Topologie

Arne Pönitz

April 2013

Vorwort

Die mengentheoretische Topologie befasst sich mit verallgemeinerten Begriffen von **Raum** und **Abstand**. Der Abstandsbegriff ist die Voraussetzung für die Entwicklung der **Konvergenz- und Stetigkeitsbegriffe** der Infinitesimalrechnung insbesondere in der **Funktionentheorie**, **Funktionalanalysis**, **Differentialgeometrie** und **Stochastik**.

Die Darstellung ist bis auf einige Umstellungen und kleine Änderungen eine Zusammenfassung des klassischen Buches derer **von Querenburg** [3]. Die mengentheoretischen Grundlagen werden in [4] behandelt und sind daher nicht mehr in diesem Text enthalten. Neben der **Mengenlehre** werden auch solide Grundkenntnisse in der **Analysis** vorausgesetzt. Aus Gründen der Übersicht sind einfache Aussagen und Sätze ohne Beweis in den Text integriert. Die ausführliche Begründung und gegebenenfalls auch Visualisierung dieser Aussagen ist unerlässlich für das Verständnis des Textes und ersetzt explizite Übungsaufgaben zu exotischen topologischen Räumen. In der Einleitung werden grundlegende Begriffe und Schreibweisen auf **metrischen Räumen** eingeführt, die zum größten Teil aus der Analysis bekannt sein sollten. Nachdem sich herausgestellt hat, dass verschiedene Metriken zu identischen Raum- und Abstandsbegriffen führen können und damit offenbar nicht den Kern dieser Begriffe beschreiben, gelangt man dazu, den Begriff der **offenen Menge** bzw. **Umgebung** in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu rücken. Nach dieser Motivation werden in den folgenden Abschnitten 2 - 4 die grundlegenden Begriffe der Topologie eingeführt: **Basis**, **Subbasis**, **Umgebungen**, **Abzählbarkeitsaxiome**, **stetige** und **offene Funktionen**, Konstruktion topologischer Räume auf **Teil-, Produkt-, Quotienten- und Summenmengen** sowie **Zusammenhang**. Für die Erweiterung des **Konvergenzbegriffes** von wohlgeordneten Folgen auf weniger strukturierte Mengen wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts der Begriff des **Netzes** bzw. der **gerichteten Menge** von **Eliakim Hastings Moore** eingeführt und später von amerikanischen Mathematikern um **John Wilder Tukey** und **Garrett Birkhoff** weiter entwickelt. Netze werden z.B. von **John Kelley** in seinem klassischen Darstellung [2] verwendet. In diesem Text wird der von **Henri Cartan**, **Jean Dieudonné** und anderen französischen Mathematikern unter dem Pseudonym **Nicolas Bourbaki** [1] um 1940 entwickelte Begriff des **Filters** verwendet. Er ist weniger anschaulich aber beweistechnisch oft günstiger und führt zu den gleichen Ergebnissen wie die Netztheorie. Die folgenden Abschnitte behandeln **Trennungseigenschaften** und die Standardergebnisse zur Fortsetzung stetiger Funktionen auf normalen Räumen nach den Sätzen von **Urysohn** und **Tietze** sowie die **Partitionen der Eins**. Anschließend werden verschiedene **Kompaktheitsbegriffe** sowie die **Uniformisierung** und **Metrisation** von topologischen Räumen entwickelt. Am Schluß stehen ausgewählte Ergebnisse zu **Funktionenräumen** wie die Sätze von **Stone-Weierstraß** und **Ascoli** sowie die Eigenschaften der für die **Maßtheorie** wichtigen **polnischen Räume**.

Weilheim, im April 2013 Arne Pönitz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Indexschreibweise. Nach dem **Auswahlaxiom** (siehe z.B. [4] 14.2.1) gibt es eine Auswahlfunktion x mit $x(i) \in i$ für jede Menge i. Daher existiert für jede Menge I ihr **Produkt** $\prod I := \{x\colon I \to \bigcup I\colon x(i) \in i\ \forall\ i \in I\}$. Jedem Element i der **Indexmenge** I wird also ein Element x(i) aus i zugewiesen. Die **große Vereinigung** $\bigcup I$ ist die Menge aller Elemente von Elementen i aus I. Die **indizierte Schreibweise** $\prod_{i\in I} X_i := \{x\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i\colon x(i) := x_i \in X_i\}$ wird verwendet, wenn die Funktionswerte x_i der Auswahlfunktion voneinander unterschieden werden müssen.

1.2 Metrik. Der natürlichste Abstandsbegriff auf einer Menge X ist eine **Metrik**. Dabei handelt es sich um eine Funktion $d\colon X^2 \to [0; \infty[$ mit den Eigenschaften

1. $d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x;y) = d(y;x)$ für alle $x; y \in X$ (**Symmetrie**)
3. $d(x;y) + d(y;z) \leq d(x;z)$ für alle $x; y; z \in X$ (**Dreiecksungleichung**).

Das Paar (X;d) heißt dann **metrischer Raum**. Eine der wichtigsten Aufgaben der Topologie ist die Formuliereung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die **Existenz** einer Metrik.

1.3 Normierte Vektorräume. X sei ein **reeller Vektorraum** mit einer **Norm** $||\ ||\colon X \to [0; \infty[$ und den Eigenschaften

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ und
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x; y \in X$.

Auf dem **n-dimensionalen euklidischen Raum** $\mathbb{R}^n$ erhält man durch $||(x_1; x_2; ...; x_n)|| := \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n} x_i^2}$ die **euklidische Norm** und auf dem Raum der **stetigen reellwertigen Funktionen** $C([a;b];\mathbb{R})$ auf dem **abgeschlossenen Intervall** [a;b] durch $||f|| := \sup\{|f(x)|\colon a \leq x \leq b\}$ die **Supremumsnorm**. Offensichtlich erhält man durch $d(x;y) := ||x - y||$ dann eine Metrik auf X.

1.4 Produktmetriken. Auf einem **endlichen Produkt** $\prod_{i\in I} X_i$ metrischer Räume $(X_i;d_i)$ kann man drei verschiedene Metriken definieren durch

1. $d'(x;y) := \sum_{i\in I} d_i(x_i; y_i)$
2. $d''(x;y) := \sqrt{\sum_{i\in I} d_i^2(x_i; y_i)}$
3. $d'''(x;y) := \max_{i\in I} d_i(x_i; y_i)$

1.5 Satz: Auf einem **abzählbar unendlichen Produkt** $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ metrischer Räume $(X_n;d_n)$ erhält man eine Metrik durch

$d(x;y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d_n(x_n;y_n)}{2^{n+1}(1+d_n(x_n;y_n))}$.

Beweis: Zu zeigen ist nur die Dreiecksungleichung. Wir kürzen ab $a := d_n(x_n; z_n)$, $b := d_n(x_n; y_n)$ und $c := d_n(y_n; z_n)$ Nach Voraussetzung ist dann $a \leq b + c$. Wegen der Monotonie der Abbildung $x \to \frac{x}{1+x}$ für $x \geq 0$ folgt daraus $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c+bc}{1+b+c+bc} \leq \frac{b+c+2bc}{1+b+c+bc} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$. Damit gilt die Dreiecksungleichung für jeden einzelnen Summanden und da aufgrund der absoluten Konvergenz die Summationsreihenfolge beliebig ist, folgt die Gültigkeit für die ganze Reihe.

1.6 Topologische Begriffe auf metrischen Räumen. Sei (X;d) ein metrischer Raum. Die Menge $B_r(x) := \{y \in X\colon d(x;y) < r\}$ heißt dann **offene Kugel** um x mit Radius r. Eine **Umgebung** von x ist eine Menge, die eine offene Kugel um x enthält. Eine Menge $A \subset X$ heißt **offen**, wenn sie Umgebung für jedes ihrer Elemente ist. A heißt **abgeschlossen**, wenn $X\backslash A$ offen ist. Eine Funktion $f\colon (X;d) \to (X';d')$ heißt **stetig**, wenn die Urbilder offener Mengen auf X' wieder offen auf X sind: O offen auf X' $\Rightarrow f^{-1}(O)$ offen auf X. Für jedes $\varepsilon > o$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B'_\varepsilon(f(x))$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einem metrischen Raum X heißt **konvergent** gegen den **Limespunkt** oder **Grenzwert** $x \in X$, wenn in jeder Umgebung von x **schließlich alle** Folgenglieder liegen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\colon \forall$

$n \geq n(\varepsilon)$: $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Ein Punkt $y \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, wenn in jeder Umgebung von y **unendlich viele** Folgenglieder liegen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ m(n;\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $x_m \in B_\varepsilon(y)$. Die Folge heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ **schließlich alle** Folgenglieder in einer ε-Umgebung eines Folgengliedes liegen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall\ n \geq n(\varepsilon)$: $x_n \in B_\varepsilon(x_{n(\varepsilon)})$. Jeder Häufungspunkt einer Cauchy-Folge ist auch Limespunkt. X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge auf X konvergiert. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, denn z.B. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ ist eine Cauchy-Folge, die gegen den Limespunkt $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ konvergiert. f: (X;d) → (X';d') ist genau dann **stetig**, wenn für jede gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X auch die **Bildfolge** $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf X' gegen das Bild f(x) konvergiert. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\mathbb{N} \to (X'; d')^{(X;d)}$ konvergiert **gleichmäßig** bzw. bezüglich der **Supremumsnorm** gegen f: X → X', wenn in **jeder Umgebung von jedem f(x) schließlich alle** Folgenglieder liegen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall\ n \geq n(\varepsilon)\ \forall\ x \in X$: $f_n(x) \in B_\varepsilon(f(x))$.

1.7 Satz. Sind alle f_n : (X;d) → X';d') stetig und konvergieren **gleichmäßig** gegen f, so ist auch f stetig.

Beweis. $\forall\ x \in X \wedge \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \wedge n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall\ n \geq n(\varepsilon) \wedge y \in B_\delta(x)$: $f(y) \in B_{\varepsilon/3}(f_n(y))$ für **ein** δ **unabhängig** vom gewählten y aufgrund der **gleichmäßigen** Konvergenz der f_n, $f_n(y) \in B_{\varepsilon/3}(f_n(x))$ wegen der Stetigkeit der f_n an der Stelle $x \in X$ und $f_n(x) \in B_{\varepsilon/3}(f(x))$ aufgrund der Konvergenz der f_n an der Stelle x. Aus ser Dreiecksungleichung folgt $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$.

1.8 Beispiel. Die **stetigen** Parabeln $f_n(x) = x^n$ konvergieren im Intervall [0;1] **punktweise aber nicht gleichmäßig** gegen die **unstetige** Funktion f mit f(x) = 0 für $0 \leq x < 1$ und f(1) = 1.

1.9 Satz: Die drei Metriken aus 1.4 sind **äquivalent** hinsichtlich der Begriffe offener Mengen und stetiger Funktionen: Eine Menge ist genau dann offen bezüglich d', wenn sie offen ist bezüglich d" bzw d"'. Eine Funktion f: X → Y ist genau dann stetig bezüglich d', wenn sie stetig ist bezüglich d" bzw. d"'.

Beweis: Wegen $0 \leq (d_i - d_j)^2 \Leftrightarrow 2d_id_j \leq d_i^2 + d_j^2 \geq 2d_id_j$ folgt $\left(\sum_{1\leq i\leq n} d_i\right)^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} d_id_j \leq \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(d_i^2 + d_j^2) = n\sum_{1\leq i\leq n} d_i^2$. Damit erhält man die Abschätzung $d" \leq d' \leq \sqrt{n} \cdot d" \Leftrightarrow B'_r(x) \subset B''_r(x) \subset B'_{\sqrt{n}\cdot r}(x)$. Offensichtlich gilt außerdem $d"' \leq d' \leq n \cdot d"' \Leftrightarrow B'_r(x) \subset B'''_r(x) \subset B'_{n\cdot r}(x)$.

Aus dem vorangehenden Satz läßt sich schließen, dass die Eigenschaften von Umgebungen und stetigen Funktionen auf einer Menge X weniger durch die Metrik als durch die **offenen Mengen** bzw. **Umgebungen** selbst charakterisiert werden. In den folgenden Abschnitten wird daher die Begriff der offenen Menge bzw. Umgebung zunächst unabhängig von einer Metrik entwickelt. Anschließend wird untersucht, welche Eigenschaften der offenen Mengen bzw. Umgebungen notwendig und hinreichend für die Existenz einer Metrik sind.

2 Topologische Räume

2.1 Offene und abgeschlossene Mengen. Eine Mengenfamilie $\mathcal{O}$ heißt **Topologie**, wenn **Vereinigungen beliebiger Teilfamilien** aus $\mathcal{O}$ und **Durchschnitte nicht leerer endlicher Teilfamilien** aus $\mathcal{O}$ wieder zu $\mathcal{O}$ gehören. Jede Topologie enthält die Mengen $\emptyset = \bigcup\emptyset$ und $X := \bigcup\mathcal{O}$. Das Paar (X,$\mathcal{O}$) heißt **topologischer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{O}$ sind die **offenen Mengen** und ihre Komplemente bezüglich X sind die **abgeschlossene Mengen**. Auf eine Menge X sind die **indiskrete Topologie** {∅;X} die kleinste und die **diskrete Topologie** 2^X die größte mögliche Topologie. Gilt für zwei Topologien $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ **feiner** als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ **gröber** als $\mathcal{O}_2$.

2.2 Basis einer Topologie. Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt **Basis** der Toplogie $\mathcal{O}$, wenn zu jedem $x \in X$ und $O \in \mathcal{O}$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in B \subset O$. Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subset 2^X$ ist genau dann die Basis einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{O}$, wenn $\bigcup\mathcal{B} = X$ und jeder Durchschnitt einer nicht leeren endlichen Teilfamilie aus $\mathcal{B}$ gleich der Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. $\mathcal{O}$ ist dann die Familie aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$. In einem **metrischen Raum** (X;d) bilden z.B. die **offenen Kugeln** B(r;x) für $r > 0$ und $x \in X$ eine Basis der offenen Mengen. Die gemäß 1.3 durch die euklidische Norm bzw. euklidische Metrik erzeugt Topologie heißt auch **natürliche Topologie** auf $\mathbb{R}^n$.

2.3 Subbasis einer Topologie. Sei $\mathcal{S} \subset 2^X$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X. Die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ bildet die Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X. $\mathcal{S}$ heißt dann **Subbasis** der Toplogie $\mathcal{O}$. Die Intervalle der Gestalt $]-\infty;a[$ und $]a;\infty[$ mit $a \in \mathbb{R}$ bilden z.B. eine Subbasis der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$.

2.4 Umgebungen. Ein Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungssystem** eines Punktes $x \in X$ und die Mengen $U \in \mathcal{U}(x)$ heißen **Umgebungen** von x, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ enthält x und darüberhinaus eine weitere Menge $V \in \mathcal{U}(x)$, so dass $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V \subset U$.
2. Mit U gehört auch jede darüberliegende Menge $U' \supset U$ zu $\mathcal{U}(x)$.
3. Mit endlich vielen Mengen $U_1, ..., U_n$ liegt auch ihr Schnitt $\bigcap_{1\leq i\leq n} U_i$ in $\mathcal{U}(x)$.

2.5 Satz:

1. Ordnet man jedem Punkt x einer Menge X ein Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ zu, so bildet die Familie aller Mengen, die Umgebung jedes ihrer Punkte sind, eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X.
2. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann Umgebung des Punktes $x \in X$, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in O \subset U$.
3. Die Topologie $\mathcal{O}$ ist durch die Eigenschaft 2 eindeutig bestimmt.

Beweis:

1. Wegen 2.4.1 gehören beliebige Vereinigungen solcher Mengen sowie die gesamte Menge X wieder zu $\mathcal{O}$ und wegen 2.4.3 gilt dies auch für endliche Schnitte. Die leere Menge $\emptyset$ gehört ebenfalls zu $\mathcal{O}$, da sie keine Punkte besitzt und die Bedingung daher trivialerweise erfüllt ist.
2. Sei $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$, dann ist nach 2.4.1 die Menge $\overset{o}{U} := \{y \in U\colon U \in \mathcal{U}(y)\} \subset U$ nicht leer. Für ein $y \in \overset{o}{U}$ gibt es wegen 2.4.1 ein $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \in \mathcal{U}(z)$ für alle $z \in V \subset U$. Damit folgt sogar $V \subset \overset{o}{U}$ und nach 2.4.2 folgt $\overset{o}{U} \in \mathcal{U}(y)$. $\overset{o}{U}$ ist also Umgebung jedes seiner Punkte und damit die gesuchte offene Menge um x in U. Die Umkehrung ist trivialerweise erfüllt.
3. Sei $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft 2. und $O' \in \mathcal{O}'$. Dann ist O' nach Voraussetzung Umgebung jedes ihrer Punkte und gehört nach 1. zu $\mathcal{O}$.

2.6 Abzählbarkeitsaxiome. Eine Teilmenge $\mathcal{B}(x)$ eines Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis**, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ existiert mit $B \subset U$. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Jeder **metrische Raum** erfüllt das 1 Abzählbarkeitsaxiom, da die offenen Kugeln $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ eine Umgebungsbasis von x bilden. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt. Die **natürliche Topologie** auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, denn $\mathbb{Q}^{n+1}$ ist abzählbar und die offenen Kugeln $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ für x mit rationalen Koordinaten bilden eine Basis der offenen Mengen. Nach 2.5.2 und 2.5.3 schließt das 2. Abzählbarkeitsaxiom das erste mit ein.

2.7 Abgeschlossene Hülle und offener Kern. Sei A eine Teilmenge des topologischen Raumes $(X,\mathcal{O})$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von A, wenn jede Umgebung von x mit A einen nichtleeren Durchschnitt bildet. Die Menge der Berührungspunkte von A ist die **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluß** $\overline{A}$ von A. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Der Punkt $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von A, wenn A Umgebung von x ist. Die Menge der inneren Punkte von A heißt **offener Kern** oder das **Innere** $\overset{o}{A}$ von A. $\overset{o}{A}$ ist die größte offene Menge, die ganz in A liegt. Allgemein gilt $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ und $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

2.8 Randpunkt, dichte und nirgends dichte Mengen. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** von A, wenn x Berührungspunkt von A und von $X\backslash A$ ist. Die Menge der Randpunkte von A heißt **Rand** $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{o}{A}$ von A. Da $X\backslash\partial A = \overset{o}{A} \cup X\backslash\overline{A}$ offen, ist der Rand einer Menge immer abgeschlossen. A heißt **dicht** in X, wenn jeder Punkt aus X Berührungspunkt von A ist: $\overline{A} = X$. A heißt **nirgends**

dicht in X, wenn $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$. Ist Für offene A liegt ∂A außerhalb von A und für abgeschlossene A liegt ∂A innerhalb von A. In diesen Fällen ist ∂A daher nirgends dicht in X.

2.9 Beispiele. $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen und nirgends dicht in $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Die rationalen Zahlen besitzen keine inneren Punkte und $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$ aber $\mathbb{Q}$ ist weder dicht noch nirgends dicht in $\mathbb{Q}$: $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ aber $\overset{\circ}{\overline{\mathbb{Q}}} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

2.10 Das Cantorsche Diskontinuum. Sei f: $\{0;2\}^{\mathbb{N}} \to [0;1]$ definiert durch $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ für jede Folge $x = (x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in \{0;2\}$. Dann ist f injektiv und die überabzählbare Menge $T := f\left[\{0;2\}^{\mathbb{N}}\right]$ ist abgeschlossen und nirgends dicht in [0;1].

Beweis: Für $x \neq y$ und m das kleinste n mit $x_n \neq y_n$ sei o.B.d.A $x_m = 0$ und $y_m = 2$. Dann ist $|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{n\geq m} \frac{y_n - x_n}{3^n}\right| = \left|\frac{2}{3^m} + \sum_{n\geq m+1} \frac{y_n - x_n}{3^n}\right| \geq \left|\frac{2}{3^m} - \frac{2}{3^m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n}\right| = \left|\frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^m}\right| = \frac{1}{3^m}$ und f damit injektiv. Sei nun $a = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \in [0;1]\backslash T$ mit $a_n \in \{0;1;2\}$ und m das kleinste n mit $a_n = 1$. Für jedes $x \in \{0;2\}^{\mathbb{N}}$ gilt dann $|f(x) - a| \geq \left|\sum_{n\geq m} \frac{a_n - x_n}{3^n}\right| = \left|\frac{1}{3^m} + \sum_{n\geq m+1} \frac{a_n - x_n}{3^n}\right| \geq \left|\frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n}\right| = \left|\frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}}\right| = \frac{2}{3^m} =: \varepsilon$ und damit $B_\varepsilon(a) \cap T = \emptyset$. Also ist $[0;1]\backslash T$ offen und T abgeschlossen. Aus der obigen Abschätzung folgt aber auch umgekehrt, dass es für alle $x \in \{0;2\}^{\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ ein $a = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \in [0;1]\backslash T$ gibt mit $|f(x) - a| = \frac{1}{3^m}$. Man muss nur $a_n = x_n$ für $n \neq m$ und $a_m = 1$ wählen. Es gibt also keine inneren Punkte von T und aus der Abgeschlossenheit folgt, dass T nirgends dicht ist in [0;1].

3 Stetige Funktionen

3.1 Stetige Funktionen. f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ heißt **stetig**, wenn die **Urbilder offener Mengen** in $(Y,\mathcal{O}_Y)$ unter f wieder **offen** in $(X,\mathcal{O}_X)$ sind: $\forall\, O \in \mathcal{O}_Y$: $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$. Wegen $f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O)$ ist f genau dann stettig, wenn die **Urbilder abgeschlossener Mengen** in $(Y,\mathcal{O}_Y)$ unter f wieder abgeschlossen in $(X,\mathcal{O}_X)$ sind. Wegen $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[A_i]$ und $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[A_i]$ ist die Funktion f: $X \to Y$ schon genau dann stetig, wenn nur die Urbilder einer **Subbasis** $\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}_Y$ offen in $(X,\mathcal{O}_X)$ sind. $(X,\mathcal{O}_X)$ trägt genau dann die **diskrete Topologie**, wenn jede Abbildung f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig ist. $(Y,\mathcal{O}_Y)$ trägt genau dann die **indiskrete Topologie**, wenn jede Abbildung f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ stetig ist. $\mathcal{O}_2$ ist **feiner** als $\mathcal{O}_1$ genau dann, wenn die **Identität** id: $(X;\mathcal{O}_1) \to (X;\mathcal{O}_2)$ stetig ist. Für zwei Abbildungen f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ und g: $(Y,\mathcal{O}_Y) \to (Z,\mathcal{O}_Z)$ ist auch die **Verkettung** $g \circ f$: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Z,\mathcal{O}_Z)$ stetig.

3.2 Stetigkeit in einem Punkt. f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ heißt **stetig im Punkt** $\mathbf{x \in X}$, wenn die **Urbilder aller Umgebungen von f(x)** unter f wieder **Umgebungen von x** sind: $\forall\, U \in \mathcal{U}(f(x))$: $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. Wegen 2.2 ist f schon genau dann stetig im Punkt $x \in X$, wenn die Urbilder von Mengen einer **Umgebungsbasis** $\mathcal{B}(f(x))$ wieder zu einer **Umgebungsbasis** $\mathcal{B}(x)$ gehören: $\forall\, B \in \mathcal{B}(f(x))$: $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(x)$. f: $X \to Y$ ist genau dann stetig auf X, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

3.3 Beispiele: f: $(X,\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ heißt **halbstetig nach oben** an der Stelle $x \in X$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \mathcal{U}(x) : U \subset f^{-1}\left[]-\infty; f(x)+\varepsilon[\right]$. Die Funktion f: $(X,\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ ist genau dann halbstetig nach oben für alle $x \in X$, wenn sie stetig ist bezüglich der Topologie $\mathcal{O}^+ = \{]-\infty; a[\ : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset;\mathbb{R}\}$. Entsprechend heißt f **halbstetig nach unten** an der Stelle $x \in X$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U \in \mathcal{U}(x) : U \subset f^{-1}\left[]f(x)-\varepsilon; \infty[\right]$. Gilt dies für alle $x \in X$, so ist sie stetig bezüglich der Topologie $\mathcal{O}^- = \{]a; \infty[\ : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset;\mathbb{R}\}$. Sind f ,g: $X \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $x \in X$ bezüglich der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$, so gilt dies auch für $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max\{f;g\}$, $\min\{f;g\}$, $a \cdot f$ für $a \in \mathbb{R}$ und schließlich auch $\frac{1}{f}$, falls $f(x) \neq 0$.

3.4 Homöomorphismen. Eine Funktion f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ heißt **offen** bzw. **abgeschlossen**, wenn die Bilder offener bzw. abgeschlossenener Mengen aus $\mathcal{O}_X$ wieder offen bzw., abgeschlossen in $\mathcal{O}_Y$ sind. Wegen $f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$ ist f schon genau dann offen, wenn nur die Bilder einer **Basis** $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}_X$ offen in $(Y,\mathcal{O}_Y)$ sind. Entsprechend zu 3.2 gilt: f offen $\Leftrightarrow \forall\, x \in X\ \forall\, U \in \mathcal{U}(x)$: $f[U] \in \mathcal{U}(f(x))$. f heißt **Homöomorphismus**, wenn sie stetig, offen und bijektiv ist. Eine stetige Funktion f $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ ist also genau dann ein Homöomorphismus, wenn die Umkehrung f^{-1}: $(Y,\mathcal{O}_Y) \to (X,\mathcal{O}_X)$

existiert und stetig ist. Die toplogischen Räume $(X,\mathcal{O}_X)$ und $(Y,\mathcal{O}_Y)$ heißen dann **homöomorph**. Z.B. ist das offene Intervall $]-1;1[$ mittels $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ bzw. $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ bezogen auf die natürliche Topologie in beiden Räumen.

3.5 Satz. Sei f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ offen. Für jedes $B \subset Y$ und abgeschlossenes $A \subset X$ mit $f^{-1}[B] \subset A$ gilt dann $f^{-1}[\overline{B}] \subset A$.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $y \in \overline{B}$ und ein $x \in X \backslash A$ mit $f(x) = y$. Da $x \backslash A$ offen existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset X\backslash A$. Da f offen, ist $f[U] \in \mathcal{U}(y)$. Da y Berührungspunkt von B ist, gilt $\emptyset \neq f[U] \cap B \subset f[X]$ und daraus folgt $\emptyset \neq f^{-1}[f[U] \cup B] = f^{-1}[f[U]] \cup f^{-1}[B] \subset U \cup f^{-1}[B] \subset A$ im Widerspruch zu $U \subset X\backslash A$.

3.6 Satz. Sei f: $(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ abgeschlossen. Für jedes $B \subset Y$ und offenes $U \subset X$ mit $f^{-1}[B] \subset U$ gibt es ein offenes $V \supset B$ mit $f^{-1}[V] \subset U$.

Beweis. $V := Y\backslash f[X\backslash U]$ ist nach Voraussetzung offen und wegen $x\backslash U \subset f^{-1}[f\,[X \setminus U]]$ folgt $f^{-1}[V] = X \setminus f^{-1}[f\,[X \setminus U]] \subset U$. Außerdem gilt $f^{-1}[B] \subset U \Rightarrow B \subset f[U] \Rightarrow Y\backslash B \supset Y\backslash f[U] \supset f[X\backslash U] \Rightarrow B \subset Y\backslash f[X\backslash U] = W$.

4 Topologien auf Teil-, Produkt und Quotientenmengen

4.1 Produkttopologie. Die **Produkttopologie** auf dem Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ der topologischen Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ist die gröbste Topologie, für die alle **Projektionen** p_i: $\prod_{i\in I} X_i \to X_i$ stetig sind. Wegen $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} O_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left[O_i\right]$ und $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} O_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left[O_i\right]$ bilden die Urbilder $p_i^{-1}\left[O_i\right]$ offener Mengen $O_i \in \mathcal{O}_i$ schon eine **Subbasis** der Produkttopologie. Wegen 3.4 und $p_j\left(\bigcap_{i\in I} p_i^{-1}\left[O_i\right]\right) = O_j$ für $j \in I$ und X für $j \notin J$ sind die Projektionen p_i sogar **offen**. Wegen 3.1 ist eine Abbildung f: $Y \to \prod_{i\in I} X_i$ genau dann **stetig**, wenn die Urbilder $f^{-1}\left[p_i^{-1}\left[O_i\right]\right] = \left(p_i \circ f\right)^{-1}\left[O_i\right]$ von Subbasismengen offen in $(Y, \mathcal{O})$ sind. f ist also genau dann stetig, wenn alle **Komponenten** $p_i \circ f$: $(Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ stetig sind.

4.2 Unterraumtopologie. Die **Unterraum- oder Spurtopologie** $\mathcal{O}_A$ auf einer **Teilmenge** A des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ ist die gröbste Topologie, für die die **kanonischen Injektion** i_A: $A \to X$ stetig ist und besteht aus den Schnitten $i_A^{-1}[O] = O \cap A$ mit offenen Mengen $O \in \mathcal{O}$. Eine Abbildung g: $(Y, \mathcal{O}_Y) \to (A, \mathcal{O}_A)$ ist also genau dann stetig, wenn $i_A \circ g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ stetig ist. Für jede stetige Funktion f: $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist nach 3.1 auch ihre **Restriktion** $f \circ i_A = f|A$: $(A, \mathcal{O}_A) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig. Die Umkehrung gilt aber nur, wenn die Teilmengen A_i, auf denen die Restriktionen $f|A_i$: $(A_i, \mathcal{O}_{Ai}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, zumindest eine **Überdeckung** von X bilden, d.h., wenn $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ gilt. Sind alle A_i **offen**, so ist die Überdeckungseigenschaft alleine schon hinreichend, denn für eine offene Menge $O \in \mathcal{O}_Y$ ist dann auch $f^{-1}\left[O\right] = f^{-1}\left[O\right] \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left[O\right] \cap A_i = \bigcup_{i\in I} f|A_i^{-1}\left[O\right]$ offen in $\mathcal{O}_X$. Sind alle A_i **abgeschlossen**, so muss die Überdeckung zusätzlich mindestens **lokal-endlich** sein, d.h., zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$, die nur von endlich vielen A_i geschnitten wird. Dabei kann man annehmen, dass $x \in A_i$ für alle diese endlich vielen A_i. Ist dies für ein A_i nicht erfüllt, so kann man aufgrund der Abgeschlossenheit der A_i die Umgebung U durch Übergang auf $U \cap X\backslash A_i$ entsprechend verkleinern. Sei also $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset \bigcup_{i\in J} A_i$ und J endlich sowie $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Aufgrund der Stetigkeit der $f|A_i$ gibt es für jedes $i \in J$ ein $U_i \in \mathcal{U}(x)$ mit $f|A_i\left[U_i\right] \subset V$. Dann ist $W := \bigcap_{i\in J} U_i \cap U \in \mathcal{U}(x)$ schon die gesuchte Umgebung mit $f\left[W\right] \subset V$, denn für jedes $y \in W$ gibt es ein $i \in J$ mit $y \in U_i \cap A_i$ und daher $f(y) = f|A_i(y) \in V$.

4.3 Einbettungen. Eine Abbildung f: $X \to Y$ heißt **Einbettung** von X in Y, wenn f ein Homöomorphismus von X auf den Unterraum f[X] ist. f ist also genau dann eine Einbettung, wenn sie injektiv, stetig und offen ist. **Beispiele:** Die **Strecke** f: $[0;2\pi[\ \to [0;2\pi[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (x;0)$ ist eine Einbettung, aber der **Einheitskreis** g: $[0;\, 2\pi[\ \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (\sin(x);\cos(x))$ ist es nicht, weil das Bild jeder offenen Menge $[0;a[\ \subset [0;2\pi[$ mit $a < 2\pi$ weder offen noch abgeschlossen in S^1 ist. Die **offene Spirale** h: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = e^{it+t}$ ist dagegen wieder eine Einbettung.

4.4 Quotiententopologie. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und R eine **Äquivalenzrelation** auf X. Die **Quotiententopologie** ist die feinste Topologie, für die die **kanonischen Projektion** π:

$X \to X/R$ stetig ist. Eine Menge O von Äquivalenzklassen ist also genau dann offen bezüglich der Quotiententopologie, wenn die Menge $\pi^{-1}[O]$ aller Repräsentanten offen in $\mathcal{O}_X$ ist. Wegen 3.1 ist eine Abbildung $f\colon X/R \to Y$ genau dann **stetig**, wenn die Urbilder $\pi^{-1}[f^{-1}[O]] = (f \circ \pi)^{-1}[O]$ von offenen Mengen $O \in \mathcal{O}_Y$ offen in $\mathcal{O}_X$ sind. f ist also genau dann stetig, wenn $f \circ \pi\colon X \to Y$ stetig ist.
Beispiel: Für die Äquivalenzrelation R mit $(x;y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ ist der Quotientenraum $\mathbb{R}/R$ homöomorph zum Einheitskreis.

4.5 Identifizierungstopologie. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ lässt sich mittels der Äquivalenzrelation R mit $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ in die **stetige Projektion** $\pi\colon X \to X/R$, die **stetige Bijektion** $\overline{f} := f \circ \pi^{-1}\colon X/R \to f[X]$ sowie die **stetige Injektion** $j\colon f[X] \to Y$ zerlegen. Dabei trägt $X/R \subset X$ die **Quotiententopologie** und $f[X] \subset Y$ die **Spurtopologie**. Die Stetigkeit der drei Komponenten folgt dementsprechend aus 4.2 und 4.4. Ist die stetige Bijektion $\overline{f}$ zusätzlich **offen** und damit ein **Homöomorphismus**, so heißt f **identifizierende Abbildung**. Ist f außerdem **surjektiv**, so nennt man die Topologie auf $f[X] = Y$ **Identifizierungstopologie** bezüglich f . Ist $f\colon X \to Y$ stetig, surjektiv und offen oder abgeschlossen, so trägt Y die Identifizierungstopologie bezüglich f, weil in diesem Fall für offene bzw. abgeschlossene Mengen A in X/R auch die entsprechenden Repräsentantenmengen $\pi^{-1}[O]$ offen bzw. abgeschlossen in X und daher auch die Bilder $\overline{f}[A] = f[\pi^{-1}[A]]$ offen bzw. abgeschlossen in $f[X] = Y$ sind.

4.6 Beispiele. $f\colon [0;2\pi] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (\sin(x);\cos(x))$ ist stetig, abgeschlossen und surjektiv und daher ist $[0;2\pi]/R$ mit der Quotiententopologie homöomorph zum **Einheitskreis**. Wie in 4.3 festgestellt, ist $[0;2\pi[$ mit der Spurtopologie aber **nicht** homöomorph zum Einheitskreis. $g\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\} \to S^2$ mit $g(x) = \frac{(x_1;x_2;x_3)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ ist stetig, abgeschlossen und surjektiv und daher ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}/R$ mit der Quotiententopologie homöomorph zur **Einheitssphäre**.

4.7 Topologische Summe. Die **topologische Summe** auf der Summe $\bigcup_{i\in I} X_i$ der **disjunkten** topologischen Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ist die feinste Topologie, für die alle **Injektionen** $j_i\colon \bigcup_{i\in I} X_i \to X_i$ stetig sind. Eine Menge $O \subset \bigcup_{i\in I} X_i$ ist also genau dann offen, wenn $O \cap X_i$ für jedes $i \in I$ offen in $\mathcal{O}_i$ ist. Sind die X_i nicht disjunkt, so bringt man sie mittels **Indexierung** in getrennten Dimensionen unter, d.h. man geht über zu der Familie $(X_i \times \{i\}, \bigcup \mathcal{O}_i \cup \{i\})_{i\in I}$ (Beachte die Bedeutung der nicht indexierten Vereinigung gemäß 1.1). Die **Spurtopologie** auf $X_i \subset \bigcup_{i\in I} X_i$ entspricht dann wieder der ursprünglichen Topologie $\mathcal{O}_i$.

4.8 Zusammenkleben von Räumen. Für zwei **disjunkte** topologische Räume X und Y sowie ein Abbildung $f\colon A \to Y$ auf der **abgeschlossenen** Teilmenge $A \subset X$ sei eine Äquivalenzrelation R auf $X \cup Y$ wie folgt erklärt: $(x;y) \in R \Leftrightarrow x = y$ oder $f(x) = f(y)$ oder $x = f(y)$ oder $y = f(x)$. Der Quotientenraum $Y \cup_f X := (X \cup Y)/R$ heißt der durch **Zusammenkleben von X und Y mittels f** entstandene Raum. Beim Übergang von $X \cup Y$ zu $Y \cup_f X$ wird also jeder Punkt aus $f[A]$ mit allen seinen Urbildern identifiziert und die Klebestelle $A \subset X$ wird auf diese Weise mit $f[A] \subset Y$ verschmolzen.

4.9 Beispiele. Allgemein unterscheidet man die **n-dimensionale Zelle** $e^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, den **n-dimensionalen Ball** $D^n = \overline{e^n}$ und die **n−1 - dimensionale Sphäre** $S^{n-1} := D^n \setminus e^n$. $[2;3] \cup_f [0;1]$ ist mit $A = \{0\} \cup \{1\}$ und $f(0) = 1$ sowie $f(1) = 3$ homöomorph zum **Einheitskreis** S^1. $\{(2;2)\} \cup_f D^2$ ist mit $A = S^1$ und $f(A) = (2;2)$ homöomorph zur **Einheitssphäre** S^2. $D^2 \cup_{id} D^2$ ist mit $A = S^1$ ebenfalls homöomorph zur **Einheitssphäre** S^2. $M := [0;1] \cup_f [0;1]^2$ ist mit $A = \{0;1\} \times [0;1]$ und $f(0;y) = y$ sowie $f(1;y) = 1 - y$ homöomorph zum **Möbiusband**. Der **Rand** $\partial M = \{(x;y) \in M\colon y = 0 \text{ oder } 1\}$ ist wegen $f(0;0) = f(1;1) = 0$ und $f(0;1) = f(1;0) = 1$ homöomorph zum **Einheitskreis** S^1. Mittels solche eines Homöomorphismus $g\colon S^1 \to \partial M$ läßt sich die Einheitskreisscheibe D^2 mit dem Möbiusband verkleben und der damit konstruierte Raum $M \cup_g D^2$ ist widerum homöomorph zur **projektiven Ebene** P^2.

5 Zusammenhängende Räume

5.1 Zusammenhang. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegt werden kann. Er ist also genau dann zusammenhängend, wenn

$\emptyset$ und X die einzigen zugleich offen und abgeschlossenen Mengen in X sind. $(X, \mathcal{O})$ ist ebenfalls genau dann zusammenhängend, wenn es eine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum mit mindestens zwei Punkten gibt. Für einen zusammenhängende Menge X ist auch ihr Bild f[X] unter einer stetigen Funktion f: X $\to$ Y zusammenhängend. Insbesondere nimmt jede stetige Funktion f: X $\to \mathbb{R}$ auf einer zusammenhängenden Menge X mit $s < t \in f[X]$ auch jeden dazwischenliegenden Wert an (**Zwischenwertsatz**). Für eine zusammenhängende Menge A ist auch jede Menge B mit $A \subset B \subset \overline{A}$ zusammenhängend, denn jede offene Menge, die Berührungspunkte von A enthält, schneidet auch A selber. Enthält eine zusammenhängende Menge sowohl innere als auch äußere Punkte einer Menge B, so enthält sie auch Randpunkte von B, weil sonst $\overset{o}{B}$ und $\overset{o}{X \setminus B}$ eine disjunkte offene Überdeckung darstellen würden. Haben zwei zusammenhängende Mengen A und B einen nichtleeren Schnitt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch ihre Vereinigung $A \cup B$ zusammenhängend.

5.2 Satz. Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend bezüglich der natürlichen Topologie.

Beweis: Sei zunächst I offen. O_1 und O_2 seien zwei offene disjunkte Mengen in $\mathbb{R}$, welche beide I schneiden und es außerdem überdecken. Seien $u \in O_1 \cap I$ und $v \in O_2 \cap I$ mit $u < v$ und $s := \sup\{w \in I: [u;w] \subset O_1\}$. Es folgt $u < s < v$ und aufgrund des Intervallcharakters von I ist $s \in I$ und liegt damit entweder in O_1 oder in O_2. Da I offen, liegt dann auch eine 2ε-Umgebung $B_{2\varepsilon}(s)$ entweder in O_1 oder in O_2. Im ersten Fall ist $[u;s+\varepsilon] \subset O_1$ und s ist keine obere Schranke. Im zweiten Fall ist dann $[u;s-\varepsilon] \nsubseteq O_1$ und s ist keine kleinste obere Schranke. Wegen 5.1 lässt sich der Zusammenhang auf beliebige Intervalle übertragen.

5.3 Beispiele. Eine **stetige reellwertige** Funktion $f = \{(x;f(x)): x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ auf dem **Intervall** $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend in $\mathbb{R}^2$, weil sie als Bild der **Bahnkurve** k: $I \to \mathbb{R}^2$ mit $k(x) = (x;f(x))$ aufgefasst werden kann, welche nach dem letzten Satz in 4.1 wieder stetig ist. Insbesondere gilt dies für $I =]0;1]$ und $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)|I$. Wegen 5.1 ist auch der **Abschluß** $\overline{f} = f \cup \{0\} \times [-1;1]$ zusammenhängend. Für $I = [-1;1] \setminus \{0\}$ gilt dies nicht mehr, weil die rechte Halbebene $H_+ = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x > 0\}$ und die linke Halbebene $H_- = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2: x < 0\}$ eine offene disjunkte Überdeckung von f bilden. Durch Hinzunahme eines beliebigen **Berührungspunktes** (0;a) mit $-1 \leq a \leq 1$ kann der Zusammenhang wieder hergestellt werden.

5.4 Zusammenhangskomponenten. Eine **einfache Kette** zwischen zwei Punkten a und b eines topologischen Raumes X ist eine endliche Folge offener Mengen $U_1, ..., U_n$, so dass nur die erste Menge a enthält, nur die letzte Menge b enthält und jede Menge nur die unmittelbar benachbarten Mengen schneidet. a und b heißen **zusammenhängend** , wenn es zu **jeder Überdeckung** $\mathcal{U}$ von X durch offene Mengen eine offene Kette aus Elementen von $\mathcal{U}$ zwischen a und b gibt. Der Zusammenhang zwischen zwei Punkten auf X ist eine **Äquivalenzrelation** und die Äquivalenzklasse eines Punktes $x \in X$ heißt **Zusammenhangskomponente** K(x). Die Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und daher offen und abgeschlossen zugleich. Sie bilden insbesondere eine offene und disjunkte Überdeckung von X. Ein $y \notin K(x)$ kann also nicht gemeinsam mit x in einer zusammenhängenden Menge liegen. K(x) besteht daher aus der **Vereinigung aller zusammenhängender Mengen**, die x enthalten. Jede offene und abgeschlossene Menge, die x enthält, muss auch K(x) enthalten. K(x) liegt also im Duchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen, welche x enthalten. Dass K(x) nicht gleich diesem Durchschnitt ist, zeigt das folgenden Beispiel:

5.5 Beispiel: Die Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$ enthalte die Punkte $u := (0;0)$, $v := (0;1)$ sowie alle Strecken $s_n := \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0;1]$ für $n \in \mathbb{N}^\star$ und sei versehen mit der Spurtopologie in $\mathbb{R}^2$. Weil alle s_n offene und abgschlossene, zusammenhängende, disjunkte Teilmengen sind, muss $K(u) = \{u\}$ und $K(v) = \{v\}$ gelten. Jede offene und abgeschlossene Teilmenge M, die u enthält, schneidet unendlich viele s_n und enthält aufgrund des Zusammenhangs der s_n damit auch schon diese s_n. Dann aber ist v Berührungspunkt von M und aufgrund ihrer Abgeschlossenheit ist v sogar in M enthalten.

5.6 Zusammenhang von Produktmengen. $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle $X_i$zusammenhängend sind.

Beweis. $\Rightarrow$ folgt aus der Stetigkeit der Projektionen und 5.1. Für$\Leftarrow$ zeigen wir, dass die Zusammenhangskomponenten K(a) eines beliebigen Punktes $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ dicht in X ist und wenden wieder 5.1 an. Sei dazu $U := \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(U_k)$ mit U_k offen in X_k und endlichem $K \subset \mathbb{N}$ eine beliebige Elementarmenge der Produkttopologie auf X. O.B.d.A sei $K = \{1; ...;n\}$ und

$E_1 = \{x \in X : x_1 \in X_1 \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst}\}$,

$E_2 = \{x \in X : x_1 = b_1,\ x_2 \in X_2 \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst}\}$,

...,

$E_n = \{x \in X : x_1 = b_1,\ ...,\ x_{n-1} = b_{n-1},\ x_n \in X_n \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst}\}$

mit $b_k \in U_k$ für $k \in K$. Die E_i sind homöomorph zu den X_i und wegen 5.1 daher zusammenhängend. Außerdem ist $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$ und wieder nach 5.1 damit $A := \bigcup_{1 \le i \le n} E_i$ ebenfalls zusammenhängend. Wegen $a \in E_1 \subset A$ folgt daraus $A \subset K(a)$ und weiter $\emptyset \neq U \cap E_n \subset U \cap A \subset U \cap K(a)$. K(a) schneidet also jede Elementarmenge U und liegt daher dicht in X.

5.7 Zusammenhangskomponenten in Produktmengen. Für jedes $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ist K(x) $= \prod_{i \in I} K(x_i)$.

Beweis: Nach 5.6 ist $\prod_{i \in I} K(x_i)$ zusammenhängend und enthält x, woraus $\prod_{i \in I} K(x_i) \subset K(x)$ folgt. Andererseits ist mit K(x) auch jedes $p_i(K(x))$ zusammenhängend und enthält x_i. Daraus folgt $p_i(K(x)) \subset K(x_i)$ für alle $i \in I$ und damit $K(x) \subset \prod_{i \in I} K(x_i)$.

5.8 Wegzusammenhang. Eine stetige Abbildung f: $I \to X$ des abgeschlossenen Intervalles $I := [0;1] \subset \mathbb{R}$ in den topologischen Raum X heißt **Weg** und X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x;y \in X$ einen Weg f mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gibt. Da mit I auch das stetige Bild f[I] zusammenhängend ist, muss jeder wegzusammenhängende Raum auch zusammenhängend sein. Die Umkehrung gilt nicht, denn z.B. der Abschluß $\overline{f}$ aus Beispiel 5.3 ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend. Eine Abbildung g: $[0;1] \to \overline{f}$ mit $g(0) = (0;0)$ und $g(0) \neq g(1) \in \overline{f}$ beliebig kann in $x = 0$ nicht stetig sein, weil für jedes noch so kleine $\delta > 0$ ein $x < \delta$ existiert mit $||g(x) - g(0)|| = ||g(x)|| > 1$. Der Weg ist unendlich lang und muss in jeder Umgebung $B_\delta(0)$ des Argumentes $x = 0$ die Umgebung $B_1(0;0)$ des Wertes (0;0) verlassen. An diesem Beispiel sieht man auch, dass der **Abschluss** eines wegzusammenhängenden Raumes nicht mehr wegzusammenhängend sein muss.

5.9 Lokaler Wegzusammenhang. Ein topologischer Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine darunterliegende wegzusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von x gibt. Ist X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist X auch (global) wegzusammenhängend, denn aus der offenen Überdeckung von X durch die wegzusammenhängenden Umgebungen aller Punkte kann wegen 5.4 für zwei beliebige Punkte $x;y \in X$ eine endliche Kette wegzusammenhängender Mengen ausgewählt werden, deren Vereinigung wieder wegzusammenhängend ist und x sowie y enthält.

5.10 Beispiel. $X := \{0\} \times [0;1] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \{(x;nx) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{x}{n}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend und wegzusammenhängend (vgl. 5.8!), aber nicht lokal zusammenhängend, weil jede Umgebung eines Punktes (0;t) mit $0 \le t < 1$ auf der senkrechten Strecke unendlich viele der schrägen Strecken trifft und daher nur dann zusammenhängend ist, wenn sie den Knotenpunkt (0;0) dieser unendlich vielen Geradenstücke enthält.

6 Filter und Konvergenz

6.1 Filter. Ein **Filter** $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X, welches mit zwei Mengen F_1 und F_2 auch ihren **nichtleeren Durchschnitt** $F_1 \cap F_2$ sowie mit einer Menge F_1 auch jede **darüberliegende Menge** $F_2 \supset F_1$ und damit insbesondere X enthält. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ heißt **Filterbasis** für $\mathcal{F}$, wenn jede Menge aus $\mathcal{F}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält. Ein Mengensystem ist also genau dann eine Filterbasis, wenn in jedem nichtleeren Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ eine weitere nichtleere Menge aus $\mathcal{B}$ enthalten ist.

6.2 Beispiele. Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ bildet das System aller A enthaltenden Mengen einen Filter. Ist $A = \{x\}$ eine einpunktige Menge, so enthält dieser Filter das Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$, welches selbst wieder einen Filter darstellt und daher auch **Umgebungsfilter** genannt wird. Für eine **Folge** $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ bilden die „Schwänze“ $B_k := \{x_i : i \geq n\}$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Basis für den **von der Folge erzeugten Filter**. Die Folge **konvergiert** genau dann gegen x, wenn der von der Folge erzeugte Filter den Umgebungsfilter von x enthält. (siehe 6.7)

6.3 Ultrafilter. Gilt für zwei Filter $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, so ist $\mathcal{F}_1$ **gröber** als $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_2$ **feiner** als $\mathcal{F}_1$. Ein Filter heißt **Ultrafilter**, wenn er in keinem anderen Filter auf X echt enthalten ist.

6.4 Satz. Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

Beweis. Die Menge Φ aller Filter, die feiner als der gegebene Filter $\mathcal{F}$ sind, wird durch die Inklusion $\subset$ induktiv geordnet, denn jede linear geordnete Teilmenge Φ_0 von Φ besitzt die obere Schranke $\bigcup \Phi_0 \in \Phi$. Nach dem Zorn'schen Lemma (siehe z.B. [4] 14.2.4) gibt es daher ein maximales Element $\mathcal{G}$ von Φ, welches der gesuchte Ultrafilter ist.

6.5 Satz. $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter auf X, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X\backslash A \in \mathcal{F}$ gilt.

Beweis. Wegen $A \cap X\backslash A = \emptyset$ kann es in $\mathcal{F}$ keine zwei Mengen $F_1 \subset A$ und $F_2 \subset X\backslash A$ geben. Alle Elemente aus $\mathcal{F}$ treffen entweder A oder $X\backslash A$. Sei o.B.d.A. der erste Fall angenommen, dann ist $\{F \cap A\colon F \in \mathcal{F}\}$ eine Basis für einen Filter $\mathcal{G}$, welcher feiner als $\mathcal{F}$ ist und A enthält. Da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ und somit $A \in \mathcal{F}$. Umgekehrt sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der jede Teilmenge oder ihr Komplement in X enthält. Für einen Filter $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$ gibt es dann ein $A \in \mathcal{G}\backslash\mathcal{F}$, woraus nach Annahme folgt $X\backslash A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ und dann kann $\mathcal{G}$ kein Filter sein.

6.6 Fixierte und freie Filter. Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **frei**, wenn $\bigcap\mathcal{F} = \emptyset$ und **fixiert**, wenn $\bigcap\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ein Filter $\mathcal{F}$ ist also genau dann ein **fixierter Ultrafilter**, wenn $\mathcal{F} = \{F \subset X\colon x \in F\}$ für ein $x \in X$. (vgl. 6.2)

6.7 Konvergenz. Ein Filter $\mathcal{F}$ **konvergiert** gegen $x \in X$, wenn er den Umgebungsfilter von x enthält. Man schreibt $\mathcal{F} \to x$ und nennt x auch **Limespunkt** von $\mathcal{F}$ (vgl. 6.2). $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** des Filters $\mathcal{F}$, wenn x Berührungspunkt für jedes Element $F \in \mathcal{F}$ ist. Die Menge der Berührungspunkte von $\mathcal{F}$ ist also $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$. (vgl 2.7)

6.8 Beispiele. Der von der Basis $\mathcal{B} = \{]a;\infty[\colon A \in \mathbb{R}\}$ erzeugte **Fréchet-Filter** ist **frei** und besitzt keine Berührungspunkte. Ein Punkt ist genau dann **Häufungspunkt einer Folge**, wenn er Berührungspunkt des von ihr erzeugten Filters ist. Für eine nichtleere Menge A besteht ihr Abschluss $\overline{A}$ aus den Berührungspunkten des von ihr erzeugten Filters $\mathcal{F} = \{F \subset X\colon A \subset F\}$. Ein Punkt x ist genau dann ein Berührungspunkt des Filters $\mathcal{F}$, wenn es einen **feineren Filter** $\mathcal{G}$ gibt, der gegen x **konvergiert**. $\mathcal{G}$ lässt sich durch die Basis $\mathcal{B} = \{F \cap U\colon F \in \mathcal{G} \wedge U \in \mathcal{U}(x)\}$ erzeugen bzw. enthält diese Basis schon. Ein **Ultrafilter** konvergiert daher gegen seine Berührungspunkte.

6.9 Stetigkeit. Das **Bild** $f(\mathcal{F})$ eines Filters $\mathcal{F}$ unter der Abbildung $f\colon X \to Y$ ist der Filter auf Y, der von $\mathcal{B} = \{f[F]\colon F \in \mathcal{F}\}$ erzeugt wird. Wegen $f[F] \cap f[G] \supset f[F\cap G]$ ist $\mathcal{B}$ nämlich eine Filterbasis. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. $f\colon X \to Y$ ist stetig im Punkt $x \in X$.
2. Das Bild $f(\mathcal{U}(x))$ des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$ enthält den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(f(x))$ des Bildes: $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$.
3. Das Bild $f(\mathcal{F})$ eines jeden gegen x konvergierenden Filters $\mathcal{F}$ konvergiert gegen $f(x) : \mathcal{F} \to x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

6.10 Konvergenz auf Produkträumen. Eine Filter $\mathcal{F}$ auf dem Produktraum $X = \prod_{i\in I} X_i$ konvergiert genau dann gegen ein $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, wenn die **Bildfilter unter den Projektionen** $p_i(\mathcal{F})$ für alle $i \in I$ gegen x_i konvergieren.

Beweis.

$\Leftarrow$: Falls alle Bildfilter konvergieren, gibt es für jedes $i \in I$ und $U_i \in \mathcal{U}(x_i)$ ein $F_i \in \mathcal{F}$ mit $p_i(F_i) \subset U_i$ und für eine Elementarmenge $U := \bigcap_{i\in K} p_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{U}(x)$ mit K endlich ist dann $F := \bigcap_{i\in K} F_i \in \mathcal{F}$ mit $F \subset U$, also $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F} \to x$.

$\Rightarrow$: folgt aus der Stetigkeit der Projektionen und 6.9.

6.11 Spurfilter. Die Spur $\mathcal{F} \cap \mathrm{A} = \{\mathrm{F} \cap \mathrm{A}: \mathrm{F} \in \mathcal{F}\}$ eines Filters $\mathcal{F}$ mit einer nichtleeren Teilmenge $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ bildet genau dann einen Filter auf A, wenn A alle Filtermengen F schneidet. $\mathcal{F} \cap \mathrm{A}$ heißt dann **Spurfilter**. Für einen **Ultrafilter** ist $\mathcal{F} \cap \mathrm{A}$ genau dann ein Filter auf A, wenn $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F} \cap \mathrm{A}$ ist dann sogar ein Ultrafilter auf A. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. $\mathrm{x} \in \overline{\mathrm{A}}$.
2. Die Spur $\mathcal{U}(\mathrm{x}) \cap \mathrm{A}$ ist ein Filter.
3. Es gibt einen Filter auf A , dessen Bild unter der Injektion j: $\mathrm{A} \to \mathrm{X}$ gegen x konvergiert.

7 Trennungseigenschaften

7.1 Trennungseigenschaften. Ein topologischer Raum heißt

- $\mathbf{T_1}$**-Raum**, wenn von zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung beitzt, die den anderen Punkt nicht schneidet.
- $\mathbf{T_2}$- oder **Hausdorff-Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkten aus X disjunkte Umgebungen besitzen.
- $\mathbf{T_3}$**-Raum**, wenn jede abgeschlossene Menge $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ und jeder Punkt $\mathrm{x} \in \mathrm{X}\backslash\mathrm{A}$ disjunkte Umgebungen besitzen und **regulär**, wenn zusätzlich $\mathbf{T_1}$ gilt.
- $\mathbf{T_{3a}}$**- Raum**, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ und jedem $\mathrm{x} \in \mathrm{X}\backslash\mathrm{A}$ eine stetige Funktion f: $\mathrm{X} \to [0;1]$ mit $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 1$ sowie $\mathrm{f}[\mathrm{A}] = 0$ gibt und **vollständig regulär**, wenn zusätzlich $\mathbf{T_1}$ gilt.
- $\mathbf{T_4}$**- Raum**, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen auch disjunkte Umgebungen gibt und **normal**, wenn zusätzlich $\mathbf{T_1}$ gilt.

7.2 Trennungseigenschaften metrischer Räume. Metrische Räume erfüllen alle Trennungseigenschaften. Darüberhinaus lassen sich zwei abgeschlossene disjunkte Mengen A und B durch eine stetige Funktion f: $\mathrm{X} \to [0;1]$ mit $\mathrm{f}[\mathrm{A}] \subset \{0\}$ und $\mathrm{f}[\mathrm{B}] \subset \{1\}$ trennen.

Beweis. Für den Nachweis von T_4 seien A und B abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es für jedes $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ ein $\varepsilon(\mathrm{x}) > 0$, so dass $\mathrm{B}_{2\varepsilon(\mathrm{x})}(\mathrm{x}) \cap \mathrm{B} = \emptyset$ und für jedes $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$ ein $\varepsilon(\mathrm{x}) > 0$, so dass $\mathrm{B}_{2\varepsilon(\mathrm{x})}(\mathrm{x}) \cap \mathrm{A} = \emptyset$ und die offenen Mengen $\bigcup_{\mathrm{x}\in\mathrm{A}} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ sowie $\bigcup_{\mathrm{x}\in\mathrm{B}} \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ trennen A und B. Für jedes (nicht notwendigerweise abgeschlossenes!) $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ ist $\mathrm{d_A}$: $\mathrm{X} \to \mathbb{R}^+$ mit $\mathrm{d_A}(\mathrm{x}) := \inf\{\mathrm{d}(\mathrm{y};\mathrm{x}): \mathrm{y} \in \mathrm{A}\}$ stetig, denn für ein $\mathrm{x}_0 \in \mathrm{d}_\mathrm{A}^{-1}\,]\mathrm{a};\mathrm{b}[$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{a} + 2\varepsilon < \mathrm{d_A}(\mathrm{x}_0) < \mathrm{b} - 2\varepsilon$ und damit $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}_0) \subset \mathrm{d}_\mathrm{A}^{-1}\,]\mathrm{a};\mathrm{b}[$, d.h. $\mathrm{d}_\mathrm{A}^{-1}\,]\mathrm{a};\mathrm{b}[$ ist offen in X. Wegen 3.3 ist dann auch $\mathrm{f}(\mathrm{x}) := \frac{\mathrm{d_A}(\mathrm{x})}{\mathrm{d_A}(\mathrm{x})+\mathrm{d_B}(\mathrm{x})}$ stetig mit $\mathrm{f}[\mathrm{A}] \subset \{0\}$ und $\mathrm{f}(\mathrm{B}) \subset \{1\}$. Wegen $\mathrm{d_A}(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \overline{\mathrm{A}}$ müssen A und B nicht unbedingt abgeschlossen sein, dürfen aber keinen gemeinsamen Berührungspunkt enthalten. Die anderen Trennungseigenschaften folgen aus der Abgeschlossenheit von Punkten in metrischen Räumen.

7.3 Trennungseigenschaften in Unterräumen. Alle Trennungseigenschaften außer T_4 übertragen sich auf beliebge Unterräume. T_4 überträgt sich nur auf abgeschlossenen Unterräume.

Beweis. Für den Nachweis von T_3 sei A abgeschlossen im Unterraum X des T_3-Raumes Y und $\mathrm{x} \in \mathrm{X}\backslash\mathrm{A}$. Dann gibt es eine Umgebung U von x im übergeordneten Raum Y, welche A nicht schneidet, d.h., x ist auch im übergeordneten Raum Y kein Berührungspunkt von A und lässt sich von dem Abschluss $\overline{\mathrm{A}}$ in Y durch offenen Mengen trennen. Die Schnitte dieser offenen Mengen mit X trennen A und x in X. Für den Nachweis von $\mathrm{T}_{3\mathrm{a}}$ argumentiert man wie oben mit der stetigen Funktion f: $\mathrm{Y} \to [0;1]$ mit $\mathrm{f}\left[\overline{\mathrm{A}}\right] \subset \{0\}$ sowie $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 1$, deren Restriktion f|X auf X stetig ist und $\mathrm{f}|\mathrm{X}[\mathrm{A}] \subset \{0\}$ sowie $\mathrm{f}|\mathrm{X}(\mathrm{x}) = 1$ erfüllt. Die Nachweise von T_1 und T_2 sind trivial. Für den Nachweis von T_4 verwendet man die Tatsache, dass abgeschlossenen Teilmengen A und B eines abgeschlossenen Unterraumes $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ auch abgeschlossen im übergeordneten Raum Y sind.

7.4 $\mathbf{T_1}$**-Räume**. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein $\mathbf{T_1}$-Raum
2. Jede einpunktige Menge ist abgeschlossen
3. Jede Teilmenge ist der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

7.5 $\mathbf{T_2}$-Räume. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein $\mathbf{T_2}$-Raum.
2. Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.
3. Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich der Menge $\{x\}$.
4. Die Diagonale Δ ist abgeschlossen in X^2.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2. Zwei verschiedene Limespunkte ließen sich mit disjunkten Umgebungen trennen, die beide zu $\mathcal{F}$ gehören müssten.

2. $\Rightarrow$ 3. Enthielte der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen einen weiteren Punkt, so hätte der Umgebungsfilter von x einen weiteren Berührungspunkt y und nach 6.8 gäbe es einen feineren Filter, der zusätzlich gegen y konvergierte.

3. $\Rightarrow$ 4. Angenommen, Δ wäre nicht abgeschlossen, dann gäbe es zwei Punkte $x \neq y$, so dass $(x;y) \notin \Delta$ Berührungspunkt von Δ ist. Jede Umgebung $U \times V$ mit $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ schneidet also Δ $\Leftrightarrow$ jede Umgebung von x schneidet jede Umgebung von y $\Leftrightarrow$y ist Berührungspunkt aller Umgebungen von x und liegt damit i Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen.

4. $\Rightarrow$ 1. Gäbe es zwei Punkte $x \neq y$, die sich nicht durch Umgebungen trennen ließen, so wäre $(x;y) \notin \Delta$ Berührungspunkt der Diagonalen Δ.

7.6 Beispiel. Jeder T_2-Raum ist offensichtlich auch ein T_1-Raum. Die Umkehrung gilt aber nicht: Eine unendliche Menge X trage die **cofinite Topologie** aller Komplemente endlicher Mengen. Für zwei Punkte $x;y \in X$ ist $X\backslash\{x;y\}$ eine Umgebung von sowohl x als auch y, welche den jeweils anderen Punkt nicht trifft. Da im Komplement einer offenen Menge keine weitere offene Menge liegen kann, gibt es aber keine zwei disjunkten offenen Mengen um x und y. Die cofinite Topologie erfüllt also T_1, aber nicht T_2.

7.7 $\mathbf{T_3}$-Räume. Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_3-Raum, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden. Wie man am Beispiel der **indiskreten Topologie** auf einer mehr als einpunktigen Menge sieht, muss ein T_3-Raum weder ein T_1-Raum noch ein T_2-Raum sein. **Reguläre** Räume sind wegen 7.4.2 **hausdorffsch**.

7.8 $\mathbf{T_{3a}}$-Räume. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein $\mathbf{T_{3a}}$-Raum.
2. Die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen f: $X \to [0;1]$ bilden eine Basis der Topologie von X.
3. Jede abgeschlossene Menge ist der Durchschnitt von Nullstellenmengen stetiger Funktionen f: $X \to [0;1]$.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2. O offen in $X \Rightarrow O = \bigcup_{x \in O} \{f_x^{-1}[[0;1[] : f_x : X \to [0;1] \text{ stetig mit } f_x[X \setminus A] \subset \{0\} \text{ und } f_x(x) = 1\}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sei A abgeschlossen in X, dann gibt es nach Voraussetzung für alle $x \in X\backslash A$ eine offene Menge $U_x \subset [0;1]$ und ein stetiges f_x: $X \to [0;1]$ mit $x \in f_x^{-1}[U_x] \subset X\backslash A$. Da $\mathbb{R}$ vollständig regulär ist, gibt es weiterhin ein stetiges g_x: $\mathbb{R} \to [0;1]$ mit $g_x(x) = 1$ und $g_x[\mathbb{R} \setminus U_x] \subset \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus U_x \subset g_x^{-1}(0) \Leftrightarrow A \subset X\backslash f_x^{-1}[U_x] = f_x^{-1}[\mathbb{R} \setminus U_x] \subset (g_x \circ f_x)^{-1}(0)$. Dann ist $A = \bigcap_{x \in X\backslash A} (g_x \circ f_x)^{-1}(0)$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sei A abgeschlossen in X und $x_0 \in X\backslash A$. Nach Voraussetzung muss es eine stetige reellwertige Funktion g geben mit $g[A] \subset \{0\}$ und $g(x_0) \neq 0$. $f(x) := \frac{g(x)}{g(x_0)}$ ist dann die gesuchte Funktion.

7.9 Satz. Ein vollständig regulärer Raum kann in ein Produkt $[0;1]^{\mathrm{I}}$ mit geeigneter Indexmenge I eingebettet werden.

Beweis. Sei I die Menge der stetigen Funktionen i: X $\to$ [0;1] und e: X $\to [0;1]^{\mathrm{I}}$ definiert durch e(x) = $(\mathrm{i}(\mathrm{x}))_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$. Dann ist e injektiv, denn wegen T_1 sind Punkte abgeschlossen in X und wegen T_{3a} gibt es daher für je zwei verschiedene Punkte x $\neq$ y in X ein i $\in$ I mit 0 = i(x) $\neq$ i(y) = 1. Aus der Stetigkeit der Komponenten $\mathrm{p_i} \circ \mathrm{e} = \mathrm{i}$ folgt mit 4.1 auch die Stetigkeit von e. Nach 7.8.2 bilden die Mengen $\mathrm{i}^{-1}[\mathrm{U}]$ mit i $\in$ I und U offen in [0;1] eine Basis der Topologie auf X. Wegen $\mathrm{e}\left[\mathrm{i}^{-1}[\mathrm{U}]\right] = \left(\mathrm{p_i}^{-1} \circ \mathrm{i}\right)\left[\mathrm{i}^{-1}[\mathrm{U}]\right] = \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{U}]$ offen in $[0;1]^{\mathrm{I}}$ und 3.4 ist e offen.

7.10 Trennungseigenschaften in Produkträumen. Alle Trennungseigenschaften außer T_4 übertragen sich auf Produkträume.

Beweis: T_1 und T_2 ergeben sich aus der Tatsache, dass $\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}} \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{U_i}]$ mit $\mathrm{U_i} \in \mathcal{U}(\mathrm{x_i})$ schon für endliche K eine Umgebungsbasis für $\mathrm{x} = (\mathrm{x_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{X_i}$ bilden. Für den Nachweis von T_3 verwendet man zweimal 7.7: Nach Voraussetzung gibt es für jede Basisumgebung $\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}} \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{U_i}]$ mit $\mathrm{U_i} \in \mathcal{U}(\mathrm{x_i})$ abgeschlossene $\mathrm{A_i}$ und offene $\mathrm{V_i} \in \mathcal{U}(\mathrm{x_i})$ mit $\mathrm{V_i} \subset \mathrm{A_i} \subset \mathrm{U_i}$. Dann ist $\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}} \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{A_i}] \subset \bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}} \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{U_i}]$ abgeschlossen und enthält $\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}} \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{V_i}] \in \mathcal{U}(\mathrm{x})$ und ist daher abgeschlossene Umgebung von x. Für den Nachweis von T_{3a} sei $\bigcap_{\mathrm{i}\in\mathrm{K}} \mathrm{p_i}^{-1}[\mathrm{U_i}]$ eine Umgebung von x, die A nicht schneidet. Aus den stetigen $\mathrm{f_i}$: $\mathrm{X_i} \to$ [0;1] mit $\mathrm{f_i}[\mathrm{X_i} \setminus \mathrm{U_i}] \subset \{0\}$ und $\mathrm{f_i}(\mathrm{x_i}) = 1$ erhält man z.B. mit $\mathrm{f(y)} := \min\{(\mathrm{f_i} \circ \mathrm{p_i})(\mathrm{y}) : \mathrm{i} \in \mathrm{K}\}$ ein stetiges f: $\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{X_i} \to$ [0;1] mit f[A] $\subset \{0\}$ und f(x) = 1. Die Komposition von f muss nur die Stetigkeit der Komponenten nach 3.3 sowie die Funktionswerte 0 und 1 erhalten. Möglich wäre also z.B. auch das Maximum oder der Mittelwert der $\mathrm{f_i}$.

7.11 Trennungseigenschaften in Quotientenräumen. Sei R eine Äquivalenzrelation auf X und π: X $\to$ X/R die kanonische Projektion.

1. X/R ist genau dann ein T_1-Raum, wenn jede Äquivalenzklasse in X abgeschlossen ist.
2. X/R ist genau dann ein T_2-Raum, wenn π offen und R abgeschlossen in X^2 ist.
3. X/R ist ein T_2-Raum, wenn X regulär und π offen und abgeschlossen ist.
4. X/R ist ein T_4-Raum bzw. normal, wenn π abgeschlossen und X ein T_4-Raum bzw. normal ist.

Beweis:

1. klar mit 7.4.2
2. X/R ist T_2-Raum $\Leftrightarrow \forall\ \pi(x) \neq \pi(y) \in X/R\ \exists\ \overline{U} \in \mathcal{U}(\pi(x))$,$\overline{V} \in \mathcal{U}(\pi(x))$: $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset \Leftrightarrow \forall\ (x;y) \in X^2$: $\pi(x) \neq \pi(y)\ \exists\ U\times V \in \mathcal{U}((x;y))$: $U\times V \cap R \neq \emptyset$. $\Rightarrow$ gilt immer aufgrund der Stetigkeit von π mit $U := \pi^{-1}\left[\overline{U}\right]$ und $V := \pi^{-1}\left[\overline{V}\right]$. $\Leftarrow$ gilt nur für offenes π mit $\overline{U} := \pi[U]$ und $\overline{V} := \pi[V]$.
3. Für $(x;y) \in X^2 \setminus R$ gilt $x \notin \pi^{-1}(\pi(y))$. Wegen T_1 ist x abgeschlossen in X und da π stetig und abgeschlossen, ist mit x auch π(y) und ebenso $\pi^{-1}(\pi(y))$ abgeschlossen. Aufgrund von T_3 gibt es dann offene und disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $\pi^{-1}(\pi(y)) \subset V$. Wegen 3.6 gibt es eine offene Umgebung W von π(y) mit $\pi^{-1}(\pi(y)) \subset \pi^{-1}[W] \subset V$. Dann ist $U \times \pi^{-1}[W]$ eine Umgebung von (x;y), die R nicht schneidet. R ist also abgeschlossen in X^2 und aus 2. folgt die Behauptung.
4. Für zwei abgeschlossene und disjunkte Mengen A und B in X\R sind wegen der Stetigkeit von π auch $\pi^{-1}[A]$ und $\pi^{-1}[B]$ abgeschlossen und disjunkt in X. Nach Voraussetzung gibt es offene und disjunkte Mengen U_A und U_B in X mit $\pi^{-1}[A] \subset U_A$ und $\pi^{-1}[B] \subset U_B$. Wieder wegen 3.6 gibt es offene Umgebungen V_A von A mit $\pi^{-1}[V_A] \subset U_A$ und V_B von B mit $\pi^{-1}[V_B] \subset U_B$. Insbesondere sind V_A und V_B wieder disjunkt, woraus die Behauptung folgt. Erfüllt X zusätzlich T_1, so ist jeder Punkt x $\in$ X abgeschlossenen und wegen der Abgeschlossenheit von π auch jede Äquivalenzklasse π(x) $\in$ X\R, woraus die Behauptung folgt.

7.12 Stetige Funktionen in Hausdorff-Räume. Sei f: X $\to$ Y eine stetige Abbildung und Y hausdorffsch. Dann ist der **Graph** $\{(x,y) \in X\times Y\colon y = f(x)\}$ als Urbild der wegen 7.5 4 abgeschlossenen Diagonale $\Delta \subset Y^2$ unter der nach 4.1 stetigen Abbildung (f;id): X×Y $\to Y^2$ abgeschlossen in

X×Y. Ist f zusätzlich **injektiv**, so ist X homöomorph zu dem nach 7.3 hausdorffschen Unterraum f[X] $\subset$ Y und damit selber hausdorffsch. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist wenigstens der **Quotientenraum** X/R mit xRy $\Leftrightarrow$ f(x) = f(y) aus dem gleichen Grunde hausdorffsch.

7.13 Fortsetzung stetiger Funktionen in Hausdorff-Räume. Sei f: X $\to$ Y eine stetige Abbildung und Y hausdorffsch. Für eine weitere stetige Funktion g: X $\to$ Y folgt dann aus einem analogen Argument wie in 7.12 die Abgeschlossenheit der Menge $\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$. Insbesondere sind f und g identisch, wenn sie nur auf einer **dichten Teilmenge** von X übereinstimmen.

7.14 Fortsetzung stetiger Funktionen in reguläre Räume. Sei f: D $\to$ Y eine stetige Abbildung aus einer in X dichten Teilmenge D $\subset$ X in den regulären Raum Y. f lässt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung $\bar{f}$: X $\to$ Y fortsetzen, wenn für jedes x $\in$ X das Bild $f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ des Umgebungsfilters auf Y konvergiert.

Beweis. $\bar{f}(x)$ sei der nach Voraussetzung existierende und wegen 7.5.2 sowie 7.7 eindeutig bestimmte Limespunkt von $f(\mathcal{U}(x) \cap D)$. $\bar{f}$ stimmt auf D mit f überein, denn für ein x $\in$ D konvergiert der Bildfilter $\bar{f}(\mathcal{U}(x) \cap D) = f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ wegen der Stetigkeit von f gegen f(x). $\bar{f}$ ist auch stetig, denn für x $\in$ X und $U \in \mathcal{U}\left(\bar{f}(x)\right) \subset f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ gibt es nach Voraussetzung ein offenes $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $f[V \cap D] \subset U$. Wegen 7.7 kann man U als abgeschlossen annehmen, womit sogar $\overline{f[V \cap D]} \subset U$ folgt. Für jedes y $\in$ V ist $V \in \mathcal{U}(y)$ und daher $f[V \cap D] \in f(\mathcal{U}(y) \cap D)$. Weil $\bar{f}(y)$ Limespunkt von $f(\mathcal{U}(y) \cap D)$ ist, folgt $\bar{f}(y) \in \overline{f[V \cap D]}$ und damit $\bar{f}(y) \in U$. Es gibt also für jedes $U \in \mathcal{U}\left(\bar{f}(x)\right)$ ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $\bar{f}[V] \subset U$, womit die Stetigkeit von $\bar{f}$ bewiesen ist.

8 Normale Räume

8.1 Lemma von Urysohn. Ein Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn es für je zwei disjunkte und abgeschlossene Mengen A und B eine stetige Funktion f: X $\to$ [0;1] gibt mit f[A] = {0} und f[B] = {1}.

Beweis. In einem T_4-Raum gibt zwischen einer offenen Menge G_j und einer darunterliegenden abgeschlossenen Menge $\overline{G_i} \subset G_j$ immer noch eine dazwischenliegende offene Menge $G_{(i+j)/2}$, die mit ihrem Abschluss zwischen $\overline{G_i}$ und G_j liegt: $\overline{G_i} \subset G_{(i+j)/2} \subset \overline{G}_{(i+j)/2} \subset G_j$. Man startet mit A $\subset$ X\B und wendet die Schachtelung zweimal an, um offene Mengen G_0 und G_1 zu erhalten mit $A \subset G_0 \subset \overline{G_0} \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset X \setminus B$. Nun schachtelt man zwischen je zwei benachbarten Mengen $\overline{G_i} \subset G_j$ fortlaufend weiter und erhält damit für jedes $i \in \left\{\sum_{1 \le m \le n} \frac{i(m)}{2^m} : i(m) \in \{0;1\} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ eine offene Menge G_i mit $\overline{G_j} \subset G_i \Leftrightarrow j < i$. Sei nun f: X $\to$ [0;1] definiert durch $f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in G_t\}$, falls $x \notin G_1$ und f(x) = 1 für $x \in G_1$. Dann gilt f[A] = {0}, f[B] = {1} und $f(x) \le i \Leftrightarrow x \in G_i$. f ist stetig in x $\in$ X, denn für jedes ε > 0 ist $f\left[G_{f(x)+\delta} \setminus \overline{G}_{f(x)-\delta}\right] \subset B_\varepsilon(f(x))$ und $G_{f(x)+\delta} \setminus \overline{G}_{f(x)-\delta} \in \mathcal{U}(x)$ für $0 < \delta < \varepsilon$. Liegt umgekehrt ein solches f schon vor, so erhält man die offenen disjunkten Mengen sofort in der Gestalt $A \subset f^{-1}[B_\varepsilon(0)]$ bzw. $B \subset f^{-1}[B_\varepsilon(1)]$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

8.2 Korollar. Ein normaler Raum ist vollständig regulär.

8.3 G_δ- und F_σ-Mengen. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt **G_δ-Menge**, wenn sie als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen G_n dargestellt werden kann: $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Sie heißt **$F_\sigma$-Menge**, wenn sie als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen F_n dargestellt werden kann: $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. (Merke: G - Gebiet - offen, F - fermé - abgeschlossen, σ - Summe - Vereinigung und δ - Durchschnitt)

8.4 Satz. Eine nichtleere und abgeschlossene Teilmenge A eines T_4-Raumes X läßt sich genau dann als Nullstellenmenge $A = f^{-1}[\{0\}]$ einer stetigen reellwertigen Funktion f darstellen, wenn sie eine G_δ-Menge ist.

Beweis. Aus dem gegebenen f erhält man die offenen Mengen für die Darstellung $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ mittels $G_n = f^{-1}\left[B_{1/n}(0)\right]$. Umgekehrt erhält man aus den gegebenen offenen Mengen G_n und den gemäß 8.1

stetigen Trennfunktionen f_n: $X \to [0;1]$ mit $f_n[A] = \{0\}$ und $f_n[X \setminus G_n] = \{1\}$ die geforderte Funktion durch $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_n(x)}{2^n}$. Aufgrund 1.7 und der Stetigkeit der Partialsummen ist f stetig.

8.5 Satz von Tietze. Ein topologischer Raum ist genau dann ein T_4-Raum, wenn sich jede auf einer abgeschlossenen Teilmenge von X definierte stetige Funktion auf ganz X stetig fortsetzen läßt.

Beweis.

$\Leftarrow$: Sei A abgeschlossen in X und f: $A \to \mathbb{R}$ stetig. Da $\mathbb{R}$ homöomorph zu $]-1;1[$ ist (siehe 3.4), sei o.b.d.A. f: $A \to]-1;1[$. Nach 8.1 gibt es ein stetiges f_0: $X \to \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ mit $f_0\left[\left\{x \in X : f(x) \le -\frac{1}{3}\right\}\right] = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ und $f_0\left[\left\{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{3}\right\}\right] = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ Für diese 0. Näherung gilt $|f(x) - f_0(x)| \le \frac{2}{3}$. Nun wird rekursiv nachgebessert, indem wieder nach 8.1 für jedes natürliche $n \ge 1$ ein stetiges f_n: $X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n; \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ bestimmt wird mit $f_n\left[\left\{x \in X : f(x) - \sum_{0\le i\le n-1} f_i(x) \le -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right] = \left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ und$f_n\left[\left\{x \in X : f(x) - \sum_{0\le i\le n-1} f_i(x) \ge \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right] = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$. Nach 1.7 ist $\overline{f}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ stetig mit $\left|\overline{f}(x)\right| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$ und stimmt auf A mit f überein. Zum Schluß werden die zu großen Funktionswerte ± 1 durch eine dritte Anwendung von 8.1 beseitigt: g: $X \to [0;1]$ sei stetig mit $g\left[\left\{x \in X : \left|\overline{f}(x)\right| = 1\right\}\right] \subset \{0\}$ und $g[A] = 1$. Dann ist $g \circ \overline{f}$: $X \to]-1;1[$ die gewünschte stetige Fortsetzung von f.

$\Rightarrow$: Seien A und B abgeschlossene disjunkte Teilmengen in X. Dann ist f: $A\cup B \to]-1;1[$ mit $f[A] := \{-\frac{1}{2}\}$ und $f[B] := \{\frac{1}{2}\}$ auf der abgeschlossenen Menge $A \cup B$ stetig (die beiden Zusammenhangskomponenten A und B sind sowohl offen als auch abgeschlossen in $A \cup B$!) und läßt sich zu einem stetigen $\overline{f}$: $X \to]-1;1[$ fortsetzen. $\overline{f}^{-1}[]-1;0[]$ und $\overline{f}^{-1}[]0;1[]$ sind dann offene disjunkte Mengen, welche A und B trennen.

8.6 Eigenschaften von Mengensystemen. Ein System $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt **offen** bzw. **abgeschlossen**, wenn diese Eigenschaft für alle U_i gilt und **endlich** bzw. **abzählbar**, wenn dies für die Indexmenge I gilt. Es heißt **lokal-endlich** bzw. **punkt-endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die nur von endlich vielen U_i getroffen wird bzw. selbst nur von endliche vielen U_i getroffen wird.

8.7 Satz. Für eine **abgeschlossene** Teilmenge A eines **normalen** Raumes X und eine **punkt-endliche offene Überdeckung** $(U_i)_{i\in I}$ von A gibt es eine weitere **offene** Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von A mit $\overline{O_i} \subset U_i$ für alle $i \in I$.

Beweis. Sei M die Familie aller offenen Überdeckungen von A der Gestalt $(O_k)_{k\in K} \cup (U_l)_{l\in L}$ mit $K \cup L = I$, $K \cap L = \emptyset$ und $\overline{O_k} \subset U_k$ für $k \in K$. Für zwei Überdeckungen $\mathcal{C} = (O_k)_{k\in K} \cup (U_l)_{l\in L}$ und $\mathcal{C}' = (O'_k)_{k\in K'} \cup (U_l)_{l\in L'}$ aus M sei $\mathcal{C} \le \mathcal{C}'$, wenn $K \subset K'$ und $O_k = O'_k$ für alle $k \in K$. Um die Existenz der gewünschten Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ zu beweisen, zeigen wir, dass M durch die Relation $\le$ **induktiv geordnet** wird und wenden das **Lemma von Zorn** an. Sei dazu $(\mathcal{C}^s)_{s\in S} = (O^s_k)_{k\in K^s} \cup (U_l)_{l\in L^s}$eine linear geordnete Teilfamilie von M. Für $K := \bigcup_{s\in S} K^s$ und $L := \bigcap_{s\in S} L^s$ sei $\mathcal{C} := (O^s_k)_{k\in K} \cup (U_l)_{l\in L}$. Wegen $K \cup L = I$ und $K \cap L =$ ist $\mathcal{C}$ wohldefiniert. Zum Nachweise der Überdeckungseigenschaft sei $x \in A$ und $P(x) := \{i \in I\colon x \in U_i\}$. Falls $P(x) \cap L \ne \emptyset$ gibt es aufgrund der Überdeckungseigenschaft von $(U_i)_{i\in I}$ ein i mit $x \in U_i \in \mathcal{C}$. Falls $P(x) \subset K$ gibt es aufgrund der **Endlichkeit** von P(x) ein s mit $P(x) \subset K^s$ und wegen der **linearen Ordnung** von $(\mathcal{C}^s)_{s\in S}$ und der Überdeckungseigenschaft der $\mathcal{C}^s$ ein $i \in K$ mit $x \in O_i \in \mathcal{C}$. Also ist wieder $\mathcal{C}$ eine Überdeckung von A und damit offensichtlich die gesuchte **obere Schranke** von $(\mathcal{C}^s)_{s\in S}$. Nach dem Lemma von Zorn existiert also ein **maximales Element** $\mathcal{C}^* = (O_k)_{k\in K^*} \cup (U_l)_{l\in L^*}$. Für $i \in L^*$ ist $B := A \setminus \left(\bigcup_{k\in K^*} O_k \cup \bigcup_{l\in L^*\setminus\{i\}} U_l\right)$ abgeschlossen und liegt in der offenen Menge U_i . Da X normal ist, existiert dann aber ein offenen O_i mit $B \subset O_i \subset \overline{O_i} \subset U_i$ und durch Ersetzen von U_i durch O_i erhält man dann aber ein $\mathcal{C}^{**} = (O_k)_{k\in K^*\cup\{i\}} \cup (U_l)_{l\in L^*\setminus\{i\}} \in M$ mit $\mathcal{C}^* < \mathcal{C}^{**}$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von $\mathcal{C}^*$. Daher muss $L^* = \emptyset$ sein und der Satz ist bewiesen.

8.8 Partitionen der Eins. Der **Träger** einer stetigen Funktion $X \to \mathbb{R}$ ist der **Abschluß** $\overline{A}$ der Menge $A = \{x \in X\colon f(x) \ne 0\}$. Ein System $(f_i)_{i\in I}$ **stetiger Funktionen** f_i: $X \to \mathbb{R}^*$ heißt eine der **offenen Überdeckung** $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete **Partition der Eins**, wenn die Träger der f_i für alle i

$\in$ I in den U_i liegen und ein lokal-endliches System bilden sowie $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$ für alle $x \in X$. Da die Träger lokal-endlich sind, ist $\sum_{i\in I} f_i(x)$ wohldefiniert und stetig auch ohne die letzte Bedingung.

8.9 Satz. In einem normalen Raum X gibt es für jede lokal-endliche offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins.

Beweis. Nach 8.7 existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{O} = (O_i)_{i\in I}$ mit $\overline{O_i} \subset U_i$ für alle $i \in I$. Wegen der Normalität von X gibt es offene Mengen C_i mit $\overline{O_i} \subset C_i \subset \overline{C_i} \subset U_i$ und nach dem Lemma 8.1 von Urysohn stetige Funktionen g_i: $X \to [0;1]$ mit $g_i[X \setminus C_i] = \{0\}$ und $g_i\left[\overline{O_i}\right] = \{1\}$. Die Träger der g_i liegen in $\overline{C_i}$ und damit in U_i. Da $\mathcal{U}$ lokal-endlich ist, ist die Funktion $g(x) := \sum_{i\in I} g_i(x)$ ist wohldefiniert und stetig. Da $\mathcal{O}$ eine Überdeckung von X ist, gilt $g(x) \geq 1$. Die Funktionen $f_i(x) := \frac{g_i(x)}{g(x)}$ sind stetig und sind eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordente Partition der Eins.

9 Kompakte Räume

9.1 Kompakte Räume. Ein topologischer Raum heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$von X eine endliche Überdeckung enthält. X heißt kompakt, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt (quasi)kompakt, wenn diese Eigenschaft für den **Unterraum** A gilt. A $\subset$X heißt **relativ kompakt**, wenn der Abschluß $\overline{A}$ kompakt ist.

9.2 Eigenschaften kompakter Räume. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist quasikompakt
2. Jede Familie abgeschlossener Mengen mit leerem Durchschnitt besitzt eine endliche Teilfamilie mit leerem Durchschnitt.
3. Jeder Filter auf X besitzt einen Berührungspunkt.
4. Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Beweis.

1. $\Rightarrow$ 2.: durch Übergang zum Komplement.

2. $\Rightarrow$ 3.: mit 6.7.

3. $\Rightarrow$ 4.: mit 6.8.

4. $\Rightarrow$ 1.: Wenn eine offene Überdeckung von X keine endliche Teilüberdeckung besitzt, dann sind alle endlichen Durchschnitte von Komplementen dieser offenen Mengen nichtleer und bilden die Basis eine Ultrafilters, der nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$ konvergiert. Der Ultrafilter enthält dann aber alle Umgebungen von x und damit auch ein Element der offenen Überdeckung gleichzeitig mit dem Komplement dieser offenen Menge. Widerspruch!

9.3 Folgen auf quasikompakten Räumen. Nach 9.2.3 besitzt jede Folge einem quasikompakten Raum einen Häufungspunkt. Die Umkehrung ist nicht imer erfüllt: Sei $X = [0;1]^{\mathbb{R}}$ die Menge aller Funktionen f: $\mathbb{R} \to [0;1]$ mit der Produkttopologie und A der Unterraum aller Funktionen f: $\mathbb{R} \to \{0;1\}$ mit abzählbar vielen Nullstellen. Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit den abzählbaren Nullstellenmengen I_n ist die Funktion $f \in A$ mit $f(x) = 0$ für $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (eine abzählbare Vereiniung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar, vgl. z.B.[4] Satz 17.6) und $f(x) = 1$ sonst ein Limespunkt, weil die Mengen $\{0\}^I \times \{1\}^J \times \{0;1\}^{\mathbb{R}\setminus(I\cup J)}$ mit endlichen $I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $J \subset \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ eine Umgebungsbasis für f in A bilden und jeweils alle (!) f_n enthalten. Jede Filge in A konvergiert also gegen einen Limespunkt, der ebenfalls in A liegt. A ist aber nicht kompakt, denn z.B. die offenen Mengen $\{0\}_x \times \{0;1\}^{\mathbb{R}\setminus\{x\}}$ und $\{1\}_0 \times \{0;1\}^{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ überdecken X und insbesondere A, aber keine endliche Auswahl dieser Mengen überdeckt A.

9.4 Kompaktheit von Teilmengen. Jede **abgeschlossene** Teilmenge eines **quasikompakten Raumes** ist offensichtlich wieder **quasikompakt**. Jede **kompakte** Teilmenge eines **Hausdorff-Raumes** ist **abgeschlossen**. Allgemeiner läßt sich in Hausdorff-Räumen jede kompakte Teilmenge K von jedem Punkt $x \in X \backslash K$ durch disjunkte, offene Umgebungen trennen: Jeder Punkt $y \in K$ besitzt ja eine Umgebung $U(y)$, die eine offene Umgebung $U_y(x)$ von x nicht schneidet. Die $U(y)$ überdecken K und die Vereinigung der endlichen Teilüberdeckung ist eine offene Umgebung von K, welche den Schnitt der endlich vielen entsprechenden $U_y(x)$ nicht trifft. Insbesondere folgt aus diesen Erkenntnissen, dass kompakte Räume **regulär** sind. Es gilt sogar noch mehr:

9.5 Satz. Kompakte Räume sind **normal**.

Beweis. Zwei abgeschlossene, disjunkte Mengen A und B sind wegen 9.4 kompakt und jeder Punkt y $\in$ B besitzt wegen der Regularität von X eine Umgebung $U(y)$, die eine offene Umgebung $U_y(A)$ von A nicht schneidet. Die $U(y)$ überdecken B und die Vereinigung der endlichen Teilüberdeckung ist eine offene Umgebung von B, welche den Schnitt der endlich vielen entsprechenden $U_y(A)$ nicht trifft.

9.6 Satz von Alexander. Ein topologischer Raum ist schon dann quasikompakt, wenn jede Überdeckung von X mit Mengen einer **Subbasis** $\mathcal{S}$ stets eine endliche Überdeckung enthält.

Beweis. Angenommen, es gibt einen Ultrafilter $\mathcal{F}$, der nicht konvergiert. Dann gibt es für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{S}$, die nicht in $\mathcal{F}$ enthalten ist und die nach Voraussetzung existierende endliche Teilüberdeckung von $(U_x)_{x\in X}$ hat endlich viele Komplemente, die alle zu $\mathcal{F}$ gehören. Ihr Durchschnitt ist aber leer im Widerspruch zu 6.1.

9.7 Korollar. Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt.

Beweis. Aufgrund von 9.4 und 9.6 muss nur gezeigt werden, dass jede Überdeckung $\mathcal{U}$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a;b] \subset \mathbb{R}$ durch Intervalle der Gestalt $[a;c]$ und $]d;b]$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ist $c' := \sup\{c \in \mathbb{R}\colon [a;c[\in \mathcal{U}\} > b$, so gibt es ein $c'' \leq b$ mit $[a;c''[\in U$, welches allein schon $[a;b[$ überdeckt. Ist andererseits $c' \leq b$, so muss ein $d' < c'$ existieren mit $]d';b] \in \mathcal{U}$, denn sonst wird c' nicht überdeckt. Außerdem gibt es dann ein c" mit $d' < c'' < c'$ mit $[a;c''[\in \mathcal{U}$, so dass $[a;b[\subset [a;c''[\cup\,]d';b]$.

9.8 Stetige Abbildungen auf quasikompakten Räumen. Das Bild $f[X]$ eines quasikompakten Raumes X unter der stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ ist offenbar wieder quasikompakt. Ist Y außerdem **hausdorffsch**, so ist f wegen 9.4 **abgeschlossen.** Ist f zusätzlich **injektiv**, so ist f wegen $f[X\backslash O] = f[X]\backslash f[O]$ auch **offen** und es handelt sich um einen **Homöomorphismus.**

9.9 Satz von Tychonoff. Ein nichtleerer **Produktraum** $X = \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann quasikompakt, wenn alle X_i quasikompakt sind.

Beweis.

$\Rightarrow$: folgt aus 9.8 und der Stetigkeit der **Projektionen** $p_i\colon X \to X_i$.

$\Leftarrow$: Für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ sind die Bildfilter $p_i(\mathcal{F})$ wegen 6.5 ebenfalls Ultrafilter, denn für jedes $A_i \subset X_i$ sind entweder $p_i^{-1}[A_i]$ oder $p_i^{-1}[X \setminus A_i]$ in $\mathcal{F}$ enthalten und damit auch entweder $A_i = p_i\left[p_i^{-1}[A_i]\right]$ oder $X \setminus A_i = p_i\left[p_i^{-1}[X \setminus A_i]\right]$ in $p_i(\mathcal{F})$. Nach 9.2.4 konvergieren die $p_i(\mathcal{F})$ gegen ein $x_i \in X_i$ und wegen 6.10 konvergiert $\mathcal{F}$ gegen $(x_i)_{i\in I} \in X$.

9.10 Satz von Heine-Borel. Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis.

$\Rightarrow$: Eine kompakte Teilmenge auf dem Hausdorff-Raum $\mathbb{R}^n$ ist nach 9.4 abgeschlossen. Die Beschränktheit sieht man anhand der offenen Überdeckung $\{B_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$.

$\Leftarrow$: Eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist als Teilmenge eines wegen 9.7 sowie 9.9 kompakten Würfels $[-m; m]^n$ wieder kompakt.

9.11 Approximationssatz von Kronecker. Für ein irrationales $\gamma \in [0;1[$ sei $f\colon \mathbb{N} \to [0;1]$ definiert durch $f(n) = n\gamma - [n\gamma]$. Dabei steht die **Gaußklammer** $[a]$ für die größte ganze Zahl $\leq a$. Dann ist f injektiv und die abzählbare Menge $f[\mathbb{N}]$ liegt dicht in $[0;1]$

Beweis: f ist injektiv, weil $n\gamma - [n\gamma] = m\gamma - [m\gamma] \Leftrightarrow \gamma = \frac{[n\gamma]-[m\gamma]}{m-n} \in \mathbb{Q}$. Da die f(n) alle voneinander verschieden sind, besitzt die Folge f(n) in dem nach 9.7 **kompakten** Intervall [0;1] wegen 9.3 einen **Häufungspunkt** und es gibt für jedes $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n" und n' mit $|n''\gamma - [n''\gamma] - (n'\gamma - [n'\gamma])| < \varepsilon$. Mit o.B.d.A $n'' > n'$ und $k = n'' - n'$ und $z = [n''\gamma] - [n'\gamma]$ erhält man $|k\gamma - z| < \varepsilon \Rightarrow f(k) = |k\gamma - z| < \varepsilon$. Die aufeinanderfolgenden Vielfachen von $k\gamma$ haben also einen Abstand $< \varepsilon$ voneinander und kommen jeder Zahl in [0;1] näher als ε.

10 Andere Kompaktheitsbegriffe

10.1 Lokalkompakte Räume. Ein topologogischer Raum heißt **lokalkompakt**, wenn er **hausdorffsch** ist und jeder Punkt eine **kompakte Umgebung** besitzt. Das wichtigeste Beispiel eines lokalkompakten Raumes ist wegen 9.10 der $\mathbb{R}^n$.

10.2 Satz. Ein lokalkompakter Raum X ist regulär.

Beweis: Die kompakte Umgebung K eines Punktes $x \in X$ ist nach 9.4 abgeschlossen und regulär. Für eine Umgebung U von x ist $U \cap K$ eine Umgebung von x in K und nach 7.7 gibt es eine abgeschlossene Umgebung V von x in K mit $V \subset U \cap K$. V ist auch Umgebung von x in X, da k Umgebung von x ist und V ist abgeschlossen in X, da K abgeschlossen in X ist. Nach 7.7 ist also auch X regulär.

10.3 Korollar. Wegen 7.7, 9.4 und 10.2 bilden die **kompakten Umgebungen** eines Punktes in einem lokalkompakten Raum bereits eine **Umgebungsbasis**. Insbesondere ist jede **offene** und jede **abgeschlossene** Menge sowie jeder **endliche Durchschnitt** offener und abgeschlossener Mengen eines lokalkompakten Raumes wieder lokalkompakt.

10.4 Satz (Alexandroff-Kompaktifizierung) Ein lokalkompakter Raum X läßt sich durch Hinzufügen eines **unendlich fernen Punktes** ∞ sowie der **Komplemente aller kompakten Teilmengen** von X vereinigt mit $\{\infty\}$ zu einem **kompakten** Raum $Y = X \cup \{\infty\}$ erweitern. Jeder kompakte Raum, der bis auf einen Punkt homöomorph zu X ist, ist homöomorph zu Y.

Beweis. Die Komplemente kompakter Mengen in X vereinigt mit $\{\infty\}$ bilden für sich schon eine **Topologie**, weil beliebige Duchschnitte und in Hausdorff-Räumen auch endliche Vereinigungen kompakter Mengen wieder kompakt sind. Die hinzugefügten Mengen sind auch **verträglich** mit der bisherigen Topologie auf X, weil entsprechende Durchschnitte nach 9.4 (2. Satz) wieder offen in X und Vereinigungen nach 9.4 (1. Satz) wieder Komplemente kompakter Mengen sind. Y ist **hausdorffsch**, weil X hausdorffsch ist und jedes $x \in X$ sich durch seine kompakte Umgebung bzw. ihr Komplement von ∞ trennen läßt. Y ist **quasikompakt**, weil jede offene Überdeckung das Komplement einer kompakten Teilmenge von X enthalten muss. Sei nun Y' ein kompakter Raum mit einem Punkt ∞', so dass $X' := Y'\backslash\{\infty\}$ homöomorph zu X ist. Die Komplemente $Y'\backslash U' = X'\backslash U'$ offener Umgebungen von ∞' sind als abgeschlossene Teilmengen des kompakten Raumes Y' kompakt. Der Homöomorphismus $f: X \to X'$ wird durch $\overline{f}|X := f$ und $\overline{f}(\infty) := \infty'$ zu $\overline{f}: Y \to Y'$ erweitert. Dann ist nur zu zeigen, dass $\forall\, U \in \mathcal{U}(\infty)$: $\overline{f}\,[U] \in \mathcal{U}(\infty')$ und umgekehrt $\forall\, U' \in \mathcal{U}(\infty')$: $\overline{f}^{-1}\,[U'] \in \mathcal{U}(\infty)$. Dies folgt aus der Bijektivität von $\overline{f}$ zusammen mit 9.8 und der Tatsache, dass wegen 9.4 die Umgebungen von ∞' genau wieder die Komplemente kompakter Mengen in X' sind.

10.5 Abzählbarkeit im Unendlichen. Ein lokalkompakter Raum heißt **abzählbar im Unendlichen**, wenn er abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. Ein lokalkompakter Raum ist also genau dann abzählbar im Unendlichen , wenn der bei der **Alexandroff-Kompaktifizierung** hinzugefügte unendlich ferne Punkt ∞ eine **abzählbare Umgebungsbasis** besitzt.

10.6 Satz. Ein lokalkompakter Raum X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn es eine **aufsteigende** Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **offener Mengen** gibt, welche X überdecken und deren **Abschlüsse** $\overline{U}_n$ **kompakt** sind.

Beweis. Zu jedem K_i der kompakten Überdeckung $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X erhält man aus den offenen Kernen der endlichen Teilüberdeckung von K_i durch kompakte Umgebungen von Punkten aus K_i eine darüberliegende offene Menge $O_i \supset K_i$, deren Abschluss $\overline{O}_i$ kompakt ist. Die Mengen $U_n := \bigcup_{0\leq i\leq n} O_i$ erfüllen dann die gewünschten Eigenschaften.

10.7 Abzählbar kompakte Räume. Ein Hausdorff-Raum heißt **abzählbar kompakt**, wenn jede **abzählbare** offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein Hausdorff Raum ist genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge einen **Häufungspunkt** besitzt.

Beweis.

$\Rightarrow$: Wenn die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, hat jeder Punkt eine Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder trifft und die nach Voraussetzung existierende Teilüberdeckung von endlich vielen dieser Umgebungen enthält dann auch nur endlich viele Folgenglieder im Widerspruch zur Unendlichkeit der Folge.

$\Leftarrow$: Sei $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung des Hausdorff-Raumes X und $x_n \in X \setminus \bigcup_{0 \leq i \leq n} O_i$. Der Häufungspunkt y der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liegt dann in einem O_i, welches demnach unendlich viele x_n enthält im Widerspruch zur Konstruktion der Folge.

10.8 Lindelöf-Räume. Ein topologischer Raum heißt **Lindelöf-Raum**, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Jeder Raum mit **abzählbarer Basis** (**2. Abzählbarkeitsaxiom**) ist also ein Lindelöf Raum. Ein Lindelöf Raum ist genau dann kompakt, wenn er **abzählbar kompakt** ist.

10.9 Folgenkompakte Räume. Ein Hausdorff-Raum heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge eine **konvergente Teilfolge** besitzt. In einem Raum mit **abzählbarer Umgebungsbasis** (**1. Abzählbarkeitsaxiom**) für jeden seiner Punkte läßt sich für jeden Häufungspunkt einer Folge eine konvergente Teilfolge konstruieren. Ein solcher Raum ist also genau dann folgenkompakt, wenn der abzählbar kompakt ist.

10.10 Kompaktheit auf metrischen Räumen. In metrischen Räumen fallen die Bergiffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt zusammen.

Beweis. Wegen 10.7 - 10.9 ist nur zu zeigen, dass folgenkompakte metrische Räume eine abzählbare Basis besitzen. Dazu konstruiert man rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ eine endliche Folge $(x_{n,i})_{0 \leq i \leq i_o(n)}$ mit $d(x_i; x_j) \geq \frac{1}{n}$ für alle $0 \leq i \neq j \leq i_0(n)$: Für ein beliebig gewähltes $x_{0,n} \in X$ wähle $x_{0,n} \in X \backslash B_{1/n}(x_{o,n})$ und für $x_{i,n} \in X$ wähle $x_{i+1,n} \in X \backslash \bigcup_{0 \leq j \leq i} B_{1/n}(x_{j,n})$. Wegen der Folgenkompaktheit muß die Folge nach endlich vielen $x_{i,n}$ enden und überdeckt dann offensichtlich X. Die Menge aller $x_{i,n}$ ist dann eine abzählbare dichte Teilmenge von X und die $B_{1/m}(x_{i,n})$ für $m \in \mathbb{N}^*$ ist eine abzählbare Basis für X.

11 Uniforme Räume

11.1 Uniforme Strukturen. Für Mengen A, B $\subset X^2$ sei $A^{-1} := \{(x;y\} \in X\colon (y;x) \in A\}$ und AB $:= \{(x;z\} \in X\colon \exists\, y \in X\colon (x;y) \in A \wedge (y;z) \in B\}\}$ mit $A^2 := AA$, usw.. A heißt **symmetrisch**, wenn $A^{-1} = A$. Es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(AB)C = A(BC)$; aus $A \subset B$ folgt $A^{-1} \subset B^{-1}$ und $AC \subset BC$ für beliebige C. Ist A symmetrisch, so auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Eine **uniforme Struktur** von **Nachbarschaften** oder ein **Nachbarschaftsfilter** $\mathcal{U}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X^2 mit den folgenden Eigenschaften: Alle $U \in \mathcal{U}$ enthalten die **Diagonale** Δ und eine weitere Nachbarschaft $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subset U$. Mit jedem U liegt auch U^{-1} sowie jede **darüberliegende** Menge $A \supset U$ in $\mathcal{U}$. Der **Durchschnitt endlich** vieler Nachbarschaften liegt ebenfalls wieder in $\mathcal{U}$. X versehen mit der uniformen Struktur $\mathcal{U}$ heißt **uniformer Raum** und zwei Punkte x und y aus X heißen **benachbart von der Ordnung U**, wenn $(x;y) \in U \in \mathcal{U}$. Wegen $\Delta \subset U \in \mathcal{U}$ gilt $U^n \in \mathcal{U}$ für $n \in \mathbb{N}^*$.

11.2 Fundamentalsysteme. Ein Teilsystem $\mathcal{B}$ eines Nachbarschaftsfilters $\mathcal{U}$ heißt **Fundamentalsystem**, wenn jede Nachbarschaft aus $\mathcal{U}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält. Mit $\mathcal{B}$ sind auch die Systeme $\mathcal{B}'$ $:= \{B \cap B^{-1} : B \in \mathcal{B}\}$ und $\mathcal{B}_n := \{B^n : B \in \mathcal{B}\}$ Fundamentalsysteme für den Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$.

11.3 Uniformisierung. Für einen Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$ auf einer Menge X bilden die Mengen $U(x) = \{y \in X\colon (x;y) \in U\}$ für $U \in \mathcal{U}$ für jedes $x \in X$ ein **Umgebungssystem** und definieren nach 2.5 eine **Topologie** $\mathcal{O}$ auf X. Für ein **Fundamentalsystem** $\mathcal{B}$ bilden die Mengen B(x) mit $B \in \mathcal{B}$ entsprechend eine **Umgebungsbasis** für x. Die von den $\mathcal{B}(x)$ bzw. $\mathcal{U}(x)$ erzeugte Topologie $\mathcal{O}$ heißt

Topologie des uniformen Raumes bzw. die von $\mathcal{U}$ **induzierte Topologie**. Eine Topologie $\mathcal{O}$ heißt **uniformisierbar**, wenn es einen Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$ gibt, welcher $\mathcal{O}$ induziert.

11.4 Beispiele. Die **indiskrete Topologie** wird von der Menge X^2 selbst erzeugt. Die **diskrete Topologie** wird einerseits von allen Teilmengen von X^2 erzeugt, welche die Diagonale Δ enthalten. Sie wird aber andererseits auch von der **uniformen Struktur der endlichen Partitionen** erzeugt. Die Nachbarschaften $V_P = \{(x;y) : \exists A_i \in P : x, y \in A_i\}$ für jede endliche Partition $P = \{A_1, ..., A_n\}$ von X erfüllen nämlich die Bedingungen 11.1, wobei $V_P \supset V_{P'}$ genau dann, wenn jede Menge aus P Vereinigung von Mengen aus P' ist und $V_P \cap V_{P'}$ die Nachbarschaft der Partition ist, welche durch alle Schnitte von Mengen aus P mit Mengen aus P' entsteht. Da eine Partition eine disjunkte Überdeckung ist, gilt weiterhin $V_P^2 = V_P$.

11.5 Metrisation. Die **uniforme Struktur eines metrischen Raumes** (X;d) wird von den Nachbarschaften $U_{1/n} := \{(x;y) \in X^2\colon d(x;y) < \frac{1}{n}\}$ für $n \in \mathbb{N}^*$ erzeugt oder **induziert** und besitzt somit ein **abzählbares** Fundamentalsystem. Eine uniforme Struktur bzw. eine Topologie heißt **metrisierbar**, wenn sie sich durch eine Metrik induzieren läßt. Wie in 1.4 und 11.4 gezeigt, sind die Zuordnungen Metrik $\to$ uniformer Raum $\to$ Topologie nicht injektiv. Insbesondere kann eine Topologie durch verschiedene unifome Strukturen erzeugt werden, von denen nicht jede metrisierbar ist. Z.B. ist die diskrete uniforme Struktur durch $d(x;x) = 0$ und $d(x;y) = 1$ sonst metrisierbar, die uniforme Struktur der endlichen Partitionen hingegen nicht (siehe 12.X). Aus der Metrisierbarkeit folgt aber natürlich immer die Uniformisierbarkeit.

11.6 Satz. Die offenen Kerne bzw. die Abschlüsse in X^2 eines Fundamentalsystems bilden wieder ein Fundamentalsystem von Nachbarschaften in X.

Beweis. Zu einer beliebigen Nachbarschaft U gibt es nach 11.1 eine symmetrische Nachbarschaft V mit $V^3 \subset U$. Für $(x;y) \in V$ ist die in X^2 offene Menge $V(x) \times V(y)$ in V^3 enthalten. V^3 ist also bezüglich der Produkttopologie auf X^2 Umgebung jedes seiner Punkte und damit offen in X^2. Damit folgt $V^3 \subset \overset{\circ}{U}$ und $\overset{\circ}{U}$ ist ebenfalls Nachbarschaft in X. Sei nun $(x;y) \in \overline{V}$, dann ist $V(x) \times V(y) \cap V \neq \emptyset$ und es gibt $(x';y') \in V$ mit $(x;x') \in V$ und $(y,y') \in V$ und wegen der Symmetrie von V folgt $(x;y) \in V^3$. Insbesondere ist $\overline{V} \subset V^3 \subset U$. Da es für jedes U ein solches V gibt, sind also auch die Abschlüsse eines Fundamentalsystems wieder ein Fundamentalsystem.

11.7 Trennungseigenschaften. Die bisherigen Begriffe werden weiter verwendet und beziehen sich auf die induzierten Topologien. Hausdorffsche uniforme Räume heißen auch **separiert**.

1. Ein uniformer Raum ist genau dann hausdorffsch, wenn der Durchschnitt aller Nachbarschaften die Diagonale Δ ist.
2. Jeder uniforme Raum ist ein T_3-Raum.

Beweis.

1. $\Rightarrow$: Nach Voraussetzung gibt es für $x \neq y$ eine Nachbarschaft U, so dass $U(x) \cap U(y) = \emptyset \Rightarrow (x;y) \notin U$. (x;y) ist also nicht im Durchschnitt aller Nachbarschaften enthalten und da dies für beliebige Paare $x \neq y$ gilt, folgt die Behauptung. $\Leftarrow$: Nach Voraussetzung gibt es für $x \neq y$ eine Nachbarschaft U mit $(x;y) \notin U$. Nach 11.1 gibt es eine weitere Nachbarschaft V mit $V^2 \subset U$ und insbesondere $V(x) \cap V(y) = \emptyset$.
2. Die Behauptung folgt aus 7.7, weil es nach 11.1 für jedes Nachbarschaft U eine symmetrische Nachbarschaft V mit $V^2 \subset U$ gibt und $\overline{V(x)} \subset V^2(x) \subset U(x)$. Beachte, dass wir hier der Abschluss $\overline{V(x)} \subset V^2(x)$ in X betrachten, während in 11.6 der Abschluss $\overline{V} \subset V^3$ in X^2 verwendet wird.

11.7 Kompaktheit. Für eine Nachbarschaft U und eine Teilmenge A heißt $V(A) = \bigcap_{x \in A} V(x)$ **gleichmäßige Umgebung** von A.

1. Jede Umgebung einer kompakten Teilmenge eines uniformen Raumes enthält eine gleichmäßige Umgebung.
2. Zwei disjunkte Mengen K und A eines uniformen Raumes lassen sich durch gleichmäßige Umgebungen trennen, wenn K kompakt und A abgeschlossen ist.

Beweis.

1. Für die Umgebung U der kompaktenTeilmenge $K \subset X$ und jedes $x \in K$ gibt es eine Nachbarschaft U_x mit $U_x(x) \subset U$ und eine weitere Nachbarschaft V_x mit $V_x^2 \subset U_x$. Die $V_x(x)$ bilden eine Überdeckung von K und V sei der Schnitt der endlich vielen V_x, deren Umgebungen $V_x(x)$ eine endliche Teilüberdeckung von K bilden. Für jedes $y \in V(K)$ gibt es ein $z \in K$ mit $(y;z) \in V$. Das z liegt in einem der $V_x(x)$, d.h. $(z;x) \in V_x$ und weiter $(y;x) \in VV_x \subset V_x^2 \subset U_x$. Also folgt $y \in U_x(x) \subset U$ und damit $V(K) \subset U$.

2. Wegen 11.7.2 läßt sich K durch eine gleichmäßige Umgebung U(K) von A trennen. Die gleichmäßigen Umgebungen V(K) und V(A) mit $V^2 \subset U$ sind dann disjunkt.

11.8 Gleichmäßig stetige Abbildungen. Eine Abbildung f: $X \to Y$ zwischen zwei uniformen Räumen X und Y von heißt **gleichmäßig stetig**, wenn das Urbild $(f \times f)^{-1}[U]$ jeder Nachbarschaft U in Y wieder eine Nachbarschaft in X ist. Es gibt also eine Nachbarschaft V in X mit $(f \times f)[V] \subset U$. Für den Nachweis kann man sich offenbar auf **Fundamentalsysteme** beschränkten. Die **Verkettung** $g \circ f$: $X \to Z$ zweier gleichmäßig stetiger Abbildungen f: $X \to Y$ und g: $y \to z$ ist wieder gleichmäßig stetig. Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist **stetig** bezüglich der induzierten Topologien.

11.9 Satz. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ eines kompakten uniformen Raumes in einen uniformen Raum Y ist schon gleichmäßig stetig.

Beweis. $\mathcal{U}_X$ bzw. $\mathcal{U}_Y$ seien die Nachbarschaftsfilter auf X bzw. Y. Zu einem beliebigen $U \in \mathcal{U}_Y$ sei ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}_Y$ so gewählt, dass $V^2 \subset U$. Da f stetig, gibt es für jedes $x \in X$ ein $V_x \in \mathcal{U}_X$ mit $f[V_x(x)] \subset V(f(x))$ und zu diesem wiederum ein symmetrisches $W_x \in \mathcal{U}_X$ mit $W_x^2 \subset V_x$. Die $W_x(x)$ besitzen eine endliche Teilüberdeckung und der Schnitt W der entsprechenden W_x ist die gesuchte Nachbarschaft mit $(f \times f)[W] \subset U$. Für $(y;z) \in W$ existiert ein $W_x(x)$ der endlichen Teilüberdeckung mit $y \in W_x(x) \subset W_x^2(x) \subset V_x(x)$ und daher auch $z \in WW_x(x) \subset W_x^2(x) \subset V_x(x)$. Wegen $f[V_x(x)] \subset V(f(x))$ folgt $f(y), f(z) \in V(f(x))$ und damit $(f(y);f(z)) \in V^2 \subset U$.

11.10 Konstruktion uniformer Räume. Gilt für zwei uniformen Strukturen $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, so heißt $\mathcal{U}_2$ **feiner** als $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_1$ **gröber** als $\mathcal{U}_2$. Dies Verhältnisse übertragen sich auf die induzierten Topologien. Die Identität id: $(X,\mathcal{U}_1) \to (X,\mathcal{U}_2)$ ist genau dann **gleichmäßig stetig**, wenn $\mathcal{U}_1$ **feiner** als $\mathcal{U}_2$ ist.

11.11 Uniforme Räume auf Produktmengen. In Analogie zu 4.1 definiert man das **Produkt** der uniformen Räume $(X_i,\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ als die **gröbste** uniforme Struktur auf dem Produkt $\prod_{i\in I} X_i$, für die alle **Projektionen** p_i: $\prod_{i\in I} X_i \to X_i$ **gleichmäßig stetig** sind. Die **endlichen Schnitte** von Urbildern $(p_j \times p_j)^{-1}[U_j] = \left\{((x_i;y_i))_{i\in I} \in (\prod_{i\in I} X_i)^2 : (x_j;y_j) \in U_j\right\}$ von Nachbarschaften $U_j \in \mathcal{U}_j$ bilden ein **Fundamentalsystem** dieser uniformen Struktur. Beachte dazu, dass $(p_j \times p_j)^{-1}\left[U_j^{-1}\right] = \left((p_j \times p_j)^{-1}[U_j]\right)^{-1}$ und wegen $(U \cap V)^2 \subset U^2 \cap V^2$ folgt aus $V_i^2 \subset U_i$ für endliche Indexmengen E die Beziehung $\left(\bigcap_{j\in E} (p_j \times p_j)^{-1}[V_j]\right)^2 \subset \bigcap_{j\in E} (p_j \times p_j)^{-1}\left[V_j^2\right] \subset \bigcap_{j\in E} (p_j \times p_j)^{-1}[U_j]$. Wegen 11.8 ist eine Abbildung f: $(Y,\mathcal{U}) \to \prod_{i\in I} X_i$ genau dann **gleichmäßig stetig**, wenn die Urbilder $(f \times f)^{-1}\left[\bigcap_{i\in E} (p_i \times p_i)^{-1}[U_i]\right] = \bigcap_{i\in E} (p_i \circ f \times p_i \circ f)^{-1}[U_i]$ von Nachbarschaften des **Fundamentalsystems** auch wieder Nachbarschaften in $(Y,\mathcal{U})$ sind. f ist also genau dann gleichmäßig stetig, wenn alle **Komponenten** $p_i \circ f$: $(Y,\mathcal{U}) \to (X_i,\mathcal{U}_i)$ gleichmäßig stetig sind.

11.12 Uniforme Räume auf Teilmengen. In Analogie zu 4.2 definiert man den **uniformen Unterraum** auf der Teilmenge $A \subset X$ als die **gröbste** uniforme Struktur auf A, für die die **Injektion** j: $A \to X$ **gleichmäßig stetig** ist. Sie besteht aus den Schnitten der Nachbarschaften auf X mit A^2.

11.13 Satz. Ist A **dicht** in X, so bilden die Abschlüsse in X^2 der Nachbarschaften des uniformen Unterraums A bereits ein Fundamentalsystem für die Nachbarschaften in X.

Beweis. Für eine **offene** Nachbarschaft U von X gilt $U \subset \overline{U \cap A^2}$, denn für $(x;y) \in U$ muss jede Umgebung $V(x) \times W(y)$, welche o.B.d.A in U liegt, auch A^2 schneiden und damit ist (x;y) Berührungspunkt von $U \cap A^2$. Insbesondere ist $\overline{U \cap A^2}$ selbst eine Nachbarschaft und enthält $\overline{U}$. Die Behauptimg folgt dann aus 11.6.

12 Uniformisierung und Metrisation

12.1 Pseudometriken.

13 Vervollständigung und Kompaktifizierung

13.1 Cauchy-Filter.

Index

Literatur

[1] Bourbaki, Nicolas: Topologie générale, Hermann 1961

[2] Kelley, John: General topology, Springer 1955

[3] von Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer 1979

[4] http://www.poenitz-net.de/Mathematik/10.Mengenlehre.pdf