1 folgt $f(x) = U$. Im Fall $f \notin D_g$ folgt aus dem gleichen Grund $U = g(f) = g(f|x) = f(x)$ und die Behauptung ist auch für diesen Fall bewiesen. Sei schließlich $f \in D_g$ und $h := f \cup \{(D_f;g(f))\}$. Die Menge D_f ist das kleinste Element von $\omega \setminus D_f$. Nach Satz 9.5 ist damit auch f eine Menge und ebenso g(f). Damit folgt $h(v) = g(h|v)$ für alle $v \in D_h = D_f + 1$. Offensichtlich ist $h \subset f$ und daher $\{(D_f, g(f))\} \subset f$. Wegen $D_f \notin D_f$ ergibt dies einen Widerspruch, womit dieser letzte Fall ausgeschlossen ist.

11.11 Satz (Transfinite Induktion): $x \subset \omega \wedge \forall\, u,y \in \omega\colon ((u \in y \Rightarrow u \in x) \Rightarrow y \in x) \Rightarrow x = \omega$.

Eine Aussage gilt für alle Ordinalzahlen, wenn man zeigen kann, dass für jede Ordinalzahl y aus der Gültigkeit der Aussage für jedes ihrer Elemente ($y \subset x$) schon die Gültigkeit der Aussage für y selber ($y \in x$) folgt.

Beweis: Sei y die kleinste Ordinalzahl aus $\omega \setminus x$. Dann gilt $u \in x$ für alle $u \in y$ und damit nach Voraussetzung $y \in x$ im Widerspruch zur Annahme.

Der bei der finiten Induktion (Satz 12.2) explizit geforderte **Induktionsstart** ist bei der transfiniten Induktion im Fall $y = \emptyset \in x$ enthalten, denn wegen $\emptyset \subset x$ folgt $\emptyset \in x$ schon aus der Voraussetzung.

12 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen werden als Klasse der **endlichen** Ordinalzahlen definiert. Damit präzisiert man den Bergiff der natürlichen Zahlen auch im alltäglichen Gebrauch: Z.B. gewinnt man die Erkenntnis, dass $0 = \emptyset$ eine natürliche Zahl ist und dass es sich bei der natürlichen Zahl 2 um eine **Menge** handelt, welche die beiden Elemente 0 und 1 enthält. Satz 12.2 liefert die Axiome, die **Giuseppe Peano** im Jahr 1889 zur vollständigen Beschreibung der natürlichen Zahlen aufstellte. Zur Erweiterung der natürlichen Zahlen auf die rationalen und reellen Zahlen benötigt man zusätzlich die **Mengeneigenschaft** der natürlichen Zahlen (Satz 12.3). Diese lässt sich erst mit Hilfe des **Unendlichkeitsaxioms VIII** beweisen.

12.1 Definition: Eine Ordinalzahl heißt **endlich**, wenn **jede ihrer Teilmengen** ein **größtes Element** besitzt. Die endlichen Ordinalzahlen werden als Klasse $\mathbb{N}$ der **natürliche Zahlen** bezeichnet. Da die Eigenschaft des größten Elementes auch für Teilmengen gilt, ist jedes Element einer natürlichen Zahl wieder eine natürliche Zahl. Für das größte Element y einer natürlichen Zahl $x = [\emptyset;x[$ gilt einerseits $y \subsetneq x$ und andererseits $x \subset y + 1$. Daraus folgt $y + 1 = x$ und $x - 1 := y$ ist der **Vorgänger** von x. In Abschnitt 15 wird gezeigt, dass unendliche Ordinalzahlen demgegenüber zwar einen Nachfolger, aber keinen Vorgänger besitzen.

12.2 Satz: (Peanos Axiome der natürlichen Zahlen)

1. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$.
2. $0 \in \mathbb{N}$ und $\forall\, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \neq 0$.
3. $x, y \in \mathbb{N}\ \forall\ x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$.
4. **(Finite Rekursion):** Für jede **Rekursionsregel** g: $A \to A$ und **Startwert** $f_0 \in A$ gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion f: $\mathbb{N} \to A$ mit $f(0) = f_0$ und $f(x + 1) = g(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
5. **(Finite Induktion):** $0 \in x \subset \mathbb{N}$ (**Induktionsstart**) $\wedge\ \forall\ y \in x$: $(y \in x \Rightarrow y + 1 \in x)$ (**Induktionsschritt**) $\Rightarrow x = \mathbb{N}$.

Beweis:

1. Die 2^x Teilmengen von $x \in \mathbb{N} \subset \omega$ werden zu 2^{x+1} Teilmengen von $x + 1 \in \omega$ ergänzt, indem man zu jeder Teilmenge $y \subset x$ die um das Element x erweiterte Teilmenge $y \cup \{x\}$ hinzufügt. Die neuen Teilmengen haben alle das maximale Element x und es folgt $x + 1 \in \mathbb{N}$.
2. $\emptyset \in \mathbb{N}$ ist offensichtlich und $x + 1 = x \cup \{x\} \neq \emptyset$, weil $\{x\} \neq \emptyset$ für alle x.
3. Folgt aus 11.3, denn $\bigcup(x + 1) = x$ für alle $x \in \omega$.
4. Wende Satz 11.10 an mit der Rekursionsregel g': $A \cup \{\emptyset\} \to A$ mit $g'(0) := f_0$ und $g'(f|x) := g(f(x - 1))$. Man erhält die eindeutig bestimmte Funktion f: $\mathbb{N} \to A$ mit $f(0) = g'(f|0) = g'(0) = f_0$ und $f(x) = g(f(x - 1))$ für alle $x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Aus 12.2.1 folgt $f(x + 1) = g(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
5. Sei u das kleinste Element aus $\mathbb{N}\backslash x$. Nach Voraussetzung gilt $0 \in x$ und daher $u \geq 0 + 1 = 1$. Nach Annahme gilt $u - 1 \in x$. Nach Voraussetzung folgt dann aber $u = y + 1 \in x$ im Widerspruch zur Annahme.

VIII Unendlichkeitsaxiom: Es gibt eine Menge x mit $\emptyset \in x$ und $\forall\ y \in x$ gilt $y \cup \{y\} \in x$.

Erst mit dem Unendlichkeitsaxiom werden alle bisherigen Aussagen mit Inhalt gefüllt. Insbesondere folgt aus dem Unendlichkeitsaxiom, dass es überhaupt Mengen gibt, dass $\emptyset$ eine Menge ist und damit $\emptyset \neq U$ gilt.

12.3 Satz: $\mathbb{N} \in \omega$.

Beweis: Nach 12.1 gilt $\mathbb{N} \subset \omega$. $\mathbb{N}$ wird also durch Inklusion linear geordnet und wieder nach 12.1 ist jedes Element einer natürlichen Zahl wieder eine natürliche Zahl. Nach 11.3 ist $\mathbb{N}$ also eine Ordinalzahl. Es bleibt nur zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ eine Menge ist. Nach dem Unendlichkeitsaxiom VIII gibt es eine Menge x mit $0 \in x$ und $y \in x \Rightarrow y + 1 \in x$. Nach 12.2.1 und 12.2.2 gilt aber auch $0 \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N} \Rightarrow y + 1 \in \mathbb{N}$. Also folgt $0 \in x \cap \mathbb{N}$ und $y \in x \cap \mathbb{N} \Rightarrow y + 1 \in x \cap \mathbb{N}$. Mit finiter Induktion 12.2.5 folgt $x \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \Leftrightarrow \mathbb{N} \subset x$. Nach 6.11 ist $\mathbb{N}$ also eine Menge.

12.4 Satz: (Rechenoperationen für natürliche Zahlen) Für jedes $x \in \mathbb{N}$ existieren die eindeutig bestimmten Funktionen

1. **Addition von x:** $x + : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x + 0 = x$ und $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.
2. **Multiplikation mit x:** $x \cdot : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x \cdot 0 = 0$ und $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$.
3. **Potenzierung von x:** $x^{\square} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x^0 = 1$ und $x^{y+1} = x^y \cdot x$.

Da die obigen Funktionen für jedes $x \in \mathbb{N}$ **eindeutig bestimmt** sind, erhält man damit die bekannten **zweistelligen Operatoren** Summe: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit Summe(x;y) := x + y, Produkt: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit Produkt(x;y) := $x \cdot y$ und Potenz: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit Potenz(x;y) := x^y .

Beweis: Durch **finite Rekursion** 12.2.4 mit

1. $f(0) := x$ und $f(y + 1) = g(f(y)) := f(y) + 1$
2. $f(0) := 0$ und $f(y + 1) = g(f(y)) := f(y) + x$ mit 12.4.2
3. $f(0) := 1$ und $f(y + 1) = g(f(y)) := f(y) \cdot x$ mit 12.4.3.

12.5 Satz: (Rechenregeln für natürliche Zahlen) Für $x,y,z \in \mathbb{N}$ gilt

1. **Kommutativgesetze**: $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$
2. **Assoziativgesetze**: $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
3. **Distributivgesetz**: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
4. **Potenzgesetze**: $x^{y+z} = x^y \cdot y^z$, $(x \cdot y)^z = x^z \cdot y^z$ und $x^{y \cdot z} = (x^y)^z$
5. **Äquivalenzumformungen**: $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z$ und $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

Beweis: Durch wiederholte Anwendung der **finite Induktion** 12.2.5 auf alle auftretenden Variablen. Der Übersicht halber wird nur der erste Beweis angegeben:

Kommutativgesetz für die Addition: Durch eine **erste** finite Induktion über $x \in \mathbb{N}$ erhält man den **Induktionsstart** $x + 0 = 0 + x$ für alle $x \in \mathbb{N}$: Zunächst gilt nämlich $0 + x = x$, denn $0 + 0 = 0$ und aus $0 + x = x$ folgt $0 + (x + 1) = (0 + x) + 1 = x + 1$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Durch eine **zweite** finite Induktion über $x \in \mathbb{N}$ ergibt sich $y + (x + 1) = (y + 1) + x$, denn $y + (0 + 1) = (y + 0) + 1 = y + 1 = y + 1 + 0$ und aus $y + (x + 1) = (y + 1) + x$ folgt $y + ((x + 1) + 1) = (y + (x + 1)) + 1 = ((y + 1) + x) + 1 = (y + 1) + (x + 1)$. Damit erhält man den **Induktionsschritt**, denn aus $x + y = y + x$ folgt $x + (y + 1) = (x + y) + 1 = (y + x) + 1 = y + (x + 1) = (y + 1) + x$ für alle $x,y \in \mathbb{N}$. Durch eine **dritte** finite Induktion über $y \in \mathbb{N}$ erhält man die Behauptung.

13 Erweiterung der natürlichen Zahlen

Die Erweiterungen der natürlichen Zahlen auf die ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen sind algebraisch bzw. bei den reellen Zahlen topologisch motiviert und werden hier nur kurz dargestellt.

13.1 Definitionen: Der geordnete Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen entsteht aus der **Äquivalenzrelation** $r := \{((x;y);(x';y')) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) : x + y' = x' + y\}$ als **Quotientenmenge** $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/r$. Eine ganze Zahl wird damit als **Differenz zweier natürlicher Zahlen** betrachtet. Für die Äquivalenzklassen $x - y := r(x;y) \in \mathbb{Z}$ definiert man

1. **Addition**: $(x - y) + (z - u) := (x + z) - (y + u)$
2. **Multiplikation**: $(x - y) \cdot (z - u) := (x \cdot z + y \cdot u) - (x \cdot u + y \cdot z)$
3. **Ordnung**: $(x - y) \leq (z - u) :\Leftrightarrow x + u \subset z + y$.

Mit Hilfe dieser Definitionen können die Rechenregeln 12.5 aus den natürlichen Zahlen in die ganzen Zahlen übertragen werden, wobei man sich bei den Potenzen jetzt noch auf **natürliche Exponenten** beschränkt und die Wohlordnung auf eine **lineare Ordnung** reduziert wird. Die natürlichen Zahlen selbst werden mit der Funktion $i: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $i(x) := x - 0$ **isoton** und **isomorph** in die ganzen Zahlen abgebildet, denn mit $x \subset y \Leftrightarrow i(x) \leq i(y)$ wird die Ordnung erhalten und mit $i(x + y) = i(x) + i(y)$ bzw. $i(x \cdot y) = i(x) \cdot i(y)$ werden auch die Rechenoperationen übertragen.

13.2 Definitionen: Der geordnete Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen entsteht analog zu 13.1 aus der **Äquivalenzrelation** $s := \{((x;y);(x';y')) \in (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)\times(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*) : x \cdot y' = x' \cdot y\}$ als **Quotientenmenge** $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/s$, wobei $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Eine rationale Zahl wird damit als **Quotient zweier ganzer Zahlen** betrachtet. Für die Äquivalenzklassen $\frac{x}{y} := s(x;y) \in \mathbb{Q}$ definiert man

1. **Addition**: $\frac{x}{y} + \frac{z}{u} := \frac{x \cdot u + z \cdot y}{y \cdot u}$
2. **Multiplikation**: $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{u} := \frac{x \cdot z}{y \cdot u}$
3. **Ordnung**: $\frac{x}{y} \leq \frac{z}{u} :\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot u \leq z \cdot y & \text{, falls } y \cdot u > 0 \\ x \cdot u \geq z \cdot y & \text{, falls } y \cdot u < 0 \end{cases}$

Mit Hilfe dieser Definitionen können die Rechenregeln 13.1 aus den ganzen Zahlen in die rationalen Zahlen übertragen werden, wobei man sich bei den Potenzen jetzt noch auf **ganze Exponenten** beschränkt. Die ganzen Zahlen selbst werden mit der Funktion j: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ mit $j(x) := \frac{x}{1}$ wieder **isoton** und **isomorph** in die rationalen Zahlen abgebildet.

13.3 Definitionen: Der vollständig geordnete Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird nach **Richard Dedekind 1872** gemäß Satz 10.4 definiert als die Menge aller **offenen Schnitte** in $\mathbb{Q}$: $\mathbb{R} := \{x \in 2^{\mathbb{Q}}: \emptyset \neq x \subsetneq \mathbb{Q} \wedge \forall\, s \in x: \forall\, a \in \mathbb{Q}: a \leq s \Rightarrow a \in x \wedge \exists\, b \in x \text{ mit } b > s\}$. Für diese nach oben offenen Intervalle $x,y \in \mathbb{R}$ definiert man:

1. **Addition**: $x + y := \{a + b: a \in x \wedge b \in y\}$
2. **Multiplikation**: $x \cdot y := \left\{a \cdot b: \begin{cases} a \in x \wedge b \in y \backslash]-\infty;0] & \text{, falls }]-\infty:0] \subset x \wedge]-\infty:0] \subset y \\ a \in x \wedge b \in \mathbb{R} \setminus y & \text{, falls } x \subset]-\infty:0] \wedge]-\infty:0] \subset y \\ a \in \mathbb{R}\backslash x \wedge b \in y & \text{, falls }]-\infty:0] \subset x \wedge y \subset]-\infty:0] \\ a \in x \wedge b \in y & \text{, falls } x \subset]-\infty:0] \wedge y \subset]-\infty:0] \end{cases}\right\}$
3. **Ordnung**: $x \leq y :\Leftrightarrow x \subset y$.

Die langwierigen Fallunterscheidungen bei der Multiplikation erspart man sich, wenn man die reellen Zahlen nach **Georg Cantor 1872** als Grenzwerte von **Cauchy-Folgen** rationaler Zahlen definiert. Da diese Grenzwerte a priori nicht bekannt sind, muss man sich aber zunächst klar machen, unter welchen Bedingungen zwei Cauchy-Folgen einen gemeinsamen Grenzwert haben und wie man diese Cauchy-Folgen ordnet und verknüpft. Dieser Zugang ist ein Spezialfall der **(topologischen) Vervollständigung metrischer Räume** und wird daher in der **Topologie** näher dargestellt. Mit Hilfe der obigen Definitionen können die bekannten Rechenregeln 13.1 aus den rationalen Zahlen in die reellen Zahlen übertragen werden. Die rationalen Zahlen selbst werden mit der Funktion k: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $k(x) :=]-\infty;x[$ wieder **isoton** und **isomorph** in die reellen Zahlen abgebildet. Die reellen Zahlen sind **vollständig geordnet** und das Bild $k[\mathbb{Q}]$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$.

13.4 Definitionen: Die **imaginäre Zahl** i mit $i^2 = -1$ wird seit **Rafael Bombelli 1569** verwendet, um die rationalen oder reellen Zahlen zu einem **algebraisch abgeschlossenen Körper** zu erweitern. Im Fall der reellen Zahlen erhält man den Körper $\mathbb{C}$ **der komplexen Zahlen.** In Anlehnung an die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen sowie die **Restklassenringe** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kann man $\mathbb{C}$ als **Quotientenring** $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ des **Polynomringes** $\mathbb{R}[x]$ über die Äquivalenzrelation $(x^2+1) := \{(u;v) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]: \exists\, f \in \mathbb{R}[x] \text{ mit } u - v = f \cdot (x^2+1)\}$ betrachten. Die Elemente dieses Quotientenringes haben die Gestalt von Äquivalenzklassen $\overline{u} := \{u + f \cdot (x^2+1): \exists\, f \in \mathbb{R}[x]\}$ mit $u \in \mathbb{R}[x]$. Wenn man das Polynom $u \in \mathbb{R}[x]$ durch $x^2 + 1$ teilt, bleibt nur ein linearer Rest der Gestalt $a + bx$ mit reellen Zahlen a und b. Die Elemente von $\mathbb{C}$ lassen sich also darstellen in der Form $a \cdot \overline{1} + b \cdot \overline{x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die zweite Komponente entpricht den **imaginären Zahlen**, denn wegen $x \cdot x = x^2 + 1 - 1$ folgt $\overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{-1}$. Damit ergibt sich die übliche Darstellung in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und der **imaginären Einheit** $i^2 = -1$. Jetzt erhält man die Multiplikationsregel $(a + ib)(c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$ direkt durch Anwendung des Distributivgesetzes und aus der Bedingung $(c + id)(a + ib) = 1$ die Inverse $(a + ib)^{-1} = (c + id) = \frac{1}{a^2+b^2}(a - ib)$. Nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** sind die komplexen Zahlen **algebraisch abgeschlossen:** Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle. Mittels **Polynomdivision** lässt sich ein Polynom vom Grad n daher in n **Linearfaktoren** zerlegen und besitzt damit sogar n Nullstellen.

Eine einfachere Konstruktion ergibt sich, wenn man $\mathbb{C}$ als **Untervektorraum** von **Matrizen** der Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ betrachtet. Dann ergeben sich die **Multiplikationsregel** direkt aus der Definition der Matrizenmultiplikation und die **Inversen** berechnen sich aus der Bedingung $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c & d \\ c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ c & c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ bzw. $(a;b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Die wichtigsten Eigenschaften der komplexen Zahlen erschließen sich aber erst in der **komplexen Analysis** und werden dort beschrieben. Dem Gewinn einer Vielzahl von angenehmen Eigenschaften steht allerdings auch ein manchmal nicht unbedeutender Verlust gegenüber: die komplexen Zahlen sind **nicht mehr linear geordnet.**

14 Das Auswahlaxiom

Das Auswahlaxiom ist unabhängig von den übrigen Axiomen und wird im Gegensatz zu diesen als direkte Voraussetzung wichtiger Sätze der Topologie, Algebra und Analysis benötigt. Aufgrund der Vielfalt der Anwendungen existieren verschiedene Formulierungen des Auswahlaxioms, deren Gleichwertigkeit nicht ohne weiteres offensichtlich ist. Die wichtigsten werden in diesesm Abschnitt dargestellt und ihre Gleichwertigkeit mit dem Auswahlaxiom bewiesen.

14.1 Definitionen: Eine Menge heißt **endlich**, wenn sie sich bijektiv auf eine natürliche Zahl abbilden lässt. Eine Klasse x hat **finiten Charakter**, falls sie **genau** diejenigen Elemente enthält, deren **endliche Teilmengen auch wieder Elemente** von x sind. Die Maximaleigenschaft bezieht sich in 2. und 3. auf die **Inklusion** und in 4. auf die gegebene Ordnung.

14.2 Satz: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. **IX Auswahlaxiom**: Es gibt eine Auswahlfunktion c mit $c(x) \in x$ für jede Menge $x \neq \emptyset$.
2. **Maximalprinzip von Hausdorff:** Jede Menge enthält eine maximale linear geordnete Teilmenge.
3. **Lemma von Tukey:** Jede nicht leere Menge mit finitem Charakter hat ein maximales Element.
4. **Lemma von Zorn:** Eine geordnete Menge hat ein maximales Element, wenn jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt.
5. **Wohlordnungssatz von Zermelo:** Jede nicht leere Menge besitzt eine Wohlordnung.

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$: Wir konstruieren mittels **transfiniter Rekursion** eine bezüglich Inklusion aufsteigende Folge linear geordneter Teilmengen über der Indexmenge ω. Da die Menge aller Teilmengen im Gegensatz zu ω eine Menge ist, muss diese Folge bei einer Ordinalzahl $\in \omega$ enden und die entsprechende linear geordnete Teilmenge ist dann das gesuchte maximale Element: Für eine Menge x sei $L \subset 2^x$ die Menge der bezüglich Inklusion linear geordneten Teilmengen von x und für jede Funktion h: $\omega \to L$ sei L_h die Menge der Elemente aus L, die jeden Funktionswert von h als echte Teilmenge enthalten. Die Funktion f: $D_f \to L$ mit $D_f \in \omega$ oder $D_f = \omega$ wird nun über transfinite Rekursion 11.10 mittels der Rekursionsregel $g(h) := c(L_h)$ definiert, wobei c die nach Voraussetzung existierende Auswahlfunktion ist. Für jede Ordinalzahl u gilt dann $f(u) = g(f|u) = c(L_{f|u}) \in L_{f|u}$. Gemäß ihrer Definition ist f bezüglich Inklusion streng monoton. Daher ist auch f^{-1}: $f[D_f] \to D_f$ eine Funktion und, da $f[D_f] \subset L \subset 2^x$ eine Menge ist, folgt mit den Axiomen III und V $f^{-1}[f[D_f]] = D_f \in \omega$. Wegen $D_f \notin D_f$ gilt $U = f(D_f) = g(f) = c(L_f)$. Nach dem Auswahlaxiom folgt $L_f = \emptyset$: Es gibt also keine linear geordnete Teilmenge von x, die ein Element von $f[D_f]$ als echte Teilmenge enthält. $\bigcup f[D_f]$ ist nach Definition von f eine linear geordnete Teilmenge von x, die jedes Element von $f[D_f]$ enthält und damit das gesuchte maximale Element.

$2 \Rightarrow 3$: Sei $x \neq \emptyset$ eine Menge mit finitem Charakter und $y \subset x$ die nach Voraussetzung existierende bezüglich Inklusion maximale linear geordnete Teilmenge von x. Sei nun $z \subset \bigcup y$ eine Menge von endlich vielen Elementen von Elementen aus y. Da die Elemente von y durch Inklusion linear geordnet sind, gehören alle Elemente dieser endlichen Menge zu einem Element $u \in y \subset x$. Für die endliche Menge z gilt also $z \subset u \in x$ und wegen des finiten Charakters von x folgt $z \in x$. Da dies für jede endliche Teilmenge von $\bigcup y$ gilt, folgt $\bigcup y \in x$. Sei nun v ein weiteres Element von x mit $\bigcup y \subset v \in x$. Da jedes Element eines Elementes von y in v liegt, ist jedes Element von y Teilmenge von v. Daher ist $y \cup \{v\}$ eine in Bezug auf Inklusion linear geordnete Teilmenge von x, die y als Teilmenge enthält. Dies ist ein Widerspruch zur Maximaleigenschaft von y. Es kann also kein solches v geben und $\bigcup y$ ist ein maximales Element von x.

$3 \Rightarrow 4$: Sei x eine geordnete Menge und L die Menge der linear geordneten Teilmengen von x. Für eine solche linear geordnete Teilmenge $y \in L$ gilt $y \subset x$ und damit ist auch jede endliche Teilmenge $z \subset y$ linear geordnet: $z \in L$. Umgekehrt ist eine Menge linear geordnet, wenn jeden endliche Teilmenge linear geordnet ist. Die Menge L hat also finiten Charakter und nach Voraussetzung ein maximales

Element u ∈ L. v ist eine linear geordnete Teilmenge von und besitzt daher nach Voraussetzung eine obere Schranke v ∈ x. Dann ist w das gesuchte maximale Element von x, denn für jedes w ∈ x mit v ≤ w ist u ∪ {v} eine linear geordnete Teilmenge von x, für die wegen der Maximaleigenschaft von v gilt u ∪ {v} ⊂ u ⇔ v ∈ u ⇔ v ≤ w ⇒v = w.

4 ⇒ 5: Sei x eine nicht leere Menge und W die Menge aller Wohlordnungen $\leq_y$ auf Teilmengen y ⊂ x. W ist nicht leer, denn für jedes z ∈ x ist {(z;z)} eine Wohlordnung auf der Teilmenge {z} ⊂ x. Auf W wird eine Ordnung ⪯ definiert durch $\leq_1 \preceq \leq_2 :\Leftrightarrow \leq_1 \subset \leq_2 \wedge \exists$ a ∈ y_2: y_1 = {u ∈ x: u $\leq_2$ a}. Für eine in Bezug auf ⪯ linear geordnete Teilmenge V ⊂ W ist $\leq_V := \bigcup V$ offensichtlich eine lineare Ordnung auf der Teilmenge v = $\bigcup${y :$\leq_y$∈ V} ⊂ x. Für jede Teilmenge w ⊂ v gibt es ein $\leq_y$ ∈ V mit w ∩ y ≠ ∅ und ein kleinstes Element a ∈ w ∩ y bezogen auf die Wohlordnung $\leq_y$ auf y. Für jedes b ∈ w mit b $\leq_y$ a ∈ y gilt aber wegen der Definition von ⪯ auch b ∈ y ⇒ b ∈ w ∩ y ⇒ b = a. a ist also kleinstes Element von w ⊂ v und da dies für jede Teilmenge w ⊂ v gilt, ist $\leq_V$ eine Wohlordnung auf v und offensichtlich eine obere Schranke von V. Nach dem Lemma von Zorn hat W also ein maximales Element $\leq_0$ auf der Teilmenge y_0 ⊂ x bezogen auf die Ordnung ⪯. Falls ein z ∈ x\\$y_0$ existiert, ist durch ≤ := $\leq_0$ ∪ {(c;z): c ∈ y_0 ∪ {z}} auf y_0 ∪ {z} eine Wohlordnung definiert mit $\leq_0 \preceq \leq$ im Widerspruch zur Maximalität von $\leq_0$. $\leq_0$ ist also auf ganz x definiert und damit die gesuchte Wohlordnung.

5 ⇒ 1: Nach Voraussetzung existiert für jedes nicht leere x ∈ U eine Wohlordnung und bezüglich dieser das eindeutig bestimmte kleinste Element x_0 ∈ x. Mit c(x) := x_0 erhält man die gesuchte Auswahlfunktion.

15 Kardinalzahlen

15.1 Satz: Jede Menge läßt sich bijektiv auf eine Ordinalzahl abbilden.

Beweis: Wie im Beweis von 14.2.2 konstruieren wir mittels transfiniter Rekursion 11.10 und des Auswahlaxioms IX eine Funktion f: ω → x, die für jede Ordinalzahl ein Element von x auswählt, welches von den vorangegangenen Ordinalzahlen noch nicht belegt wurde: Für alle h: ω → x definieren wir die Rekursionsregel g(h) := c(x\h[D_h]) mit der Auswahlfunktion c aus 14.2.1. Damit erhält man f(u) = g(f|u) = c(x\f[u]) ∈ x\f[u] für jede Ordinalzahl u und D_f ∈ ω oder D_f = ω. Wegen $D_f \notin D_f$ ist U = f(D_f) = g(f) = c(x\f[D_f]). Nach dem Auswahlaxion IX folgt x\f[D_f] = ∅ ⇔ x = f[D_f]. f ist bijektiv, denn für zwei Ordinalzahlen v ⊊ u gilt nach 11.3 v ∈ u ⇒ f(v) ∈ f[u] und f(u) ∈ x\f[u] ⇒f(v) ≠ f(u). Dann ist f^{-1}: x → ω wieder eine Funktion und nach dem Ersetzungsaxion V ist $D_f = f^{-1}$[x] eine Menge und insbesondere D_f ∈ ω.

15.2 Definitionen: Kardinalzahlen dienen zum Vergleich der **Mächtigkeiten** von Klassen. Zwei Klassen x und y sind **gleichmächtig**, wenn es eine Bijektion f: x → y gibt. Die Gleichmächtigkeit ist nach Satz 15.1 eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse U aller Mengen und insbesondere auf der Klasse ω aller **Ordinalzahlen**. Das **kleinste** Element einer Äquivalenzklasse gleichmächtiger Ordinalzahlen heißt **Kardinalzahl**. Die Klasse **C** ⊂ ω der Kardinalzahlen wird durch Inklusion wieder **wohlgeordnet** und für jede Menge x ∈ U existiert die eindeutig bestimmte gleichmächtige Kardinalzahl |x| ∈ C, die auch **Mächtigkeit** von x genannt wird. Für die **Zahlbereiche** aus Abschnitt 13 gilt z.B. |ℕ| = |ℤ| = |ℚ|, da sich alle drei Zahlbereiche bijektiv aufeinander abbilden lassen.

15.3 Satz: x ⊂ y ⇒ |x| ⊂ |y|.

Beweis: Für die Bijektion f: y → |y| ist das Bild f[x] ⊂ |y| ∈ ω wohlgeordnet und nach Satz 10.7 ist f[x] isoton zu |y| oder einem Schnitt von |y| oder umgekehrt. Da |y| die kleinste zu y gleichmächtige Ordinalzahl ist und jeder Schnitt von |y| eine kleinere Ordinalzahl als |y| darstellt, ist der Satz in den ersten beiden Fällen bewiesen. Im dritten Fall ist |y| isoton und damit gleichmächtig zu einem Schnitt von f[x] ⊂ |y|. Dieser Schnitt wäre eine Ordinalzahl, die echt kleiner ist als |y| im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von |y|. Damit ist der dritte Fall ausgeschlossen.

15.4 Satz von Schroeder-Bernstein: Zwei Mengen x und y sind gleichmächtig, wenn x gleichmächtig ist zu einer Teilmenge v ⊂ y und y gleichmächtig zu einer Teilmenge u ⊂ x.

Beweis: Mit Satz 15.3 gilt $|x| = |v| \subset |y| = |u| \subset |x|$.

15.5 Satz: Ist $f\colon x \to y$ injektiv, so folgt $|x| \subset |y|$.

Beweis: Da $f\colon x \to f[x] \subset y$ bijektiv ist, folgt aus Satz 15.3 $|x| = |f[x]| \subset |y|$.

15.6 Satz: Ist die Funktion f eine Menge, so gilt $|f[D_f]| \subset |D_f|$.

Beweis: Mit dem Auswahlaxiom IX definiert man eine Funktion $g\colon f[D_f] \to D_f$ mit $g(y) := c(\{x\colon f(x) = y\})$, die zu jedem Bild $y \in f[D_f]$ eines der möglichen Urbilder x mit $y = f(x)$ auswählt. Da g injektiv ist, ist $f[D_f]$ gleichmächtig zu einer Teilmenge von D_f und mit Satz 15.3 folgt die Behauptung.

15.7 Satz von Cantor: Für jede Menge x gilt $|x| \subsetneq |2^x|$

Beweis: Aus der Injektion $f\colon x \to 2^x$ mit $f(u) := \{u\}$ folgt mit Satz 15.3 $|x| \subset |2^x|$. Im Fall von $|x| = |2^x|$ gäbe es eine Bijektion $g\colon x \to 2^x$ und ein $u \in x$ mit $g(u) = \{v \in x\colon v \notin g(v)\} \in 2^x$, welche auf den Widerspruch $u \in g(u) \Leftrightarrow u \notin g(u)$ führt.

Der folgende Satz beschreibt die Auflösung der **Cantor-Antinomie 3.3** im NBG-System.

15.8 Satz: C ist keine Menge.

Beweis: Angenommen, C ist eine Menge, so gilt dies nach dem großen Vereinigungsaxiom VI auch für $\bigcup C$ und nach dem Potenzmengenaxiom III für $2^{\bigcup C}$. Nach Satz 15.1 folgt $|2^{\bigcup C}| \in C \Rightarrow |2^{\bigcup C}| \subset \bigcup C$ und nach Satz 15.3 erhält man den Widerspruch $|2^{\bigcup C}| \subset |\bigcup C|$.

15.9 Satz: Für $x,y \in \omega$ gilt $|x + 1| = |y + 1| \Rightarrow |x| = |y|$.

Beweis: Aus der Bijektion $f\colon x + 1 \to y + 1$ erhält man mit $g = f \setminus \{(x;f(x)); (f^{-1}(y);y)\} \cup \{(x;y); (f^{-1}(y);y)\}$ eine Bijektion $g\colon x \to y$.

16 Endliche Mengen

16.1 Satz: $\mathbb{N} \subset C$.

Beweis: Sei x die kleinste natürliche Zahl, die keine Kardinalzahl und damit gleichmächtig zu einer kleineren natürlichen Zahl y ist. Nach Satz 15.9 ist dann aber auch ihr Vorgänger $x - 1$ gleichmächtig zu $y - 1$ im Widerspruch zur Annahme. Es kann also keine solche natürliche Zahl geben, d.h. jede natürliche Zahl ist eine Kardinalzahl.

16.2 Satz: $\mathbb{N} \in C$

Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist keine Kardinalzahl und damit gleichmächtig zu einer kleineren Ordinalzahl $x \in \mathbb{N}$. Dann folgt $x \subset x + 1 \subset \mathbb{N}$ und nach Satz 15.3 gilt $|x| \subset |x + 1| \subset |\mathbb{N}| = |x| \Rightarrow |x| = |x + 1|$ im Widerspruch zu Satz 16.1.

16.3 Definition: Eine Menge x heißt **endlich**, wenn sie gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl ist. Eine nicht endliche Menge heißt **unendlich**.

16.4 Satz: Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie eine Ordnung besitzt, bezüglich derer jede Teilmenge ein größtes und ein kleinstes Element hat.

Beweis:

$\Rightarrow$: Ist die Menge x endlich, so gibt es eine Bijektion $f\colon x \to |x| \in \mathbb{N}$ und mit $u \leq v \Leftrightarrow f(u) \subset f(v)$ für $u, v \in x$ ist eine Ordnung mit den gewünschten Eigenschaften definiert.

$\Leftarrow$: Besitzt die Menge x eine Wohlordnung, so gibt es nach Satz 10.7 eine streng monotone Funktion $f\colon x \to \omega$. Da alle Teilmengen von x ein größtes Element besitzen und f streng monoton, gilt dies auch für $f[x]$ und damit folgt $f[x] \in \mathbb{N}$.

16.5 Satz: Für zwei endliche Mengen x und y ist auch die Vereinigung $x \cup y$ endlich.

Beweis: Nach Satz 16.4 besitzen x und y Ordnungen $\leq$ und $\preceq$, bezüglich derer jede Teilmenge ein größtes und ein kleinstes Element hat. Die gewünschte Ordnung auf $x \cup y$ erhält man dann folgendermaßen:

$$u \leqslant v \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in x \wedge u \leq v \\ u, v \in y \wedge u \preceq v \\ u \in x \wedge v \in y \end{cases} .$$

16.6 Satz: Wenn x und jedes Element von x endlich sind, ist auch $\bigcup x$ endlich.

Beweis: Sei $y \subset \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen u, für die gilt: Wenn $|x| = u$ und jedes Element von x endlich ist, so ist auch $\bigcup x$ endlich. Wir zeigen mit **finiter Induktion** 12.2.5, dass $x = \mathbb{N}$: **Induktionsstart**: $\emptyset \in y$ ist offensichtlich. **Induktionsschritt**: Sei $u \in y$ und $|x| = u + 1 = u \cup \{u\}$ mit der Bijektion f: $u \cup \{u\} \to x$ und jedes Element von x sei endlich. Da $|f[u]| = u$, ist f[u] endlich und da außerdem jedes Element von f[u] endlich, ist nach Induktionsvoraussetzung auch $\bigcup f[u]$ endlich. Nach Satz 16.5 ist dann auch $\bigcup x = \bigcup f[u \cup \{u\}] = \bigcup(f[u] \cup f(u)) = \bigcup f[u] \cup \bigcup f(u) = \bigcup f[u] \cup f(\bigcup u) = \bigcup f[u] \cup f[u]$ endlich.

16.7 Satz: Für zwei endliche Mengen x und y ist auch ihr Produkt $x \times y$ endlich.

Beweis: Mit Satz 16.6, denn $x \times y = \bigcup\{\{u\}\times y\text{: } u \in x\}$.

16.8 Satz: Für eine endliche Menge x ist auch ihre Potenzmenge 2^x endlich.

Beweis: Mit **finiter Induktion** 12.2.5: **Induktionsstart:** Der Satz gilt offensichtlich für $\emptyset = 2^\emptyset$. **Induktionsschritt:** Der Satz gelte für alle x mit $|x| = u \in \mathbb{N}$ und es sei y gegeben mit der Bijektion f: $u \cup \{u\} \to y$. Dann ist $2^y = 2^x \cup \bigcup\{z \cup f(u)\text{: } z \in 2^x\}$ nach der Induktionsvoraussetzung und Satz 16.6 wieder endlich.

16.9 Satz: Eine Menge ist genau dann endlich, wenn sie keine gleichmächtige echte Teilmenge besitzt.

Beweis:

$\Rightarrow$: Sei x eine endliche Menge und $z \in x \backslash y$ für eine echte Teilmenge $y \subsetneq x$. Dann ist insbesondere $x \neq \emptyset$ und aus der entsprechenden Bijektion f: $|x| \to x$ erhält man mit $g := f \setminus \{(|x| - 1;f(|x| - 1)); (f^{-1}(z);z)\} \cup (f^{-1}(z);f(|x| - 1))$ eine Bijektion g: $|x| - 1 \to w$ mit $y \subset w \subsetneq x$. Aus Satz 15.3 folgt $|y| \subset |w|$ und nach Definition 15.2 ist $|w| \subset |x| - 1$. Daraus folgt $|y| \subsetneq |x|$ und damit kann eine echte Teilmenge nicht gleichmächtig zu x sein.

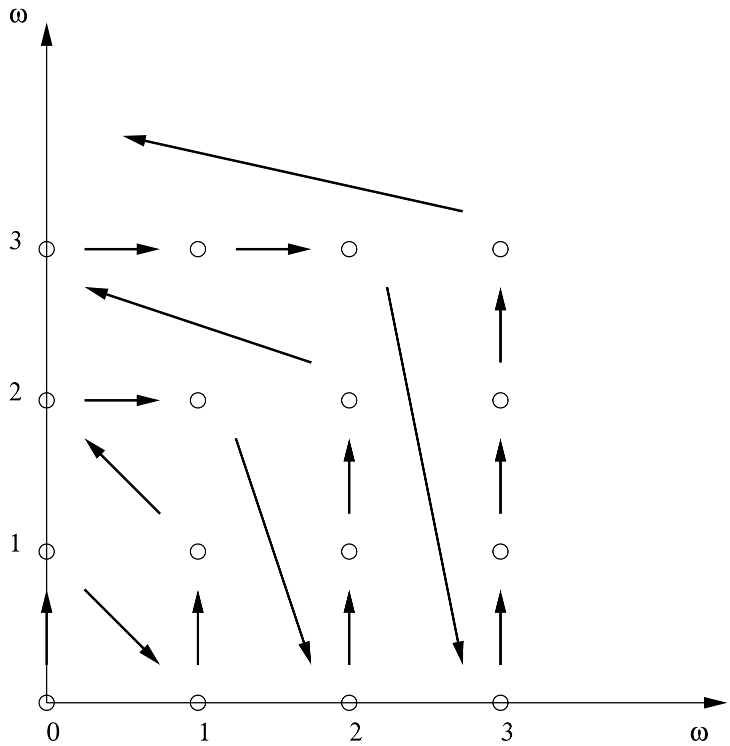
$\Leftarrow$: Sei x eine unendliche Menge und f: $x \to |x|$ bijektiv. Dann ist $\mathbb{N} \subset |x|$ und wegen Satz 12.2.1 ist die Funktion g: $|x| \to |x| \backslash \{\emptyset\}$ mit $f(u) := \begin{cases} u + 1 & \text{für } u \in \mathbb{N} \\ u & \text{für } u \in | x | \backslash \mathbb{N} \end{cases}$ ebenfalls bijektiv. Mit $f^{-1} \circ g \circ f$: $x \to x \backslash \{f^{-1}(\emptyset)\}$ erhält man dann eine Bijektion von x auf eine echte Teilmenge von x.

17 Unendliche Mengen

17.1 Satz: Jede unendliche Ordinalzahl ist gleichmächtig zu ihren Nachfolger.

Beweis: Für $x \in \omega \backslash \mathbb{N}$ ist f: $x + 1 \to x$ mit $f(u) := \begin{cases} u + 1 & \text{für } u \in \mathbb{N} \\ u & \text{für } u \in x \setminus \mathbb{N} \\ \emptyset & \text{für } u = x \end{cases}$ wieder wegen Satz 12.2.2 bijektiv.

17.2 Satz und Definition: Mit $(u;v) \le (x;y)$
$$:\Leftrightarrow \begin{cases} \quad u \cup v \subsetneq x \cup y \\ \vee \quad u \cup v = x \cup y \wedge u \subsetneq x \\ \vee \quad u \cup v = x \cup y \wedge u = x \wedge v \subset y \end{cases}$$
wird eine Wohlordnung auf $\omega \times \omega$ erklärt. (siehe rechts)



Beweis: Da die Ordinalzahlen durch Inklusion linear geordnet werden, ist die Vereinigung $x \cup y$ gleich der größeren der beiden Ordinalzahlen x und y. Reflexivität, Transitivität und Asymmetrie folgen direkt aus der Definition. Ebenfalls aus der Definition sowie aus der linearen Ordnung der Ordinalzahlen durch Inklusion folgt, dass es sich wieder um eine lineare Ordnung handelt. Das kleinste Element einer Teilmenge von Paaren von Ordinalzahlen findet man, indem man entsprechend der Definition zunächst die Paare sucht, die in der ersten Koordinate die kleinste Ordinalzahl aufweisen und unter diesen dann in der zweiten Koordinate nach der kleinsten Ordinalzahl sucht. Es handelt sich also um eine Wohlordnung.

17.3 Satz: $(u;v) \le (x;y) \Rightarrow (u;v) \in (x \cup y + 1) \times (x \cup y + 1)$

Beweis: $(u;v) \le (x;y) \Rightarrow u \cup v \subset x \cup y \Rightarrow u,v \subset x \cup y \Rightarrow u,v \in x \cup y + 1$.

17.4 Satz von Hessenberg: Für alle unendlichen Mengen x gilt $|x \times x| = |x|$.

Beweis: Wir wenden das Prinzip der **transfiniten Induktion** an und beweisen die Aussage zunächst nur für unendliche Kardinalzahlen. Da sich die zu beweisende Aussage nicht auf alle Ordinalzahlen bezieht, wird nur das **Beweisprinzip** von Satz 11.11 übernommen. Sei also zunächst $x \in C \setminus \mathbb{N}$. Nach den Sätzen 9.4, 10.7 und 17.2 gibt es eine streng monotone Funktion $f\colon x \times x \to y$, wobei $y \subset \omega$ ein Schnitt in der Menge der Ordinalzahlen ist. Wir zeigen, dass für jedes $(u;v) \in x \times x$ gilt $f((u;v)) \in x$. Für $x = \mathbb{N}$ sind $u,v \in \mathbb{N}$ und mit den Sätzen 16.7 und 17.3 ist auch $[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[\subset (u \cup v + 1) \times (u \cup v + 1)$ endlich. Da f isoton und y ein Schnitt in ω ist, folgt $f((u;v)) = [\emptyset;f((u;v))[= [f((\emptyset;\emptyset));f((u;v))[= f\,[[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[] \in \mathbb{N} = x$. **Induktionsannahme**: Sei nun $x \in C \setminus \mathbb{N}$ die kleinste Kardinalzahl mit $|x \times x| \ne |x|$ und $(u;v) \in x \times x$ mit $f((u;v)) \notin x$. Für endliche Koordinaten u und v wurde oben schon gezeigt, dass $f((u;v)) \in x$ gelten muss. Sei also mindestens eine der Koordinaten unendlich mit $|u \cup v| \in C \setminus \mathbb{N}$. Nach Satz 17.1 gilt dann $|u \cup v + 1| = |u \cup v| \in |x|$ und nach der Induktionsannahme folgt $|(u \cup v) \times (u \cup v)| = |u \cup v|$. Mit Satz 17.3 erhält man dann aber wieder $|f((u;v))| = |f\,[[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[]| = |[(\emptyset;\emptyset);(u;v)[| \subset |(u \cup v + 1) \times (u \cup v + 1)| = |(u \cup v) \times (u \cup v)| = |u \cup v| \in |x|$ und da sowohl $f((u;v))$ als auch x Ordinalzahlen sind, folgt $f((u;v)) \in x$ im Widerspruch zur Induktionsannahme. Für alle unendlichen Kardinalzahlen x gilt also $|x \times x| = |x|$. Für eine unendliche Menge sei $f\colon x \to |x| \in C \setminus \mathbb{N}$ bijektiv. Dann gilt dies auch für $g\colon x \times x \to |x| \times |x|$ mit $g((u;v)) := (f(u);f(v))$ und es folgt $|x \times x| = ||x| \times |x|| = ||x|| = |x|$.

17.5 Satz: Ist eine der beiden Mengen x und y unendlich, so gilt $|x \times y| = |x \cup y|$

Beweis: folgt direkt aus Satz 17.4.

17.6 Satz: Haben alle Elemente einer unendlichen Menge x die gleiche Mächtigkeit wie x, so gilt $|\bigcup x| = |x|$.

Beweis: Nach dem Auswahlaxiom IX wählen wir für jedes $y \in x$ ein f_y aus der Menge der Bijektionen $f\colon y \to |x|$. Außerdem sei $g\colon x \to |x|$ die entsprechende Bijektion für x selbst. Für $z \in \bigcup x$ sei $u \in \omega$ die kleinste Ordinalzahl mit $z \in g^{-1}(u)$. Durch $h(z) := (u;f_{g^{-1}(u)}(z))$ ist dann eine Bijektion $h\colon \bigcup x \to |x| \times |x|$ definiert und die Behauptung folgt aus Satz 17.5.

17.7 Satz: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Beweis: Nach Satz 15.3 gilt zunächst $|\mathbb{N}| \subset |\mathbb{Z}|$. Nach Satz 12.4.1 ist die Addition einer festgelegten Zahl eine streng monotone und daher bijektive Funktion. Für eine ganze Zahl $x - y \in \mathbb{Z}$ mit $x \geq y$ gibt es daher eine eindeutig bestimmte Zahl z mit $x = y + z$ und wir definieren in diesem Fall $f(x - y) := (z;0)$. Im Fall $x \leq y$ gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl z mit $y = x + z$ und es sei dann $f(x - y) := (0;z)$. Dann ist f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Injektion und nach den Sätzen 15.5 und 17.4 folgt $|\mathbb{Z}| \subset |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ und damit $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

17.8 Satz: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

Beweis: Nach Satz 15.3 gilt zunächst $|\mathbb{N}| \subset |\mathbb{Q}|$. Nach Satz 13.1.2 gilt für ganze Zahlen x' $\in \mathbb{Z}$ und y' $\in \mathbb{Z}^*$ die Beziehung $x' \cdot (-y') = (-x') \cdot y' \Leftrightarrow \frac{-x'}{-y'} = \frac{x'}{y'}$. in der Äquivalenzklasse einer rationale Zahl $\frac{x'}{y'} \in \mathbb{Q}$ gibt es daher immer Vertreter mit positiven Nenner und unter diesen wählen wir alle Vertreter mit dem kleinsten positiven Nenner $x \in \mathbb{N}$ aus. Da die Multiplikation mit einer festgelegten natürlichen Zahl x nach 13.1.2 eine streng monotone und damit bijektive Funktion ist, ist der Nenner y für den gewählten kleinsten natürlichen Zähler x dann ebenfalls eindeutig festgelegt. Dann ist f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(\frac{x'}{y'}) := (x;y)$ eine Injektion und nach den Sätzen 15.5 und 17.4 folgt $|\mathbb{Q}| \subset |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ und damit $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.

17.9 Satz: $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Beweis: Nach Satz 13.3 gilt $\mathbb{R} \subset 2^{\mathbb{Q}}$ und nach den Sätzen 15.3 und 17.8 folgt $|\mathbb{R}| \subset |2^{\mathbb{Q}}| = |2^{\mathbb{N}}|$. Umgekehrt ist g: $2^{\mathbb{N}} \to [0;1] \subset \mathbb{R}$ mit $g(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \cdot 2^{-n-1}$ bijektiv und wieder mit Satz 15.3 folgt $|2^{\mathbb{N}}| \subset |\mathbb{R}|$.

17.10 Satz und Defintion: Es gibt eine streng monotone Funktion $\aleph$: $\omega \to C\backslash\mathbb{N}$.

Beweis: folgt direkt aus Satz 10.7 und der Tatsache, dass einerseits jeder Schnitt in ω und $C\backslash\mathbb{N}$ eine Menge ist und andererseits weder ω noch $C\backslash\mathbb{N}$ selbst Mengen sind.

17.11 Definitionen: Die kleinste unendliche Kardinalzahl ist $\aleph_0 := \aleph(\emptyset) = \mathbb{N}$. Mengen mit der Mächtigkeit $\mathbb{N}$ heißen **abzählbar unendlich**. Die nächste Kardinalzahl $\aleph_1$ ist die kleinste **überabzählbare** Ordinalzahl. Aus $\mathbb{N} \in |2^{\mathbb{N}}|$ folgt $\aleph_1 \subset |2^{\mathbb{N}}|$. Die **Kontinuumshypothese** besagt, dass $\aleph_1 = |2^{\mathbb{N}}|$. Die **allgemeine Kontinuumshypothese** beinhaltet entsprechend die Aussage $\aleph_{x+1} = |2^{\aleph_x}|$. Die Kontinuumshypothese ist ebenso wie das Auswahlaxiom unabhängig von den übrigen Axiomen der Mengenlehre.

Literatur

[1] Bernays, Paul, Axiomatic set theory, Dover 1968

[2] Ebbinghaus, Heinz-Dieter: Einführung in die Mengenlehre, 4. Auflage Spektrum 2003

[3] Fischer, Gerd und Sacher, Reinhard: Einführung in die Algebra, Teubner 1983

[4] Hewitt, Edwin und Stromberg, Karl: Real and abstract Analysis, Springer 1965

[5] Kelley, John: General topology, Springer 1955

[6] Morse, Anthony: A theory of sets, academic press 1965

[7] Suppes, Patrick: Axiomatic set theory, Dover 1972