Topologie

Arne Pönitz

März 2018

Vorwort

Die mengentheoretische Topologie befasst sich mit verallgemeinerten Begriffen von **Raum** und **Abstand**. Der Abstandsbegriff ist die Voraussetzung für die Entwicklung der **Konvergenz- und Stetigkeitsbegriffe** der Infinitesimalrechnung insbesondere in der **Funktionentheorie**, **Funktionalanalysis**, **Differentialgeometrie** und **Stochastik**.

Die Darstellung ist bis auf einige Umstellungen und kleine Änderungen eine Zusammenfassung des klassischen Buches derer **von Querenburg** [3]. Die mengentheoretischen Grundlagen werden in [4] behandelt und sind daher nicht mehr in diesem Text enthalten. Neben der **Mengenlehre** werden auch solide Grundkenntnisse in der **Analysis** vorausgesetzt. Aus Gründen der Übersicht sind einfache Aussagen und Sätze ohne Beweis in den Text integriert. Die ausführliche Begründung und gegebenenfalls auch Visualisierung dieser Aussagen ist unerlässlich für das Verständnis des Textes und ersetzt explizite Übungsaufgaben zu exotischen topologischen Räumen. In der Einleitung werden grundlegende Begriffe und Schreibweisen auf **metrischen Räumen** eingeführt, die zum größten Teil aus der Analysis bekannt sein sollten. Nachdem sich herausgestellt hat, dass verschiedene Metriken zu identischen Raum- und Abstandsbegriffen führen können und damit offenbar nicht den Kern dieser Begriffe beschreiben, gelangt man dazu, den Begriff der **offenen Menge** bzw. **Umgebung** in den Mittelpunkt der Betrachtungen zu rücken. Nach dieser Motivation werden in den folgenden Abschnitten 2 - 4 die grundlegenden Begriffe der Topologie eingeführt: **Basis**, **Subbasis**, **Umgebungen**, **Abzählbarkeitsaxiome**, **stetige** und **offene Funktionen**, Konstruktion topologischer Räume auf **Teil-, Produkt-, Quotienten- und Summenmengen** sowie **Zusammenhang**. Für die Erweiterung des **Konvergenzbegriffes** von wohlgeordneten Folgen auf weniger strukturierte Mengen wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts der Begriff des **Netzes** bzw. der **gerichteten Menge** von **Eliakim Hastings Moore** eingeführt und später von amerikanischen Mathematikern um **John Wilder Tukey** und **Garrett Birkhoff** weiter entwickelt. Netze werden z.B. von **John Kelley** in seinem klassischen Darstellung [2] verwendet. In diesem Text wird der von **Henri Cartan**, **Jean Dieudonné** und anderen französischen Mathematikern unter dem Pseudonym **Nicolas Bourbaki** [1] um 1940 entwickelte Begriff des **Filters** verwendet. Er ist weniger anschaulich, aber beweistechnisch oft günstiger und führt zu den gleichen Ergebnissen wie die Netztheorie. Die folgenden Abschnitte behandeln **Trennungseigenschaften** und die Standardergebnisse zur Fortsetzung stetiger Funktionen auf normalen Räumen nach den Sätzen von **Urysohn** und **Tietze** sowie die **Partitionen der Eins**. Anschließend werden verschiedene **Kompaktheitsbegriffe** sowie die **Uniformisierung, Metrisation**, **Vervollständigung und Kompaktifizierung** topologischer Räume entwickelt. Die wichtigsten Anwendungen der Topologie beziehen sich auf **Funktionenräume**. Die **Topologie der kompakten Konvergenz** führt auf den verallgemeinerten **Satz von Stone-Weierstrass** für Algebren stetiger komplexwertiger Funktinen uaf kompakten Räumen. Der Begriff der **gleichgradigen Stetigkeit** ermöglicht schließlich weitreichende Konvergenzaussagen für stetige Funktionen auf lokalkompakten Räumen mit Werten in separierten Räumen auch ohne algebraische Struktur in Form des verallgemeinerten **Satzes von Ascoli**.

Weilheim, im März 2018 — Arne Pönitz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Indexschreibweise. Nach dem **Auswahlaxiom** (siehe z.B. [4] 14.2.1) gibt es eine Auswahlfunktion x mit $x(i) \in i$ für jede Menge i. Daher existiert für jede Menge I ihr **Produkt** $\prod I := \{x : I \to \bigcup I : x(i) \in i \forall i \in I\}$. Jedem Element i der **Indexmenge** I wird also ein Element $x(i)$ aus i zugewiesen. Die **große Vereinigung** $\bigcup I$ ist die Menge aller Elemente von Elementen i aus I. Die **indizierte Schreibweise** $\prod_{i \in I} X_i := \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : x(i) := x_i \in X_i\}$ wird verwendet, wenn die Funktionswerte x_i der Auswahlfunktion voneinander unterschieden werden müssen.

1.2 Metrik. Der natürlichste Abstandsbegriff auf einer Menge X ist eine **Metrik**. Dabei handelt es sich um eine Funktion $d : X^2 \to [0; \infty[$ mit den Eigenschaften

1. $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x; y) = d(y; x)$ für alle $x, y \in X$ (**Symmetrie**)
3. $d(x; y) + d(y; z) \leq d(x; z)$ für alle $x, y, z \in X$ (**Dreiecksungleichung**).

Das Paar $(X; d)$ heißt dann **metrischer Raum**. Eine der wichtigsten Aufgaben der Topologie ist die Formuliereung notwendiger und hinreichender Bedingungen für die **Existenz** einer Metrik.

1.3 Normierte Vektorräume: Für den **Vektorraum** X über dem Körper $K \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$ wird eine Funktion $\|\| : X \to [0; \infty[$ als **Norm** bezeichnet, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in X$.

Beispiele: Auf $X = \mathbb{C}^n$ erhält man durch $\|(x_1; ...; x_n)\| := \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \cdot \overline{x}_i}$ die **euklidische Norm** und auf dem Raum der **stetigen komplexwertigen Funktionen** $X = C([a; b]; \mathbb{C})$ auf dem **abgeschlossenen Intervall** $[a; b]$ durch $\|f\| := \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ die **Supremumsnorm**. Durch $d(x; y) := \|x - y\|$ ergibt sich dann eine Metrik auf X.

1.4 Produktmetriken. Auf einem **endlichen Produkt** $\prod_{i \in I} X_i$ metrischer Räume $(X_i; d_i)$ kann man drei verschiedene Metriken definieren durch

1. $d'(x; y) := \sum_{i \in I} d_i(x_i; y_i)$
2. $d''(x; y) := \sqrt{\sum_{i \in I} d_i^2(x_i; y_i)}$
3. $d'''(x; y) := max_{i \in I} d_i(x_i; y_i)$

1.5 Satz: Auf einem **abzählbar unendlichen Produkt** $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ metrischer Räume $(X_n; d_n)$ wird durch

$d(x; y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x_n; y_n)}{2^{n+1}(1 + d_n(x_n; y_n))}$ eine Metrik definiert.

Beweis: Zu zeigen ist nur die Dreiecksungleichung. Wir kürzen ab $a := d_n(x_n; z_n)$, $b := d_n(x_n; y_n)$ und $c := d_n(y_n; z_n)$. Nach Voraussetzung ist dann $a \leq b + c$. Wegen der Monotonie der Abbildung $x \to \frac{x}{1+x}$ für $x \geq 0$ folgt daraus $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c+bc}{1+b+c+bc} \leq \frac{b+c+2bc}{1+b+c+bc} = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$. Damit gilt die Dreiecksungleichung für jeden einzelnen Summanden und da aufgrund der absoluten Konvergenz die Summationsreihenfolge beliebig ist, folgt die Gültigkeit für die ganze Reihe.

1.6 Topologische Begriffe auf metrischen Räumen. Sei $(X; d)$ ein metrischer Raum. Die Menge $B_r(x) := \{y \in X : d(x; y) < r\}$ heißt dann **offene Kugel** um x mit Radius r. Eine **Umgebung** von x ist eine Menge, die eine offene Kugel um x enthält. Eine Menge $A \subset X$ heißt **offen**, wenn sie Umgebung für jedes ihrer Elemente ist. A heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist. Eine Funktion $f : (X; d) \to (X'; d')$ heißt **stetig**, wenn die Urbilder offener Mengen auf X' wieder offen auf X sind: O offen auf $x' \Rightarrow f^{-1}(O)$ offen auf X. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass $f[B_\delta(x)] \subset B'_\epsilon(f(x))$. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf einem metrischen Raum X heißt **konvergent** gegen den **Limespunkt** oder **Grenzwert** $x \in X$, wenn in jeder Umgebung von x **schließlich alle** Folgenglieder liegen: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n(\epsilon) : x_n \in B_\epsilon(x)$. Ein Punkt $y \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge, wenn in jeder Umgebung von y **unendlich viele** Folgenglieder liegen: $\forall \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m(n;\epsilon) \geq n : x_{m(n;\epsilon)} \in B_\epsilon(y)$. Die Folge heißt **Cauchy-Folge**, wenn für jedes $\epsilon > 0$ **schließlich alle** Folgenglieder in einer ϵ-Umgebung eines Folgengliedes liegen: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\epsilon) : x_n \in B_\epsilon\left(x_{n(\epsilon)}\right)$. Jeder Häufungspunkt einer Cauchy-Folge ist auch Limespunkt. X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge auf X konvergiert. $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, denn z.B. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ ist eine Cauchy-Folge, die gegen den Limespunkt $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ konvergiert.$f : (X;d) \to (X';d')$ ist genau dann **stetig**, wenn für jede gegen x konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf X auch die **Bildfolge** $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf X' gegen das Bild $f(x)$ konvergiert. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to (X';d')^{(x';d')}$ konvergiert **gleichmäßig** bzw. bezüglich der **Supremumsnorm** gegen$f : X \to X'$, wenn in **jeder Umgebung von jedem** $f(x)$ **schließlich alle** Folgenglieder liegen: $\forall \epsilon > 0 \exists n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n((\epsilon) \forall x \in X : f_n(x) \in B_\epsilon(f(x))$.

1.7 Satz. Sind alle $f_n : (X;d) \to (X';d')$ stetig und konvergieren **gleichmäßig** gegen f, so ist auch f stetig.

Beweis. $\forall x \in X \wedge \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \wedge n(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n(\epsilon) \wedge y \in B_\delta(x) : f(y) \in B_{\epsilon/3}(f_n(y))$ für **ein** δ **unabhängig** vom gewählten y aufgrund der **gleichmäßigen** Konvergenz der f_n, $f_n(y) \in B_{\varepsilon/3}(f_n(x))$ wegen der Stetigkeit der f_n an der Stelle $x \in X$ und $f_n(x) \in B_{\epsilon/3}(f(x))$ aufgrund der Konvergenz der f_n an der Stelle x. Aus der Dreiecksungleichung folgt $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$.

1.8 Beispiel. Die **stetigen** Parabeln $f_n(x) = x^n$ konvergieren im Intervall $[0;1]$ **punktweise aber nicht gleichmäßig** gegen die **unstetige** Funktion f mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x < 1$ und $f(1) = 1$.

1.9 Satz: Die drei Metriken aus 1.4 sind **äquivalent** in Bezug auf offener Mengen und stetige Funktionen: Eine Menge $O \subset X = \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann offen bezüglich d', wenn sie offen ist bezüglich d'' bzw d'''. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann stetig bezüglich d', wenn sie stetig ist bezüglich d'' bzw. d'''.

Beweis: Wegen $0 \leq (d_i - d_j)^2 \Leftrightarrow 2d_i d_j \geq 2d_i d_j$ folgt $\left(\sum_{1\leq i\leq n} d_i\right)^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} d_i d_j \leq \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n}(d_i^2 + d_j^2) = n\sum_{1\leq i\leq n} d_i^2$. Damit erhält man die Abschätzung $d'' \leq d' \leq \sqrt{n} \cdot d'' \Leftrightarrow B'_r(x) \subset B''_r(x) \subset B'_{\sqrt{n}\cdot r}(x)$. Offensichtlich gilt außerdem $d''' \leq d' \leq n \cdot d''' \Leftrightarrow B'_r(x) \subset B'''_r(x) \subset B'_{n\cdot r}(x)$.

Aus dem vorangehenden Satz läßt sich schließen, dass Raum- und Abstand auf einer Menge X weniger durch die Metrik als durch die **offenen Mengen** bzw. **Umgebungen** selbst charakterisiert werden. In den folgenden Abschnitten werden daher die Begriffe der offenen Menge bzw. Umgebung zunächst unabhängig von einer Metrik entwickelt. Anschließend wird untersucht, welche Eigenschaften der offenen Mengen bzw. Umgebungen notwendig und hinreichend für die Existenz einer Metrik sind.

2 Topologische Räume

2.1 Offene und abgeschlossene Mengen: Eine Mengenfamilie $\mathcal{O}$ heißt **Topologie**, wenn **Vereinigungen beliebiger Teilfamilien** aus $\mathcal{O}$ und **Durchschnitte nicht leerer endlicher Teilfamilien** aus $\mathcal{O}$ wieder zu $\mathcal{O}$ gehören. Jede Topologie enthält die Mengen $\emptyset = \bigcup\emptyset$ und $X := \bigcup\mathcal{O}$. Das Paar $(X;\mathcal{O})$ heißt **topologischer Raum**. Die Elemente von $\mathcal{O}$ sind die **offenen Mengen** und ihre Komplemente bezüglich X sind die **abgeschlossene Mengen**. Auf eine Menge X sind die **indiskrete Topologie** $\{\emptyset; X$ die kleinste und die **diskrete Topologie** 2^X die größte mögliche Topologie. Gilt für zwei Topologien $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, so heißt $\mathcal{O}_2$ **feiner** als $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_1$ **gröber** als $\mathcal{O}_2$.

2.2 Basis einer Topologie: Eine Teilfamilie $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathcal{O}$, wenn zu jedem $O \in \mathcal{O}$ und $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ existiert mit $x \in B \subset O$. Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subset 2^X$ ist genau dann die Basis einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{O}$, wenn $\bigcup\mathcal{B} = X$ und jeder Durchschnitt einer nicht leeren endlichen Teilfamilie aus $\mathcal{B}$ gleich der Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist. $\mathcal{O}$ ist dann die Familie aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{B}$. In einem **metrischen Raum** $(X;d)$ bilden z.B. die **offenen Kugeln** $B_r(x)$ für $r > 0$ und $x \in X$ eine Basis der offenen Mengen. Die gemäß 1.3 durch die euklidische Norm bzw. euklidische Metrik erzeugt Topologie heißt auch **natürliche Topologie** auf $\mathbb{R}^n$.

2.3 Subbasis einer Topologie: Sei $\mathcal{S} \subset 2^{\mathrm{X}}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von X. Die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ bildet die Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X. $\mathcal{S}$ heißt dann **Subbasis** der Toplogie $\mathcal{O}$. Die Intervalle der Gestalt $]-\infty; a[$ und $]a; \infty[$ mit $a \in \mathbb{R}$ bilden z.B. eine Subbasis der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$.

2.4 Umgebungen: Ein Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungssystem** eines Punktes $x \in X$ und die Mengen $U \in \mathcal{U}(x)$ heißen **Umgebungen** von x, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ enthält x und darüberhinaus eine weitere Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$, so dass $U \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V \subset U$.
2. Mit U gehört auch jede darüberliegende Menge $U' \supset U$ zu $\mathcal{U}(x)$.
3. Mit endlich vielen Mengen $U_1; ...; U_n$ liegt auch ihr Schnitt $\bigcap_{1 \le i \le n} U_i$ in $\mathcal{U}(x)$.

2.5 Satz:

1. Ordnet man jedem Punkt x einer Menge X ein Umgebungssystem $\mathcal{U}(\mathrm{x})$ zu, so bildet die Familie aller Mengen, die Umgebung jedes ihrer Punkte sind, eine Topologie $\mathcal{O}$ auf X.
2. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann Umgebung des Punktes $x \in X$, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in O \subset U$.
3. Die Topologie $\mathcal{O}$ ist durch die Eigenschaft 2 eindeutig bestimmt.

Beweis:

1. Wegen 2.4.2 gehören beliebige Vereinigungen solcher Mengen sowie die gesamte Menge X wieder zu $\mathcal{O}$ und wegen 2.4.3 gilt dies auch für endliche Schnitte. Die leere Menge $\emptyset$ gehört ebenfalls zu $\mathcal{O}$, da sie keine Punkte besitzt und die Bedingung daher trivialerweise erfüllt ist.
2. Sei $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(\mathrm{x})$, dann ist nach 2.4.1 die Menge $\overset{o}{U} := \{y \in U : U \in \mathcal{U}(y)\}$ nicht leer. Für ein $y \in \overset{o}{U}$ gibt es wegen 2.4.1 ein $V \in \mathcal{U}(\mathrm{y})$ mit $U \in \mathcal{U}(z)$ für alle $z \in V \subset U$. Damit folgt sogar $V \subset \overset{o}{U}$ und nach 2.4.2 folgt $\overset{o}{U} \in \mathcal{U}(\mathrm{y})$. $\overset{o}{U}$ ist also Umgebung jedes seiner Punkte und damit die gesuchte offene Menge um x in U. Die Umkehrung ist trivialerweise erfüllt.
3. Sei $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie auf X mit der Eigenschaft 2. und $O' \in \mathcal{O}'$. Dann ist O' nach Voraussetzung Umgebung jedes ihrer Punkte und gehört nach 1. zu $\mathcal{O}$.

Bemerkung: Die eindeutige Erzeugung einer Topologie durch Umgebungssysteme wird in Abschnitt 11 durch den Begriff des **uniformen Raumes** verallgemeinert und führt anschließend auf die **Metrisationsbedingungen** füre topologische Raume.

2.6 Abzählbarkeitsaxiome: Eine Teilmenge $\mathcal{B}(x)$ eines Umgebungssystems $\mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis**, wenn zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $B \in \mathcal{B}(x)$ existiert mit $B \subset U$. Ein topologischer Raum $(X; \mathcal{O})$ erfüllt das **1. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Jeder **metrische Raum** erfüllt das 1 Abzählbarkeitsaxiom, da die offenen Kugeln $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}*$ eine Umgebungsbasis von x bilden. Ein topologischer Raum $(X; \mathcal{O})$ erfüllt das **2. Abzählbarkeitsaxiom**, wenn $\mathcal{O}$ eine abzählbare Basis besitzt. Die **natürliche Topologie** auf $\mathbb{R}^n$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, denn $\mathbb{Q}^{n+1}$ ist abzählbar und die offenen Kugeln $B_{1/n}(x)$ mit $n \in \mathbb{N}*$ für x mit rationalen Koordinaten bilden eine Basis der offenen Mengen. Nach 2.5.2 und 2.5.3 schließt das 2. Abzählbarkeitsaxiom das erste mit ein.

2.7 Abgeschlossene Hülle und offener Kern: Sei A eine Teilmenge des topologischen Raumes $(X; \mathcal{O})$. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von A, wenn jede Umgebung von x mit A einen nichtleeren Durchschnitt bildet. Die Menge der Berührungspunkte von A ist die **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluß** $\overline{A}$ von A. $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Der Punkt $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von A, wenn A Umgebung von x ist. Die Menge der inneren Punkte von A heißt **offener Kern** oder das **Innere** $\overset{o}{A}$ von A. $\overset{o}{A}$ ist die größte offene Menge, die ganz in A liegt. Allgemein gilt $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \supset \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$ und $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.

2.8 Randpunkt, dichte und nirgends dichte Mengen: Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** von A, wenn x Berührungspunkt von A und von $X \setminus A$ ist. Die Menge der Randpunkte von A heißt **Rand** $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{o}{A}$ von A. Da $X \setminus \partial A = \overset{o}{A} \cup X \setminus \overline{A}$ offen, ist der Rand einer Menge immer abgeschlossen. A heißt **dicht** in X, wenn jeder Punkt aus X Berührungspunkt von A ist: $\overline{A} = X$. A heißt **nirgends dicht** in X, wenn $\overset{o}{\overline{A}} = \emptyset$. In diesem Fall besitzt $\overline{A}$ keine inneren Punkte und $X \setminus \overline{A}$ ist dicht. Für offene A liegt ∂A außerhalb von A und für abgeschlossene A liegt ∂A innerhalb von A. In diesen Fällen ist ∂A daher nirgends dicht in X.

2.9 Beispiele: $\mathbb{N}$ ist offensichtlich abgeschlossen und nirgends dicht in $\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$, denn zwischen zwei beliebigen (o.b.d.A. gleichnamigen) rationalen Zahlen $\frac{n}{m}$ und $\frac{n+1}{m}$ liegt immer die irrationale Zahl $\frac{n}{r}\sqrt{2}$ mit $r \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{r}{m} < \sqrt{2} < \frac{r+1}{m}$. Die rationalen Zahlen besitzen keine inneren Punkte und liegen dicht in $\mathbb{R}$: $\overset{o}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und $\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Das gleiche gilt für die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2.10 Das Cantorsche Diskontinuum: Sei $f : \{0;2\}^{\mathbb{N}} \to [0;1]$ definiert durch $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$ für jede Folge $x = (x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in \{0;2\}$. Dann ist f injektiv und die überabzählbare Menge $T := f\left[\{0;2\}^{\mathbb{N}}\right]$ ist abgeschlossen und nirgends dicht in $[0;1]$.

Beweis: Für $x \neq y$ und m das kleinste n mit $x_n \neq y_n$ sei o.B.d.A $x_m = 0$ und $y_m = 2$. Dann ist $|f(y) - f(x)| = \left|\sum_{n\geq m} \frac{y_n - x_n}{3^n}\right| = \left|\frac{2}{3^m} + \sum_{n\geq m+1} \frac{y_n - x_n}{3^n}\right| \geq \left|\frac{2}{3^m} - \frac{2}{3^m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n}\right| = \left|\frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^m}\right| = \frac{1}{3^m}$ und f damit injektiv. Sei nun $a = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \in [0;1] \setminus T$ mit $a_n \in \{0;1;2\}$ und m das kleinste n mit $a_n = 1$. Für jedes $x \in \{0;2\}^{\mathbb{N}}$ gilt dann $|f(x) - a| \geq \left|\sum_{n\geq m} \frac{a_n - x_n}{3^n}\right| = \left|\frac{1}{3^m} + \sum_{n\geq m+1} \frac{a_n - x_n}{3^n}\right| \geq \left|\frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^m}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3^n}\right| = \left|\frac{1}{3^m}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2\cdot 3^m} =: \epsilon$ und damit $B_\varepsilon(a) \cap T = \emptyset$. Also ist $[0;1] \setminus T$ offen und T abgeschlossen. Aus der obigen Abschätzung folgt aber auch umgekehrt, dass es für alle $x \in \{0;2\}^{\mathbb{N}}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ ein $a = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \in [0;1] \setminus T$ gibt mit $|f(x) - a| = \frac{1}{3^m}$. Man muss nur $a_n = x_n$ für $n \neq m$ und $a_m = 1$ wählen. Es gibt also keine inneren Punkte von T und aus der Abgeschlossenheit folgt, dass T nirgends dicht ist in $[0;1]$.

3 Stetige Funktionen

3.1 Stetige Funktionen: $f : (X;\mathcal{O}_X) \to (Y;\mathcal{O}_Y)$ heißt **stetig**, wenn die **Urbilder offener Mengen** in $(Y;O_Y)$ unter f wieder **offen** in $(X;O_X)$ sind: $\forall O \in \mathcal{O}_Y : f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$. Wegen $f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O)$ ist f genau dann stetig, wenn die **Urbilder abgeschlossener Mengen** in $(Y;O_Y)$ unter f wieder abgeschlossen in $(X;O_X)$ sind. Wegen $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} A_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[A_i]$ und $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[A_i]$ ist die Funktion $f : X \to Y$ schon genau dann stetig, wenn nur die Urbilder einer **Subbasis** $\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}_Y$ offen in $(X;\mathcal{O}_X)$ sind. $(X;\mathcal{O}_X)$ trägt genau dann die **diskrete Topologie** und $(Y;\mathcal{O}_Y)$ trägt genau dann die **indiskrete Topologie,** wenn **jede** Abbildung $f : (X;\mathcal{O}_X) \to (Y;\mathcal{O}_Y)$ stetig ist. $\mathcal{O}_2$ ist **feiner** als $\mathcal{O}_1$ genau dann, wenn die **Identität** $\mathrm{id} : (X;\mathcal{O}_X) \to (Y;\mathcal{O}_Y)$ stetig ist. Für zwei Abbildungen $f : (X;\mathcal{O}_X) \to (Y;\mathcal{O}_Y)$ und $g : (Y;\mathcal{O}_Y) \to (Z;\mathcal{O}_Z)$ ist auch die **Verkettung** $g \circ f : (X;\mathcal{O}_X) \to (Z;\mathcal{O}_Z)$ stetig. Daher sind z.B. auch die **Kehrwerte** $\frac{1}{f}$ für $f(x) \neq 0$ sowie die **Beträge** $|f|$ und **Vielfache** $\alpha \cdot f$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ für jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ wieder stetig.

3.2 Stetigkeit in einem Punkt: $f : (X;\mathcal{O}_X) \to (Y;\mathcal{O}_Y)$ heißt **stetig im Punkt** $x \in X$, wenn die **Urbilder aller Umgebungen von** $f(x)$ unter f wieder **Umgebungen von** x sind: $\forall U \in \mathcal{U}(f(x)) : f^{-1}(U) \in \mathcal{U}(x)$. Wegen 2.2 ist f schon genau dann stetig im Punkt $x \in X$, wenn die Urbilder von Mengen einer **Umgebungsbasis** $\mathcal{B}(f(x))$ wieder zu einer **Umgebungsbasis** $\mathcal{B}(x)$ gehören: $\forall B \in \mathcal{B}(f(x)) : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(x)$. f ist genau dann stetig auf X, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

3.3 Beispiele: Die Funktion $f : (X;\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ heißt **halbstetig nach oben** an der Stelle $x \in X$, wenn $\forall \epsilon > 0\, \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset f^{-1}[]-\infty; f(x) + \varepsilon[]$. f ist genau dann halbstetig nach oben für alle $x \in X$, wenn sie stetig ist bezüglich der Topologie $\mathcal{O}^+ = \{]-\infty; a[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset; \mathbb{R}\}$. Entsprechend heißt f **halbstetig nach unten** an der Stelle $x \in X$, wenn $\forall \epsilon > 0\, \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset f^{-1}[]f(x) - \varepsilon; \infty[]$. Gilt dies für alle $x \in X$, so ist sie stetig bezüglich der Topologie $\mathcal{O}^- = \{]a; \infty[: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset; \mathbb{R}\}$.

3.4 Homöomorphismen: $f : (X; \mathcal{O}_X) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ heißt **offen** bzw. **abgeschlossen**, wenn die Bilder offener bzw. abgeschlossenener Mengen aus $\mathcal{O}_X$ wieder offen bzw., abgeschlossen in $\mathcal{O}_Y$ sind. Wegen $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$ ist f schon genau dann offen, wenn nur die Bilder einer **Basis** $\mathcal{B}$ von $\mathcal{O}_X$ offen in $\mathcal{O}_Y$ sind. Entsprechend zu 3.2 ist f genau dann offen, wenn für alle $x \in X$ die **Bilder aller Umgebungen von** x unter f wieder **Umgebungen von** $f(x)$ sind $\Leftrightarrow \forall x \in X\, \forall U \in \mathcal{U}(x) : f[U] \in \mathcal{U}(f(x))$. f heißt **Homöomorphismus**, wenn sie stetig, offen und bijektiv ist. Eine stetige Funktion $f : (X; \mathcal{O}_X) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ ist also genau dann ein Homöomorphismus, wenn die Umkehrung $f^{-1} : (Y; \mathcal{O}_Y) \to (X; \mathcal{O}_X)$ existiert und stetig ist. Die toplogischen Räume $(X; \mathcal{O}_X)$ und $(Y; \mathcal{O}_Y)$ heißen dann **homöomorph**. Z.B. ist das offene Intervall $]-1; 1[$ mittels $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ bzw. $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ bezogen auf die natürliche Topologie in beiden Räumen.

3.5 Satz: Für $f : (X; \mathcal{O}_X) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ gilt

1. f ist stetig $\Leftrightarrow f\left[\overline{A}\right] \subset \overline{f[A]}\, \forall A \subset X \Leftrightarrow f^{-1}\left[\overline{B}\right] \supset \overline{f^{-1}[B]}\, \forall B \subset Y$
2. f ist offen $\Leftrightarrow f\left[\overline{A}\right] \supset \overline{f[A]}\, \forall A \subset X \Leftrightarrow f^{-1}\left[\overline{B}\right] \subset \overline{f^{-1}[B]}\, \forall B \subset Y$

Beweis:

1. $\Rightarrow$: Angenommen, es gibt ein $x \in \overline{A}$ mit $f(x) \in Y \setminus \overline{f[A]}$. Da $Y \setminus \overline{f[A]}$ offen ist, existiert ein $U \in \mathcal{U}(f(x)$ mit $U \subset X \setminus \overline{f[A]}$. Da f **stetig** ist, gilt $f^{-1}[U] \in \mathcal{U}(x)$. Da x Berührungspunkt von A ist, gilt $\emptyset \neq f^{-1}[U] \cap A$ und damit $\emptyset \neq f\left[f^{-1}[U] \cap A\right] \subset U \cap f[A]$ im Widerspruch zu $U \subset X \setminus \overline{f[A]}$. $\Leftarrow$: Wenn f **nicht stetig** ist, gibt es ein $x \in X$ und ein $U \in \mathcal{U}(f(x))$ mit $\emptyset \neq V \cap (X \setminus f^{-1}[U])\ \forall V \in \mathcal{U}(x)$, d.h. $x \in \overline{A}$ bzw. $f(x) \in f\left[\overline{A}\right]$ mit $A := X \setminus f^{-1}[U]$. Andererseits gilt wegen $U \in \mathcal{U}(f(x))$ offen und [4, Satz 9.2.3] $f(x) \notin \overline{Y \setminus U} = \overline{f[X] \setminus f[f^{-1}[U]]} \supset \overline{f[X \setminus f^{-1}[U]]} = \overline{f[A]}$, d.h. $f\left[\overline{A}\right] \not\subset \overline{f[A]}$. Die zweite Äquivalenz ergibt sich mit $A := f^{-1}[B]$ bzw. $B := f[A]$ und $A \subset f^{-1}[f[A]]$.
2. $\Rightarrow$: Angenommen, es gibt ein $x \in X \setminus \overline{f^{-1}[B]}$ mit $f(x) \in \overline{B}$. Da $X \setminus \overline{f^{-1}[B]}$ offen ist, existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset X \setminus \overline{f^{-1}[B]}$. Da f **offen** ist, gilt $f[U] \in \mathcal{U}(f(x))$. Da $f(x)$ Berührungspunkt von B ist, gilt $f[U] \cap B \neq \emptyset$ und damit auch $f^{-1}[f[U] \cap B] = U \cap f^{-1}[B]$ im Widerspruch zu $U \subset X \setminus \overline{f^{-1}[B]}$. $\Leftarrow$: Wenn f **nicht offen** ist, gibt es ein $x \in X$ und ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f[U] \notin \mathcal{U}(f(x)$, d.h., $\emptyset \neq V \cap Y \setminus f[U] = V \cap f[A] \neq \emptyset\, \forall V \in \mathcal{U}(f(x))$ mit $B := Y \setminus f[U]$, also $f(x) \in \overline{B}$ bzw. $x \in f^{-1}\left[\overline{B}\right]$. Andererseits gilt wegen $U \in \mathcal{U}(x)$ offen $x \notin \overline{X \setminus U} = \overline{f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[f[U]]} = \overline{f^{-1}[B]}$. Die erste Äquivalenz ergibt sich wie oben mit $A := f^{-1}[B]$ bzw. $B := f[A]$ und $A \subset f^{-1}[f[A]]$.

3.6 Satz: Sei $f : (X; \mathcal{O}_X) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ abgeschlossen. Für jedes $B \subset Y$ und offene $U \subset X$ mit $f^{-1}[B] \subset U$ gibt es ein offenes $V \supset B$ mit $f^{-1}[V] \subset U$.

Beweis: $V := Y \setminus f[X \setminus U]$ ist nach Voraussetzung offen und wegen $X \setminus U \subset f^{-1}[f[X \setminus U]]$ folgt $f^{-1}[V] = X \setminus f^{-1}[f[X \setminus U]] \subset U$. Außerdem gilt $f^{-1}[B] \subset U \Rightarrow B \subset f[U] \Rightarrow Y \setminus B \supset Y \setminus f[U] \supset f[X \setminus U] \Rightarrow B \subset Y \setminus f[X \setminus U] = V$.

4 Topologien auf Teil-, Produkt- und Quotientenmengen

4.1 Initialtopologie: Die **Initialtopologie** $\mathcal{O}$ auf einer Menge X bezüglich der Funktionen $f_i : X \to Y_i$ in die topologischen Räume $(Y_i; \mathcal{O}_i)$ ist die gröbste Topologie auf X, für die alle f_i stetig sind. Wegen 3.1 bilden die Urbilder $f_i^{-1}[O_i]$ offener Mengen $O_i \in \mathcal{O}_i$ schon eine **Subbasis** der Initialtopologie.

4.2 Produkttopologie: Die **Produkttopologie** auf dem Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ der topologischen Räume $(X_i; \mathcal{O}_i)_{i\in I}$ ist die Initialtoplogie bezüglich der **Projektionen** $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$. Wegen 3.4 und $p_j\left(\bigcap_{i\in I} p_i^{-1}[O_i]\right) = O_j$ für $j \in I$ und X für $j \notin J$ sind die Projektionen p_i sogar **offen**. Wegen 3.1 ist eine Abbildung $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ genau dann **stetig**, wenn die Urbilder $f^{-1}\left[p_i^{-1}[O_i]\right] = (p_i \circ f)^{-1}[O_i]$ von Subbasismengen offen in $(Y; O)$ sind. f ist also genau dann stetig, wenn alle **Komponenten** $p_i \circ f : (Y; \mathcal{O}) \to (X_i; \mathcal{O}_i)$ stetig sind.

1. Wegen $\prod_{1\leq k\leq n} B_{\epsilon/\sqrt{n}}(x_k) \subset B^n_\epsilon(\vec{x}) \subset \prod_{1\leq k\leq n} B_{\epsilon\cdot\sqrt{n}}(x_k)$ mit $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ ist die durch die euklidische Norm $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ erzeugte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ identisch mit dem Produkt der durch den Betrag $|x_k|$ erzeugten Topologien auf $\mathbb{R}$.
2. Insbesondere kann auch $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ als Produktraum betrachtet werden, woraus nach 3.1 die Stetigkeit von **Realteil** $\mathrm{Re}f = p_{Re} \circ f$ und **Imaginärteil** $\mathrm{Im}f = p_{Im} \circ f$ für stetige $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folgt.
3. Wegen $\{(u + v) : u \in B_\delta(x) \wedge v \in B_\delta(y)\} \subset B_\epsilon(x+y)$ mit $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ bzw. $\{(u \cdot v) : u \in B_\delta(x) \wedge v \in B_\delta(y)\} \subset B_\epsilon(x \cdot y)$ mit $\delta = \frac{\epsilon}{3\max\{\|x\cdot y\|;1\}}$ sind **Addition** $+ : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ und **Multiplikation** $\cdot : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ stetige Abbildungen, so dass für stetige $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch $f + g$ bzw. $f \cdot g$ stetig sind.

4.3 Unterraumtopologie: Die **Unterraum- oder Spurtopologie** $\mathcal{O}_A$ auf einer **Teilmenge** A des topologischen Raumes $(X; \mathcal{O}_X)$ ist die Initialtopologie bezüglich der **kanonischen Injektion** $i_A : A \to X$ und besteht aus den Schnitten $i_A^{-1}[O] = O \cap A$ mit offenen Mengen $O \in \mathcal{O}$. Eine Abbildung $g : (Y; \mathcal{O}_Y) \to (A; \mathcal{O}_A)$ ist also genau dann stetig, wenn $i_A \circ g : (Y; \mathcal{O}_Y) \to (X; \mathcal{O}_X)$ stetig ist.

1. Für jede stetige Funktion $f : (X; \mathcal{O}_X) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ ist nach 3.1 auch ihre **Restriktion** $f \circ i_A := f|_A : (A; \mathcal{O}_A) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ stetig.
2. Die Umkehrung gilt aber nur, wenn die Teilmengen A_i, auf denen die Restriktionen $f|_{Ai} : (A_i; \mathcal{O}_{Ai}) \to (Y; \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, zumindest eine **Überdeckung** von X bilden, d.h., wenn $\bigcup_{i\in I} A_i = X$ gilt.
3. Sind alle A_i **offen**, so ist die Überdeckungseigenschaft alleine schon hinreichend, denn für eine offene Menge $O \in \mathcal{O}_Y$ ist dann auch $f^{-1}[O] = f^{-1}[O] \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[O] \cap A_i = \bigcup_{i\in I} f|_{Ai}^{-1}[O]$ offen in $\mathcal{O}_X$.
4. Sind alle A_i **abgeschlossen**, so muss die Überdeckung zusätzlich mindestens **lokal-endlich** sein, d.h., zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$, die nur von endlich vielen A_i geschnitten wird. Dabei kann man annehmen, dass $x \in A_i$ für alle diese endlich vielen A_i. Ist dies für ein A_i nicht erfüllt, so kann man aufgrund der Abgeschlossenheit der A_i die Umgebung U durch Übergang auf $U \cap X \setminus A_i$ entsprechend verkleinern. Sei also $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset \bigcup_{i\in J} A_i$ und J endlich sowie $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Aufgrund der Stetigkeit der $f|_{Ai}$ gibt es für jedes $i \in J$ ein $U_i \in \mathcal{U}(x)$ mit $f|_{Ai}[U_i] \subset V$. Dann ist $W := \bigcap_{i\in J} U_i \cap U \in \mathcal{U}(x)$ schon die gesuchte Umgebung mit $f[W] \subset V$, denn für jedes $y \in W$ gibt es ein $i \in J$ mit $y \in U_i \cap A_i$ und daher $f(y) = f|_{Ai}(y) \in V$.

4.4 Einbettungen: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Einbettung** von $(X; \mathcal{O}_X)$ in $(Y; \mathcal{O}_Y)$, wenn f ein Homöomorphismus von X auf den Unterraum $f[X]$ ist. f ist also genau dann eine Einbettung, wenn sie injektiv, stetig und offen ist. **Beispiele:** Die Parametrisierung einer **Strecke** $f : [0; 2\pi[\to [0; 2\pi[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t; 0)$ ist eine Einbettung des Zeitabschnittes $[0; 2\pi[$ in die Ebene $\mathbb{R}^2$, aber die entsprechende Bewegung auf dem **Einheitskreis** $g : [0; 2\pi[\to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (\cos(t); \sin(t))$ ist es nicht, weil das Bild jeder offenen Menge $[0; a[\subset [0; 2\pi[$ mit $a < 2\pi$ weder offen noch abgeschlossen in S^1 ist. Die Parametrisierung der **offene Spirale** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $h(t) = e^{it+t}$ ist dagegen eine Einbettung.

4.5 Quotiententopologie: Sei $(X; \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und R eine **Äquivalenzrelation** auf X. Die **Quotiententopologie** ist die feinste Topologie (auch **Finaltopologie**), für die die **kanonischen Projektion** $\pi : X \to X/R$ stetig ist. Eine Menge O von Äquivalenzklassen ist also genau dann offen bezüglich der Quotiententopologie, wenn die Menge $\pi^{-1}[O]$ aller Repräsentanten offen in $\mathcal{O}_X$ ist. Wegen 3.1 ist eine Abbildung $f : X/R \to Y$ genau dann **stetig**, wenn die Urbilder $\pi^{-1}[f^{-1}[O]] = (f \circ \pi)^{-1}[O]$ von offenen Mengen $O \in \mathcal{O}_Y$ offen in $\mathcal{O}_X$ sind. f ist also genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist.

Beispiel: Für die Äquivalenzrelation R mit $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ ist der Quotientenraum $\mathbb{R}/R$

mittels $f(t) = (\cos(2\pi t); \sin(2\pi t))$ und $f^{-1}\left((x;y)\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arctan\left(-\frac{x}{y}\right) & : x \leq 0 \wedge y > 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & : x < 0 \wedge y \leq 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\arctan\left(-\frac{x}{y}\right) & : x \geq 0 \wedge y < 0 \end{cases}$

homöomorph zum Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

4.6 Identifizierungstopologie: Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ lässt sich mittels der Äquivalenzrelation R mit $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ in die **stetige Projektion** $\pi : X \to X/R$, die **stetige Bijektion** $\overline{f} := f \circ \pi^{-1} : X/R \to f[X]$ sowie die **stetige Injektion** $j : f[X] \to Y$ zerlegen. Dabei trägt X/R die **Quotiententopologie** und $f[X] \subset Y$ die **Spurtopologie**. Die Stetigkeit von π bzw. j folgt aus 4.3 bzw 4.5 und die von $\overline{f}$ aus der Definition. Beachte, dass π^{-1} nur eine Relation, die Komposition $f \circ \pi^{-1}$ aber wieder ein Funktion ist. Ist die stetige Bijektion $\overline{f}$ zusätzlich **offen** und damit ein **Homöomorphismus**, so heißt f **identifizierende Abbildung**. Ist f außerdem **surjektiv**, so nennt man die Topologie auf $f[X] = Y$ **Identifizierungstopologie** bezüglich f. Ist $f : X \to Y$ stetig, surjektiv und offen oder abgeschlossen, so trägt Y die Identifizierungstopologie bezüglich f, weil in diesem Fall für offene bzw. abgeschlossene Mengen A in X/R auch die entsprechenden Repräsentantenmengen $\pi^{-1}[A]$ offen bzw. abgeschlossen in X und daher auch die Bilder $\overline{f}[A] = f\left[\pi^{-1}[A]\right]$ offen bzw. abgeschlossen in $f[X] = Y$ sind.

4.7 Beispiele: $f : [0; 2\pi] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (\cos(x); \sin(x))$ ist stetig, abgeschlossen und surjektiv und daher ist $[0; 2\pi]/R$ mit der **Quotiententopologie** homöomorph zum **Einheitskreis**. Wie in 4.4 festgestellt, ist $[0; 2\pi[$ mit der **Spurtopologie** aber **nicht** homöomorph zum Einheitskreis. $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\} \to S^2$ mit $g(x) = \frac{(x_1;x_2;x_3)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$ ist stetig, abgeschlossen und surjektiv und daher ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0;0;0)\}/R$ mit der Quotiententopologie homöomorph zur **Einheitssphäre**.

4.8 Topologische Summe: Die **topologische Summe** auf der Summe $\bigcup_{i \in I} X_i$ der **disjunkten** topologischen Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ ist die **feinste** Topologie (Finaltopologie), für die alle **Injektionen** $j_i : X_i \to \bigcup_{i \in I} X_i$ stetig sind. Eine Menge $O \subset \bigcup_{i \in I} X_i$ ist also genau dann offen, wenn $O \cap X_i$ für jedes $i \in I$ offen in $\mathcal{O}_\mathrm{i}$ ist. Sind die X_i nicht disjunkt, so bringt man sie mittels **Indexierung** in getrennten Dimensionen unter und betrachtet die Familie $\left(X_i \times \{i\}, \{\bigcup_{x \in O}(x; i) : O \in \mathcal{O}_i\}\right)_{i \in I}$. Die **Spurtopologie** auf $X_i \subset \bigcup_{i \in I} X_i$ entspricht dann wieder der ursprünglichen Topologie $\mathcal{O}_\mathrm{i}$.

4.9 Zusammenkleben von Räumen: Für zwei **disjunkte** topologische Räume X und Y sowie ein Abbildung $f : A \to Y$ auf der **abgeschlossenen** Teilmenge $A \subset X$ sei eine Äquivalenzrelation R auf $X \cup Y$ wie folgt erklärt: $xRy \Leftrightarrow x = y \vee f(x) = f(y) \vee x = f(y) \vee y = f(x)$. Der Quotientenraum $Y \cup_f X := (X \cup Y)/R$ heißt der durch **Zusammenkleben von** X **und** Y **mittels** f entstandene Raum. Beim Übergang von $X \cup Y$ zu $Y \cup_f X$ wird also jeder Punkt aus $f[A]$ mit allen seinen Urbildern identifiziert und die Klebestelle $A \subset X$ wird auf diese Weise mit $f[A] \subset Y$ verschmolzen.

4.10 Beispiele: Allgemein unterscheidet man die **n-dimensionale Zelle** $e^n = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, den **n-dimensionalen Ball** $D^n = \overline{e^n}$ und die **n−1 - dimensionale Sphäre** $S^{n-1} := D^n \setminus e^n$. $[2;3] \cup_f [0;1]$ ist mit $A = \{0;1\}$ und $f(0) = 2$ sowie $f(1) = 3$ homöomorph zum **Einheitskreis** S^1. $\{(1;1)\} \cup_f D^2$ ist mit $A = S^1$ und $f[A] = \{(1;1)\}$ homöomorph zur **Einheitssphäre** S^2. $D^2 \cup_{id} D^2$ ist mit $A = S^1$ ebenfalls homöomorph zur **Einheitssphäre** S^2. $[0;1] \cup_f [0;1]^2$ ist mit $A = \{0;1\} \times [0;1]$ und $f((0;y)) = y$ sowie $f((1;y)) = 1 - y$ homöomorph zum **Möbiusband**. Der **Rand** $\partial M = \{(x;y) \in M : y = 0 \vee y = 1\}$ ist wegen $f((0;0)) = f((1;1)) = 0$ und $f((0;1)) = f((1;0)) = 1$ homöomorph zum **Einheitskreis** S^1. Mittels eines entsprechenden Homöomorphismus $g : S^1 \to \partial M$ läßt sich die Einheitskreisscheibe D^2 mit dem Möbiusband verkleben und der damit konstruierte Raum $M \cup_g D^2$ ist widerum homöomorph zur **projektiven Ebene** P^2.

5 Zusammenhang

5.1 Zusammenhang: Ein topologischer Raum $(X; \mathcal{O})$ heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegt werden kann. Er ist also genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen zugleich offen und abgeschlossenen Mengen in X sind. $(X; \mathcal{O})$ ist ebenfalls genau dann zusammenhängend, wenn es eine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum mit mindestens zwei Punkten gibt. Für einen zusammenhängende Menge X ist auch ihr Bild $f[X]$ unter einer stetigen Funktion $f : X \to Y$ zusammenhängend. Insbesondere nimmt jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einer zusammenhängenden Menge X mit $s, t \in f[X]$ auch jeden dazwischenliegenden Wert an (**Zwischenwertsatz**). Für eine zusammenhängende Menge A ist auch jede Menge B mit $A \subset B \subset \overline{A}$ zusammenhängend, denn jede offene Menge, die Berührungspunkte von A enthält, schneidet auch A selbst. Enthält eine zusammenhängende Menge sowohl innere als auch äußere Punkte einer Menge B, so enthält sie auch Randpunkte von B, weil sonst $\overset{o}{B}$ und $\overset{o}{X \setminus B}$ eine disjunkte offene Überdeckung darstellen würden. Haben zwei zusammenhängende Mengen A und B einen nichtleeren Schnitt $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch ihre Vereinigung $A \cup B$ zusammenhängend.

5.2 Satz: Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend bezüglich der natürlichen Topologie.

Beweis: Sei zunächst I offen. O_1 und O_2 seien zwei offene disjunkte Mengen in $\mathbb{R}$, welche beide I schneiden und es außerdem überdecken. Seien $u \in O_1 \cap I$ und $v \in O_2 \cap I$ mit $u < v$ und $s := \sup\{w \in I : [u; v] \subset O_1\}$. Es folgt $u < s < v$ und aufgrund des Intervallcharakters von I ist $s \in I$ und liegt damit entweder in O_1 oder in O_2. Da I offen, liegt dann auch eine 2ϵ-Umgebung $B_{2\varepsilon}(s)$ entweder in O_1 oder in O_2. Im ersten Fall ist $[u; s + \epsilon] \subset O_1$ und s ist keine obere Schranke. Im zweiten Fall ist dann $[u; s - \epsilon] \nsubseteq O_1$ und s ist keine kleinste obere Schranke. Wegen 5.1 lässt sich der Zusammenhang auf beliebige Intervalle übertragen.

5.3 Beispiele: Eine **stetige reellwertige** Funktion $f = \{(x; f(x)) : x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ auf dem **Intervall** $I \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend in $\mathbb{R}^2$, weil sie als Bild der **Bahnkurve** $k : I \to \mathbb{R}^2$ mit $k(t) = (t; f(t))$ aufgefasst werden kann, welche nach dem letzten Satz in 4.1 wieder stetig ist. Insbesondere gilt dies für $I =]0; 1]$ und $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)|I$. Wegen 5.1 ist auch der **Abschluß** $\overline{f} = f \cup \{0\} \times [-1; 1]$ zusammenhängend. Für $I = [-1; 1] \setminus \{0\}$ gilt dies nicht mehr, weil die rechte Halbebene $H_+ = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$ und die linke Halbebene $H_- = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\right\}$ eine offene disjunkte Überdeckung von f bilden. Durch Hinzunahme eines beliebigen **Berührungspunktes** $(0; a)$ mit $-1 \leq a \leq 1$ kann der Zusammenhang wieder hergestellt werden.

5.4 Zusammenhangskomponenten: Eine **einfache Kette** zwischen zwei Punkten a und b eines topologischen Raumes X ist eine **endliche Folge offener Mengen** $U_1, ..., U_n$, so dass nur die erste Menge a enthält, nur die letzte Menge b enthält und jede Menge nur die unmittelbar benachbarten Mengen schneidet. a und b heißen **zusammenhängend** , wenn es zu **jeder Überdeckung** $\mathcal{U}$ von X durch **offene** Mengen eine einfache Kette aus Elementen von $\mathcal{U}$ zwischen a und b gibt. Offensichtlich kann man sich bei den folgenden Überlegungen auf Überdeckungen aus **zusammenhängenden offenen Mengen** beschränken. Der Zusammenhang zwischen zwei Punkten auf X ist eine **Äquivalenzrelation** und die Äquivalenzklasse eines Punktes $x \in X$ heißt **Zusammenhangskomponente** $K(x)$. Die Zusammenhangskomponenten sind zusammenhängend und daher offen und abgeschlossen zugleich. Sie bilden insbesondere eine offene und disjunkte Überdeckung von X. Ein $y \notin K(x)$ kann also nicht gemeinsam mit x in einer zusammenhängenden Menge liegen. $K(x)$ besteht daher aus der **Vereinigung aller zusammenhängender Mengen**, die x enthalten. Jede offene und abgeschlossene Menge, die x enthält, muss auch $K(x)$ enthalten. $K(x)$ liegt also im Duchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen, welche x enthalten. Dass $K(x)$ nicht gleich diesem Durchschnitt ist, zeigt das folgenden Beispiel:

5.5 Beispiel: Die Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$ enthalte die Punkte $u = (0;0)$, $v = (0;1)$ sowie die Strecken $s_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0;1]$ für $n \in \mathbb{N}^\star$ und sei versehen mit der Spurtopologie in $\mathbb{R}^2$. Weil alle s_n offene und abgschlossene, zusammenhängende, disjunkte Teilmengen sind, muss $K(u) = \{u\}$ und $K(v) = \{v\}$ gelten. Jede offene und abgeschlossene Teilmenge M, die u enthält, schneidet unendlich viele s_n und enthält aufgrund des Zusammenhangs der s_n damit auch schon diese s_n. Dann aber ist v Berührungspunkt von M und aufgrund ihrer Abgeschlossenheit ist v sogar in M enthalten.

5.6 Zusammenhang von Produktmengen: $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle X_i zusammenhängend sind.

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus der Stetigkeit der Projektionen und 5.1. Für $\Leftarrow$ zeigen wir, dass die Zusammenhangskomponenten $K(a)$ eines beliebigen Punktes $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ dicht in X ist und wenden wieder 5.1 an. Sei dazu $U = \bigcap_{k \in K} p_k^{-1}(U_k)$ mit U_k offen in X_k und endlichem $K \subset \mathbb{N}$ eine beliebige Elementarmenge der Produkttopologie auf X. O.B.d.A sei $K = \{1; ...; n\}$ und

$E_1 = \{x \in X : x_1 \in X_1 \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst}\}$,

$E_2 = \{x \in X : x_1 = b_1, x_2 \in X_2 \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst}\}$,

...,

$E_n = \{x \in X : x_1 = b_1, ..., x_{n-1} = b_{n-1}, x_n \in X_n \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst}\}$

mit $b_k \in U_k$ für $k \in K$. Die E_i sind homöomorph zu den X_i und wegen 5.1 daher zusammenhängend. Außerdem ist $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$ und wieder nach 5.1 damit $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i$ ebenfalls zusammenhängend. Wegen $a \in E_1 \subset A$ folgt daraus $A \subset K(a)$ und weiter $\emptyset \neq U \cap E_n \subset U \cap A \subset U \cap K(a)$. $K(a)$ schneidet also jede Elementarmenge U und liegt daher dicht in X.

5.7 Zusammenhangskomponenten in Produktmengen: Für jedes $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ ist $K(x) = \prod_{i \in I} K(x_i)$.

Beweis: Nach 5.6 ist $\prod_{i \in I} K(x_i)$ zusammenhängend und enthält x, woraus $\prod_{i \in I} K(x_i) \subset K(x)$ folgt. Andererseits ist mit $K(x)$ auch jedes $p_i(K(x))$ zusammenhängend und enthält x_i. Daraus folgt $p_i(K(x)) \subset K(x_i)$ für alle $i \in I$ und damit $K(x) \subset \prod_{i \in I} K(x_i)$.

5.8 Wegzusammenhang: Eine stetige Abbildung $f : I \to X$ des abgeschlossenen Intervalles $I = [0;1] \subset \mathbb{R}$ in den topologischen Raum X heißt **Weg** und X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg f mit $f(0) = x$ und $f(1) = y$ gibt. Da mit I auch das stetige Bild $f[I]$ zusammenhängend ist, muss jeder wegzusammenhängende Raum auch zusammenhängend sein. Die Umkehrung gilt nicht, denn z.B. der Abschluß $\overline{f}$ aus Beispiel 5.3 ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Eine Abbildung $g : [0;1] \to \overline{f}$ mit $g(0) = (0;0)$ und $g(0) \neq g(1) \in \overline{f}$ beliebig kann in $x = 0$ nicht stetig sein, weil für jedes noch so kleine $\delta > 0$ ein $x < \delta$ existiert mit $\|g(x) - g(0)\| = \|g(x)\| > 1$. An diesem Beispiel sieht man auch, dass der **Abschluss** eines wegzusammenhängenden Raumes nicht mehr wegzusammenhängend sein muss.

5.9 Lokaler Wegzusammenhang: Ein topologischer Raum X heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine darunterliegende wegzusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von x gibt. Ist X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist X auch (global) wegzusammenhängend, denn aus der offenen Überdeckung von X durch die wegzusammenhängenden Umgebungen aller Punkte kann wegen 5.4 für zwei beliebige Punkte $x, y \in X$ eine endliche Kette wegzusammenhängender Mengen ausgewählt werden, deren Vereinigung wieder wegzusammenhängend ist und x sowie y enthält.

5.10 Beispiel: $X = \{0\} \times [0;1] \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^\star} \left\{(x; nx) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{x}{n}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend und wegzusammenhängend (vgl. 5.8!), aber nicht lokal zusammenhängend, weil jede Umgebung eines Punktes $(0;t)$ mit $0 \leq t < 1$ auf der senkrechten Strecke unendlich viele der schrägen Strecken trifft und daher nur dann zusammenhängend ist, wenn sie den Knotenpunkt $(0;0)$ dieser unendlich vielen Geradenstücke enthält.

6 Filter und Konvergenz

6.1 Filter: Ein **Filter** $\mathcal{F}$ auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen von X, welches mit zwei Mengen F_1 und F_2 auch ihren **nichtleeren Durchschnitt** $F_1 \cap F_2$ sowie mit einer Menge F_1 auch jede **darüberliegende Menge** $F_2 \supset F_2$ und damit insbesondere X enthält. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ heißt **Filterbasis** für $\mathcal{F}$, wenn jede Menge aus $\mathcal{F}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält. Ein Mengensystem ist also genau dann eine Filterbasis, wenn in jedem nichtleeren Durchschnitt zweier Mengen aus $\mathcal{B}$ eine weitere nichtleere Menge aus $\mathcal{B}$ enthalten ist.

6.2 Beispiele: Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ bildet das System aller A enthaltenden Mengen einen Filter. Ist $A = \{x\}$ eine einpunktige Menge, so enthält dieser Filter das Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$, welches selbst wieder einen Filter darstellt und daher auch **Umgebungsfilter** genannt wird. Für eine **Folge** $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ bilden die „Schwänze“ $B_k := \{x_i : i \geq n\}$ für $k \in \mathbb{N}$ eine Basis für den **von der Folge erzeugten Filter**. Die Folge **konvergiert** genau dann gegen x, wenn der von der Folge erzeugte Filter den Umgebungsfilter von x enthält. (siehe 6.7)

6.3 Ultrafilter: Gilt für zwei Filter $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, so ist $\mathcal{F}_1$ **gröber** als $\mathcal{F}_2$ und $\mathcal{F}_2$ **feiner** als $\mathcal{F}_1$. Ein Filter heißt **Ultrafilter**, wenn er in keinem anderen Filter auf X echt enthalten ist.

6.4 Satz: Jeder Filter ist in einem Ultrafilter enthalten.

Beweis: Die Menge Φ aller Filter, die feiner als der gegebene Filter $\mathcal{F}$ sind, wird durch die Inklusion $\subset$ induktiv geordnet, denn jede linear geordnete Teilmenge Φ_0 von Φ besitzt die obere Schranke $\bigcup \Phi_0 \in \Phi$. Nach dem Zorn'schen Lemma (siehe z.B. [4] 14.2.4) gibt es daher ein maximales Element $\mathcal{G}$ von Φ, welches der gesuchte Ultrafilter ist.

6.5 Satz: $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter auf X, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.

Beweis: Wegen A $A \cap X \setminus A = \emptyset$ kann es in $\mathcal{F}$ keine zwei Mengen $F_1 \subset A$ und $F_2 \subset X \setminus A$ geben. Alle Elemente aus $\mathcal{F}$ treffen entweder A oder $X \setminus A$. Sei o.B.d.A. der erste Fall angenommen, dann ist $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ eine Basis für einen Filter $\mathcal{G}$, welcher feiner als $\mathcal{F}$ ist und A enthält. Da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ und somit $A \in \mathcal{F}$. Umgekehrt sei $\mathcal{F}$ ein Filter, der jede Teilmenge oder ihr Komplement in X enthält. Für einen Filter $\mathcal{G} \supsetneq \mathcal{F}$ gibt es dann ein $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, woraus nach Annahme folgt $X \setminus A \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ und dann kann $\mathcal{G}$ kein Filter sein.

6.6 Fixierte und freie Filter: Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **frei**, wenn $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ und **fixiert**, wenn $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ein Filter $\mathcal{F}$ ist also genau dann ein **fixierter Ultrafilter**, wenn $\mathcal{F} = \{F \subset X : x \in F\}$ für ein $x \in X$.

6.7 Konvergenz: Ein Filter $\mathcal{F}$ **konvergiert** gegen $x \in X$, wenn er den Umgebungsfilter von x enthält. Man schreibt $\mathcal{F} \to x$ und nennt x auch **Limespunkt** von $\mathcal{F}$ (vgl. 6.2). $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** des Filters $\mathcal{F}$, wenn x Berührungspunkt für jedes Element $F \in \mathcal{F}$ ist. Die Menge der Berührungspunkte von $\mathcal{F}$ ist also $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$. (vgl 2.7)

6.8 Beispiele: Der von der Basis $\mathcal{B}$=$\{]a;\infty[\colon A \in \mathbb{R}\}$ erzeugte **Fréchet-Filter** ist **frei** und besitzt keine Berührungspunkte. Ein Punkt ist genau dann **Häufungspunkt einer Folge**, wenn er Berührungspunkt des von ihr erzeugten Filters ist. Für eine nichtleere Menge A besteht ihr Abschluss $\overline{A}$ aus den Berührungspunkten des von ihr erzeugten Filters $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$. Ein Punkt x ist genau dann ein Berührungspunkt des Filters $\mathcal{F}$, wenn es einen **feineren Filter** $\mathcal{G}$ gibt, der gegen x **konvergiert**. $\mathcal{G}$ lässt sich durch die Basis $\mathcal{B} = \{F \cap U : F \in \mathcal{G} \wedge U \in \mathcal{U}(x)\}$ erzeugen bzw. enthält diese Basis schon. Ein **Ultrafilter** konvergiert daher gegen seine Berührungspunkte.

6.9 Stetigkeit: Das **Bild** $f(\mathcal{F})$ eines Filters $\mathcal{F}$ unter der Abbildung $f : X \to Y$ ist der Filter auf Y, der von $\mathcal{B}\{f[F] : F \in \mathcal{F}\}$ erzeugt wird. Wegen $f[F] \cap f[G] \supset f[F \cap G]$ ist $\mathcal{B}$ nämlich eine Filterbasis. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. $f : X \to Y$ ist stetig im Punkt $x \in X$.
2. $\mathcal{U}(f(x)) \subset f(\mathcal{U}(x))$.
3. $\mathcal{F} \to x \Rightarrow f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

6.10 Konvergenz auf Initialtopologien: Ein Filter $\mathcal{F}$ auf der Menge X mit der Initialtopologie $\mathcal{O}$ bezüglich der Abbildungen $f_i : X \to (Y_i; \mathcal{O}_i)$ konvergiert genau dann gegen ein $x = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(x_i) \in X$, wenn die **Bildfilter** $f_i(\mathcal{F})$ für alle $i \in I$ gegen x_i konvergieren.

Beweis: $\Rightarrow$ folgt aus der Stetigkeit der f_i und 6.9. Zu $\Leftarrow$ gibt es nach Voraussetzung für jedes $i \in I$ und $U_i \in \mathcal{U}(x_i)$ ein $F_i \in \mathcal{F}$ mit $f_i[F_i] \subset U_i$ und für eine Elementarmenge $U = \bigcap_{i \in E} f_i^{-1}[U_i] \in \mathcal{U}(x)$ mit E endlich ist dann $F = \bigcap_{i \in E} F_i \in \mathcal{F}$ mit $F \subset U$, also $\mathcal{U}(\mathrm{x}) \subset \mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F} \to x$.

6.11 Spurfilter: Die **Spur** $\mathcal{F} \cap A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ eines Filters $\mathcal{F}$ mit einer nichtleeren Teilmenge $A \subset X$ bildet genau dann einen Filter auf A, wenn A alle Filtermengen F schneidet. $\mathcal{F} \cap A$ heißt dann **Spurfilter**. Für einen **Ultrafilter** ist $\mathcal{F} \cap A$ genau dann ein Filter auf A, wenn $A \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F} \cap A$ ist dann sogar ein Ultrafilter auf A. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. $x \in \overline{A}$.
2. Die Spur $\mathcal{U}(x) \cap A$ ist ein Filter.
3. Es gibt einen Filter auf A, dessen Bild unter der Injektion $j : A \to X$ gegen x konvergiert.

7 Trennungseigenschaften

7.1 Trennungseigenschaften: Ein topologischer Raum heißt

- $\mathbf{T_1}$**-Raum**, wenn von zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht trifft.
- $\mathbf{T_2}$- oder **Hausdorff-Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkte aus X disjunkte Umgebungen besitzen.
- $\mathbf{T_3}$**-Raum**, wenn jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jeder Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte Umgebungen besitzen und **regulär**, wenn zusätzlich $\mathbf{T_1}$ gilt.
- $\mathbf{T_{3a}}$**- Raum**, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0; 1]$ mit $f[A] = \{0\}$ sowie $f(x) = \{1\}$ gibt und **vollständig regulär**, wenn zusätzlich $\mathbf{T_1}$ gilt.
- $\mathbf{T_4}$**- Raum**, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen auch disjunkte Umgebungen gibt und **normal**, wenn zusätzlich $\mathbf{T_1}$ gilt.

7.2 Trennungseigenschaften metrischer Räume: Metrische Räume erfüllen alle Trennungseigenschaften. Darüberhinaus lassen sich zwei abgeschlossene disjunkte Mengen A und B durch eine stetige Funktion $f : X \to [0; 1]$ mit $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$ trennen.

Beweis. Für den Nachweis von T_4 seien A und B abgeschlossen und disjunkt. Dann gibt es für jedes $x \in A$ ein $\epsilon(x) > 0$, so dass $B_{2\varepsilon(x)}(x) \cap B = \emptyset$ und für jedes $x \in B$ ein $\epsilon(x) > 0$, so dass $B_{2\varepsilon(x)}(x) \cap A = \emptyset$ und die offenen Mengen $\bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$ sowie $\bigcup_{x \in B} B_\varepsilon(x)$ trennen A und B. Für jedes (nicht notwendigerweise abgeschlossene!) $A \subset X$ ist $d_A : X \to \mathbb{R}^+$ mit $d_A(x) := \inf\{d(x; y) : y \in A\}$ stetig, denn für ein $x_0 \in d_A^{-1}\,]a; b[$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit a + 2ε $< a + 2\epsilon < d_A(x_0) < b - 2\epsilon$ und damit $B_\varepsilon(x_0) \subset d_A^{-1}\,]a; b[$, d.h. $d_A^{-1}\,]a; b[$ ist offen in X. Wegen 3.3 ist dann auch $f(x) := \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ stetig mit $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$. Wegen $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ müssen A und B nicht unbedingt abgeschlossen sein, dürfen aber keinen gemeinsamen Berührungspunkt enthalten. Die anderen Trennungseigenschaften folgen aus der Abgeschlossenheit von Punkten in metrischen Räumen.

7.3 Trennungseigenschaften in Unterräumen: Alle Trennungseigenschaften außer T_4 übertragen sich auf beliebge Unterräume. T_4 überträgt sich nur auf abgeschlossenen Unterräume.

Beweis. Für den Nachweis von T_3 sei A abgeschlossen im Unterraum X des T_3-Raumes Y und $x \in X \setminus A$. Dann gibt es eine Umgebung U von x im übergeordneten Raum Y, welche A nicht schneidet, d.h., x ist auch im übergeordneten Raum Y kein Berührungspunkt von A und lässt sich von dem Abschluss $\overline{A}$ in Y durch offenen Mengen trennen. Die Schnitte dieser offenen Mengen mit

X trennen A und x in X. Für den Nachweis von T_{3a} argumentiert man wie oben mit der stetigen Funktion $f : Y \to [0;1]$ mit $f\left[\overline{A}\right] = \{0\}$ sowie $f(x) = \{1\}$, deren Restriktion $f|_X$ auf X stetig ist und $f|_X\,[A] \subset \{0\}$ sowie $f|_X(x) = 1$ erfüllt. Die Nachweise von T_1 und T_2 sind trivial. Für den Nachweis von T_4 verwendet man die Tatsache, dass abgeschlossenen Teilmengen A und B eines abgeschlossenen Unterraumes $X \subset Y$ auch abgeschlossen im übergeordneten Raum Y sind.

7.4 $\mathbf{T_1}$-Räume: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein $\mathbf{T_1}$-Raum
2. Jede einpunktige Menge ist abgeschlossen
3. Jede Teilmenge ist der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

7.5 $\mathbf{T_2}$-Räume: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein $\mathbf{T_2}$-Raum.
2. Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.
3. Jeder Punkt auf X ist gleich dem Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen.
4. Die Diagonale Δ ist abgeschlossen in X^2.

Beweis:

1. ⇒ 2. : Zwei verschiedene Limespunkte ließen sich mit disjunkten Umgebungen trennen, die beide zu $\mathcal{F}$ gehören müssten.

2. ⇒ 3. Enthielte der Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen einen weiteren Punkt, so hätte der Umgebungsfilter von x einen weiteren Berührungspunkt y und nach 6.8 gäbe es einen feineren Filter, der zusätzlich gegen y konvergierte.

3. ⇒ 4. : Angenommen, Δ wäre nicht abgeschlossen, dann gäbe es zwei Punkte $x \neq y$, so dass $(x;y) \notin \Delta$ Berührungspunkt von Δ ist. Jede Umgebung $U \times V$ mit $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ schneidet also Δ. Jede Umgebung von x schneidet also jede Umgebung von y, d.h., y ist Berührungspunkt aller Umgebungen von x und liegt damit im Durchschnitt aller abgeschlossenen Umgebungen.

4. ⇒ 1. Gäbe es zwei Punkte $x \neq y$, die sich nicht durch Umgebungen trennen ließen, so wäre $(x;y) \notin \Delta$ Berührungspunkt der Diagonalen Δ.

7.6 Beispiel: Jeder T_2-Raum ist offensichtlich auch ein T_1-Raum. Die Umkehrung gilt aber nicht: Eine unendliche Menge X trage die **cofinite Topologie** aller Komplemente endlicher Mengen. Für zwei Punkte $x, y \in X$ ist $X \setminus \{x;y\}$ eine Umgebung von sowohl x als auch y, welche den jeweils anderen Punkt nicht trifft. Da im Komplement einer offenen Menge keine weitere offene Menge liegen kann, gibt es aber keine zwei disjunkten offenen Mengen um x und y. Die cofinite Topologie erfüllt also T_1, aber nicht T_2.

7.7 $\mathbf{T_3}$-Räume: Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_3-Raum, wenn für jeden Punkt $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen eine Umgebungsbasis bilden. Wie man am Beispiel der **indiskreten Topologie** auf einer mehr als einpunktigen Menge sieht, muss ein T_3-Raum weder ein T_1-Raum noch ein T_2-Raum sein. **Reguläre** Räume sind wegen 7.4.2 **hausdorffsch**.

7.8 $\mathbf{T_{3a}}$-Räume: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein $\mathbf{T_{3a}}$-Raum.
2. Die Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen $f : X \to [0;1]$ bilden eine Basis der Topologie von X.
3. Jede abgeschlossene Menge lässt sich als Durchschnitt von Nullstellenmengen stetiger Funktionen $f : X \to [0;1]$ darstellen.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2. : O offen in $X \Rightarrow O = \bigcup_{x\in O} \{f_x^{-1}\, []0;1]] : f_x : X \to [0;1]$ stetig mit $f_x\,[X \setminus A] \subset \{0\} \wedge f\,(x) = 1\}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sei A abgeschlossen in X, dann gibt es nach Voraussetzung für alle $x \in X \setminus A$ eine offene Menge $U_x \subset [0;1]$ und ein stetiges $f_x : X \to [0;1]$ mit $x \in f_x^{-1}\,[U_x] \subset X \setminus A$. Da $\mathbb{R}$ vollständig regulär ist, gibt es weiterhin ein stetiges $g_x : \mathbb{R} \to [0;1]$ mit $g_x\,[\mathbb{R} \setminus U_x] \subset \{0\}$ und $g_x(x) = 1$. Damit erhält man $A \subset X \setminus f_x^{-1}\,[U_x] = f_x^{-1}\,[\mathbb{R} \setminus U_x] \subset f_x^{-1}\,(g_x^{-1}\,[\{0\}]) = (g_x \circ f_x)^{-1}\,[\{0\}]$. Also ist $A = \bigcap_{x\in X\setminus A} (g_x \circ f_x)^{-1}\,[\{0\}]$.

3. $\Rightarrow$ 1. : Sei A abgeschlossen in X und $x_0 \in X \setminus A$. Nach Voraussetzung muss es eine stetige reellwertige Funktion g geben mit $g\,[A] = \{0\}$ und $g\,(x_0) \neq 0$. $f(x) := \frac{g(x)}{g(x_0)}$ ist dann die gesuchte Funktion.

7.9 Satz: Ein vollständig regulärer Raum kann in ein Produkt $[0;1]^I$ mit geeigneter Indexmenge I eingebettet werden.

Beweis: Sei I die Menge der stetigen Funktionen $i : X \to [0;1]$ und $e : X \to [0;1]^I$ definiert durch $e(x) = (i\,(x))_{i\in I}$. Dann ist e injektiv, denn wegen T_1 sind Punkte abgeschlossen in X und wegen T_{3a} gibt es daher für je zwei verschiedene Punkte $x \neq y$ in X ein $i \in I$ mit $0 = i(x) \neq i(y) = 1$. Aus der Stetigkeit der Komponenten $p_i \circ e = i$ folgt mit 4.2 auch die Stetigkeit von e. Nach 7.8.2 bilden die Mengen $i^{-1}\,[U]$ mit $i \in I$ und U offen in $[0;1]$ eine Basis der Topologie auf X. Wegen $e\,[i^{-1}\,[U]] = \left(p_i^{-1} \circ i\right)\,[i^{-1}\,[U]] = p_i^{-1}\,[U]$ offen in $[0;1]^I$ und 3.4 ist e offen.

7.10 Trennungseigenschaften in Produkträumen: Alle Trennungseigenschaften außer T_4 übertragen sich auf Produkträume.

Beweis: T_1 und T_2 ergeben sich aus der Tatsache, dass $\bigcap_{i\in K} p_i^{-1}\,[U_i]$ mit $U_i \in \mathcal{U}(x_i)$ schon für endliche K eine Umgebungsbasis für $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ bilden. Für den Nachweis von T_3 verwendet man zweimal 7.7: Nach Voraussetzung gibt es für jede Basisumgebung $\bigcap_{i\in K} p_i^{-1}\,[U_i]$ mit $U_i \in \mathcal{U}(x_i)$ abgeschlossene A_i und offene $V_i \in \mathcal{U}(x_i)$ mit $V_i \subset A_i \subset U_i$. Dann ist $\bigcap_{i\in K} p_i^{-1}\,[A_i] \subset \bigcap_{i\in K} p_i^{-1}\,[U_i]$ abgeschlossen und enthält $\bigcap_{i\in K} p_i^{-1}\,[V_i] \in \mathcal{U}(x)$ und ist daher abgeschlossene Umgebung von x. Für den Nachweis von T_{3a} sei $\bigcap_{i\in K} p_i^{-1}\,[U_i]$ eine Umgebung von x, die A nicht schneidet. Aus den stetigen $f_i : X_i \to [0;1]$ mit $f_i\,[X_i \setminus U_i] \subset \{0\}$ und $f_i(x_i) = 1$ erhält man z.B. mit $f(y) := \min\{(f_i \circ p_i)\,(y) : i \in K\}$ ein stetiges $f : \prod_{i\in I} X_i \to [0;1]$ mit $f\,[A] \subset \{0\}$ und $f(x) = 1$. Die Komposition von f muss nur die Stetigkeit der Komponenten nach 3.3 sowie die Funktionswerte 0 und 1 erhalten. Möglich wären also z.B. auch das Maximum oder der Mittelwert der f_i.

7.11 Trennungseigenschaften in Quotientenräumen: Sei R eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X \setminus R$ die kanonische Projektion.

1. $X \setminus R$ ist genau dann ein T_1-Raum, wenn jede Äquivalenzklasse in X abgeschlossen ist.
2. $X \setminus R$ ist genau dann ein T_2-Raum, wenn π offen und R abgeschlossen in X^2 ist.
3. $X \setminus R$ ist ein T_2-Raum, wenn X regulär und π offen und abgeschlossen ist.
4. $X \setminus R$ ist ein T_4-Raum bzw. normal, wenn π abgeschlossen und X ein T_4-Raum bzw. normal ist.

Beweis:

1. klar mit 7.4.2
2. $X \setminus R$ ist T_2-Raum $\Leftrightarrow \forall \pi(x) \neq \pi(y) \in X \setminus R\, \exists \overline{U} \in \mathcal{U}\,(\pi\,(x))\,, \overline{V} \in \mathcal{U}\,(\pi\,(y)) : \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset \Leftrightarrow \exists\, U \times V \in \mathcal{U}\,((x;y)) : U \times V \cap R = \emptyset$. $\Rightarrow$ gilt immer aufgrund der Stetigkeit von π mit $U := \pi^{-1}\left[\overline{U}\right]$ und $V := \pi^{-1}\left[\overline{V}\right]$. $\Leftarrow$ gilt nur für offenes π mit $\overline{U} := \pi\,[U]$ und $\overline{V} := \pi\,[V]$.
3. Für $(x;y) \in X^2 \setminus R$ gilt $x \notin \pi^{-1}\,(\pi\,(y))$. Wegen T_1 ist x abgeschlossen in X und da π stetig und abgeschlossen, ist mit x auch $\pi(y)$ und ebenso $\pi^{-1}\,(\pi\,(y))$ abgeschlossen. Aufgrund von T_3 gibt es dann offene und disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $\pi^{-1}\,(\pi\,(y)) \subset V$. Wegen 3.6 gibt es eine offene Umgebung W von $\pi(y)$ mit $\pi^{-1}\,(\pi\,(y)) \subset \pi^{-1}\,[W] \subset V$. Dann ist $U \times \pi^{-1}\,[W]$ eine

Umgebung von $(x;y)$, die R nicht schneidet. R ist also abgeschlossen in X^2 und aus 2. folgt die Behauptung.

4. Für zwei abgeschlossene und disjunkte Mengen A und B in $X \setminus R$ sind wegen der Stetigkeit von π auch $\pi^{-1}[A]$ und $\pi^{-1}[B]$ abgeschlossen und disjunkt in X. Nach Voraussetzung gibt es offene und disjunkte Mengen U_A und U_B in X mit $\pi^{-1}[A] \subset U_A$ und $\pi^{-1}[B] \subset U_B$. Wieder wegen 3.6 gibt es offene Umgebungen V_A von A mit $\pi^{-1}[V_A] \subset U_A$ und V_B von B mit $\pi^{-1}[V_B] \subset U_B$. Insbesondere sind V_A und V_B wieder disjunkt, woraus die Behauptung folgt. Erfüllt X zusätzlich T_1, so ist jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossenen und wegen der Abgeschlossenheit von π auch jede Äquivalenzklasse $\pi(x) \in X \setminus R$, woraus die Behauptung folgt.

7.12 Stetige Funktionen in Hausdorff-Räume: Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und Y hausdorffsch. Dann ist der **Graph** $\{(x;y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ als Urbild der wegen 7.5 4 abgeschlossenen Diagonale $\Delta \subset Y^2$ unter der nach 4.2 stetigen Abbildung $(f;id) : X \times Y \to Y^2$ abgeschlossen in $X \times Y$. Ist f zusätzlich **injektiv**, so ist X homöomorph zu dem nach 7.3 hausdorffschen Unterraum $f[X] \subset Y$ und damit selbst hausdorffsch. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist wenigstens der **Quotientenraum** $X \setminus R$ mit $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ aus dem gleichen Grunde hausdorffsch.

7.13 Fortsetzung stetiger Funktionen in Hausdorff-Räume: Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und Y hausdorffsch. Für eine weitere stetige Funktion $g : X \to Y$ folgt dann aus einem analogen Argument wie in 7.12 die Abgeschlossenheit der Menge $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Insbesondere sind f und g identisch, wenn sie nur auf einer **dichten Teilmenge** von X übereinstimmen.

7.14 Fortsetzung stetiger Funktionen in reguläre Räume: Sei $f : D \to Y$ eine stetige Abbildung aus einer in X dichten Teilmenge $D \subset X$ in den regulären Raum Y. f lässt sich genau dann zu einer stetigen Abbildung $\overline{f} : X \to Y$ fortsetzen, wenn für jedes $x \in X$ das Bild $f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ des Umgebungsfilters auf Y konvergiert.

Beweis: $\overline{f}(x)$ sei der nach Voraussetzung existierende und wegen 7.5.2 sowie 7.7 eindeutig bestimmte Limespunkt von $f(\mathcal{U}(x) \cap D)$. $\overline{f}$ stimmt auf D mit f überein, denn für ein $x \in D$ konvergiert der Bildfilter $\overline{f}(\mathcal{U}(x) \cap D) = f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ von f wegen 6.9 gegen $f(x)$. $\overline{f}$ ist auch stetig, denn für $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}\left(\overline{f}(x)\right) \subset f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ gibt es nach Voraussetzung ein offenes $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $f[V \cap D] \subset U$. Wegen 7.7 kann man U als abgeschlossen annehmen, womit sogar $\overline{f[V \cap D]} \subset U$ folgt. Für jedes $y \in V$ ist $V \in \mathcal{U}(y)$ und daher $f[V \cap D] \in f(\mathcal{U}(y) \cap D)$. Weil $\overline{f}(y)$ Limespunkt von $f(\mathcal{U}(y) \cap D)$ ist, folgt $\overline{f}(y) \in \overline{f[V \cap D]}$ und damit $\overline{f}(y) \in U$. Es gibt also für jedes $U \in \mathcal{U}\left(\overline{f}(x)\right)$ ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $\overline{f}[V] \subset U$, womit die Stetigkeit von $\overline{f}$ bewiesen ist.

8 Normale Räume

8.1 Lemma von Urysohn: Ein Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn es für je zwei disjunkte und abgeschlossene Mengen A und B eine stetige Funktion $f : X \to [0;1]$ gibt mit $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$.

Beweis: In einem T_4-Raum gibt zwischen einer offenen Menge G_j und einer darunterliegenden abgeschlossenen Menge $\overline{G_i} \subset G_j$ immer noch eine dazwischenliegende offene Menge $G_{(i+j)/2}$, die mit ihrem Abschluss zwischen $\overline{G_i}$ und G_j liegt: $\overline{G_i} \subset G_{(i+j)/2} \subset \overline{G}_{(i+j)/2} \subset G_j$. Man startet mit $A \subset X \setminus B$ und wendet die Schachtelung zweimal an, um offene Mengen G_0 und G_1 zu erhalten mit A $A \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_1 \subset \overline{G}_1 \subset X \setminus B$. Nun schachtelt man zwischen je zwei benachbarten Mengen $\overline{G_i} \subset G_j$ fortlaufend weiter und erhält damit für jedes $i \in \left\{\sum_{1 \leq m \leq n} \frac{i(m)}{2^m} : i(m) \in \{0;1\} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ eine offene Menge G_i mit $\overline{G}_j \subset G_i \Leftrightarrow j < i$. Sei nun $f : X \to [0;1]$ definiert durch $f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} : x \in G_t\}$, falls $x \notin G_1$ und $f(x) = 1$ für $x \in G_1$. Dann gilt $f[A] = \{0\}$, $f[B] = \{1\}$ und $f(x) \leq i \Leftrightarrow x \in G_i$. f ist stetig in $x \in X$, denn für jedes $\epsilon > 0$ ist $f\left[G_{f(x)+\delta} \setminus \overline{G}_{f(x)-\delta}\right] \subset B_\varepsilon(f(x))$ und $G_{f(x)+\delta} \setminus \overline{G}_{f(x)-\delta} \in \mathcal{U}(x)$ für $0 < \delta < \epsilon$. Liegt umgekehrt ein solches f schon vor, so erhält man die offenen disjunkten Mengen sofort in der Gestalt $A \subset f^{-1}[B_\varepsilon(0)]$ bzw. $B \subset f^{-1}[B_\varepsilon(1)]$ mit $\epsilon < \frac{1}{2}$.

8.2 Korollar: Ein normaler Raum ist vollständig regulär.

8.3 $\mathbf{G}_\delta$- und $\mathbf{F}_\sigma$-Mengen: Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt **$\mathbf{G}_\delta$-Menge**, wenn sie als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen G_n dargestellt werden kann: $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Sie heißt **$\mathbf{F}_\sigma$-Menge**, wenn sie als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen F_n dargestellt werden kann: $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. (Merke: G - Gebiet - offen, F - fermé - abgeschlossen, σ - Summe - Vereinigung und δ - Durchschnitt)

8.4 Satz: Eine nichtleere und abgeschlossene Teilmenge A eines T_4-Raumes X läßt sich genau dann als Nullstellenmenge $A = f^{-1}[\{0\}]$ einer stetigen reellwertigen Funktion f darstellen, wenn sie eine G_δ-Menge ist.

Beweis: Aus dem gegebenen f erhält man die offenen Mengen für die Darstellung $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ mittels $G_n = f^{-1}\left[B_{1/n}(0)\right]$. Umgekehrt erhält man aus den gegebenen offenen Mengen G_n und den gemäß 8.1 stetigen Trennfunktionen $f_n : X \to [0;1]$ mit $f_n[A] = \{0\}$ und $f_n[X \setminus G_n] = \{1\}$ die gewünschte Funktion durch $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f_n(x)}{2^n}$. Aufgrund 1.7 und der Stetigkeit der Partialsummen ist f stetig.

8.5 Satz von Tietze: Ein topologischer Raum ist genau dann ein T_4-Raum, wenn sich jede auf einer abgeschlossenen Teilmenge von X definierte stetige, reellwertige Funktion auf ganz X stetig fortsetzen läßt.

Beweis:

$\Leftarrow$: Sei A abgeschlossen in X und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Da $\mathbb{R}$ homöomorph zu $]-1;1[$ ist (siehe 3.4), sei o.b.d.A. $f : A \to]-1;1[$. Nach 8.1 gibt es ein stetiges $f_0 : X \to \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ mit $f_0\left[\left\{x \in X : f(x) \le -\frac{1}{3}\right\}\right] = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ und $f_0\left[\left\{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{3}\right\}\right] = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. Für diese 0. Näherung gilt $|f(x) - f_0(x)| \le \frac{2}{3}$. Nun wird rekursiv nachgebessert, indem wieder nach 8.1 für jedes natürliche $n \ge 1$ ein stetiges $f_n : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n; \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ bestimmt wird mit $f_n\left[\left\{x \in X : f(x) - \sum_{0\le i\le n-1} f_i(x) \le -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right] = \left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ und $f_n\left[\left\{x \in X : f(x) - \sum_{0\le i\le n-1} f_i(x) \ge \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right] = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$. Nach 1.7 ist $\overline{f}(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ stetig mit $\left|\overline{f}(x)\right| \ge \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$ und stimmt auf A mit f überein. Zum Schluß werden die zu großen Funktionswerte ± 1 durch eine dritte Anwendung von 8.1 beseitigt: $g : X \to [0;1]$ sei stetig mit $g\left[\left\{x \in X : \left|\overline{f}(x)\right| = 1\right\}\right] \subset \{0\}$ und $g[A] = 1$. Dann ist $g \circ \overline{f} : X \to]-1;1[$ die gewünschte stetige Fortsetzung von f.

$\Rightarrow$: Seien A und B abgeschlossene disjunkte Teilmengen in X. Dann ist $f : A \cup B \to]1;1[$ mit $f[A] = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ und $f[B] = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ auf der abgeschlossenen Menge $A \cup B$ stetig (die beiden Zusammenhangskomponenten A und B sind sowohl offen als auch abgeschlossen in $A \cup B$!) und läßt sich zu einem stetigen $\overline{f} : X \to]-1;1[$ fortsetzen. $\overline{f}^{-1}[]-1;0[]$ und $\overline{f}^{-1}[]0;1[]$ sind dann offene disjunkte Mengen, welche A und B trennen.

8.6 Eigenschaften von Mengensystemen: Ein System $(U_i)_{i\in I}$ von Teilmengen eines topologischen Raumes X heißt **offen** bzw. **abgeschlossen**, wenn diese Eigenschaft für alle U_i gilt und **endlich** bzw. **abzählbar**, wenn dies für die Indexmenge I gilt. Es heißt **lokal-endlich** bzw. **punkt-endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die nur von endlich vielen U_i getroffen wird bzw. selbst nur von endliche vielen U_i getroffen wird.

8.7 Satz: Für eine **abgeschlossene** Teilmenge A eines **normalen** Raumes X und eine **punkt-endliche offene Überdeckung** $(U_i)_{i\in I}$ von A gibt es eine weitere **offene** Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von A mit $\overline{O}_i \subset U_i$ für alle $i \in I$.

Beweis: Sei M die Familie aller offenen Überdeckungen von A der Gestalt $(O_k)_{k\in K} \cup (U_l)_{l\in L}$ mit $K \cup L = I$, $K \cap L = \emptyset$ und $\overline{O}_k \subset U_k$ für $k \in K$. Für zwei Überdeckungen $\mathcal{C} = (O_k)_{k\in K} \cup (U_l)_{l\in L}$ und $\mathcal{C}' = (O'_k)_{k\in K'} \cup (U_l)_{l\in L'}$ aus M sei $\mathcal{C} \le \mathcal{C}'$, wenn $K \subset K'$ und $O_k = O'_k$ für alle $k \in K$. Um die Existenz der gewünschten Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ zu beweisen, zeigen wir, dass M durch die Relation $\le$ **induktiv geordnet** wird und wenden das **Lemma von Zorn** an. Sei dazu $(\mathcal{C}^s)_{s\in S} = (O^s_k)_{k\in K^s} \cup (U_l)_{l\in L^s}$ eine linear geordnete Teilfamilie von M. Für $K := \bigcup_{s\in S} K^s$ und $L := \bigcap_{s\in S} L^s$

sei $\mathcal{C} := (O_k^s)_{k\in K} \cup (U_l)_{l\in L}$. Wegen $K \cup L = I$ und $K \cap L = \emptyset$ ist $\mathcal{C}$ wohldefiniert. Zum Nachweise der Überdeckungseigenschaft sei $x \in A$ und $P(x) := \{i \in I : x \in U_i\}$. Falls P(x) $P(x) \cap L = \emptyset$, gibt es aufgrund der Überdeckungseigenschaft von $(U_i)_{i\in I}$ ein i mit $x \in U_i \in \mathcal{C}$. Falls $P(x) \subset K$ gibt es aufgrund der **Endlichkeit** von $P(x)$ ein s mit $P(x) \subset K^s$ und wegen der **linearen Ordnung** von $(\mathcal{C}^s)_{s\in S}$ und der Überdeckungseigenschaft der $\mathcal{C}^s$ ein $i \in K$ mit $x \in O_i \in \mathcal{C}$. Also ist wieder $\mathcal{C}$ eine Überdeckung von A und damit offensichtlich die gesuchte **obere Schranke** von $(\mathcal{C}^s)_{s\in S}$. Nach dem Lemma von Zorn existiert also ein **maximales Element** $\mathcal{C}^* = (O_k)_{k\in K^*} \cup (U_l)_{l\in L^*}$. Für $i \in L^*$ ist $B := A \setminus \left(\bigcup_{k\in K^*} O_k \cup \bigcup_{l\in L^*\setminus\{i\}} U_l\right)$ abgeschlossen und liegt in der offenen Menge U_i . Da X normal ist, existiert dann aber ein offenen O_i mit $B \subset O_i \subset \overline{O}_i \subset U_i$ und durch Ersetzen von U_i durch O_i erhält man dann aber ein $\mathcal{C}^{**} = (O_k)_{k\in K^*\cup\{i\}} \cup (U_l)_{l\in L^*\setminus\{i\}} \in M$ mit $\mathcal{C}^* < \mathcal{C}^{**}$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von $\mathcal{C}^*$. Daher muss $L^* = \emptyset$ sein und der Satz ist bewiesen.

8.8 Partitionen der Eins: Der **Träger** einer stetigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist der **Abschluß** $\overline{A}$ der Menge $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Ein System $(f_i)_{i\in I}$ **stetiger Funktionen** $f_i : X \to \mathbb{R}^*$ heißt eine der **offenen Überdeckung** $(U_i)_{i\in I}$ untergeordnete **Partition der Eins**, wenn die Träger der f_i für alle $i \in I$ in den U_i liegen und ein lokal-endliches System bilden sowie $\sum_{i\in I} f_i(x) = 1$ für alle $x \in X$. Da die Träger lokal-endlich sind, ist $\sum_{i\in I} f_i(x)$ wohldefiniert und stetig auch ohne die letzte Bedingung.

8.9 Satz: In einem normalen Raum X gibt es für jede lokal-endliche offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins.

Beweis: Nach 8.7 existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{O} = (O_i)_{i\in I}$ mit $\overline{O}_i \subset U_i$ für alle $i \in I$. Wegen der Normalität von X gibt es offene Mengen C_i mit $\overline{O}_i \subset C_i \subset \overline{C}_i \subset U_i$ und nach 8.1 stetige Funktionen $g_i : X \to [0; 1]$ mit $g_i [X \setminus C_i] = \{0\}$ und $g_i \left[\overline{O}_i\right] = \{1\}$. Die Träger der g_i liegen in $\overline{C}_i$ und damit in U_i. Da $\mathcal{U}$ lokal-endlich ist, ist die Funktion $g(x) := \sum_{i\in I} g_i(x)$ wohldefiniert und stetig. Da $\mathcal{O}$ eine Überdeckung von X ist, gilt $g(x) \geq 1$. Die Funktionen $f_i(x) := \frac{g_i(x)}{g(x)}$ sind wieder stetig und eine der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordente Partition der Eins.

8.10 Abstände zwischen Mengen in metrischen Räumen: In einem metrischen Raum $(X; d)$ definiert man den Abstand $d(x; A) := \inf \{d(x; y) : y \in A\}$ zwischen dem Punkt $x \in X$ und der Teilmenge $A \subset X$ und entsprechend $d(A; B) := \inf \{d(x; B) : x \in A\}$. Die Dreiecksungleichung lässt sich übertragen in der Form $d(x; A) \leq d(x; y) + d(y; A)$, denn für **alle** $z \in A$ gilt $d(x; A) \leq d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$ und daher auch $d(x; A) \leq \inf \{d(x; y) + d(y; z) : z \in A\} = d(x; y) + d(y; A)$.

8.11 Satz: In einem metrischen Raum $(X; d)$ gibt es für jede offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Partition der Eins.

Beweis: Wegen 7.2 und 8.9 muss nur eine lokal-endliche offene Verfeinerungsüberdeckung konstruiert werden. Nach dem Wohlordungssatz (vgl. z.B. [4, Satz 14.2]) kann der Indexmenge I als wohlgeordnet angenommen werden.

Zunächst füllen wir die U_i mit wachsenden Schalen $A_{n,i} := \left\{x \in U_i : 2^{-n} \leq d(x; X \setminus U_i) \leq 2^{-n+1}\right\}$. Da die U_i offen sind, gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i} = U_i$. Wegen $2^{-n} \leq d(x; X \setminus U_i)$ für alle $x \in A_{n,i}$ und $d(y; X \setminus U_i) \leq 2^{-n-k+1}$ für alle $y \in A_{n+k,i}$ folgt mit 8.9 die Abschätzung $d(A_{n,i}; A_{n+k,i}) \geq d(x; y) \geq d(x; X \setminus U_i) - d(y; X \setminus U_i) \geq 2^{-n}\left(1 - 2^{1-k}\right) \geq 2^{-n-1}$. Da die U_i nicht disjunkt sind, entfernen wir die Überstände zu den vorangehenden U_j durch Übergang zu $B_{n,i} := A_{n,i} \setminus \bigcup_{j<i} U_j$, um die lokal-endliche Eigenschaft zu erreichen. Da die $B_{n,j}$ bisher nicht offen sind, fügen wir durch Übergang zu $C_{n,i} := \left\{x \in U_i : d(x; B_{n,i}) < 2^{-n-3}\right\}$ Umgebungen wieder hinzu, die so schmal sind, dass sich nur benachbarte $C_{n,i}$schneiden, also $C_{n,i} \cap C_{m,i} = \emptyset$, falls $|n-m| > 1$, denn $d(C_{n,i}; C_{n+k,i}) \geq d(B_{n,i}; B_{n+k,i}) - 2\cdot 2^{-n-3} \geq d(A_{n,i}; A_{n+k,i}) - 2^{-n-2} \geq 2^{-n-1} - 2^{-n-2} = 2^{-n-2}$.

Die $B_{n,i}$ und insbesondere die $C_{n,i}$ sind Überdeckungen, denn für ein $x \in X$ sei $i \in I$ der kleinste Index mit $x \in U_i$. Wegen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,i} = U_i$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{n,i}$, aber nach Wahl von i gilt $x \notin U_j$ für alle $j < i$ und damit $x \in B_{n,i} \subset C_{n,i}$.

Die $C_{n,i}$ sind lokal-endlich, denn für das eben betrachtete $x \in B_{n,i} \subset C_{n,i}$ gilt nach Konstruktion der $B_{n,i}$ zunächst $x \notin U_{,j}$ für alle $j < i$ und nach Wahl des $i \in I$ und wegen $x \in U_i$ aber auch für alle $j > i$. Insbesondere gilt $x \notin C_{m,j}$ für $j \neq i$ und $m \in \mathbb{N}$. Wegen $d(C_{m,i}; C_{m+2,i}) \geq 2^{-m-2}$ für $m \in \mathbb{N}$

schneidet die Umgebung $B_{2^{-n-3}}(x)$ dann außer $C_{n,i}$ selbst höchstens noch die beiden Nachbarn $C_{n-1,i}$ und $C_{n+1,i}$. Die $C_{n,i}$ sind also die gesuchte lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung von $\mathcal{U}$.

9 Kompakte Räume

9.1 Kompakte Räume: Ein topologischer Raum X heißt **quasikompakt**, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine endliche Überdeckung enthält. X heißt kompakt, wenn er quasikompakt und hausdorffsch ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt (quasi)kompakt, wenn diese Eigenschaft für den **Unterraum** A gilt. $A \subset X$ heißt **relativ kompakt**, wenn der Abschluß $\overline{A}$ kompakt ist.

9.2 Eigenschaften kompakter Räume: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist quasikompakt
2. Jede Familie abgeschlossener Mengen mit leerem Durchschnitt besitzt eine endliche Teilfamilie mit leerem Durchschnitt.
3. Jeder Filter auf X besitzt einen Berührungspunkt.
4. Jeder Ultrafilter auf X konvergiert.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.: durch Übergang zum Komplement.

2. $\Rightarrow$ 3.: mit 6.7.

3. $\Rightarrow$ 4.: mit 6.8.

4. $\Rightarrow$ 1.: Wenn eine offene Überdeckung von X keine endliche Teilüberdeckung besitzt, dann sind alle endlichen Durchschnitte von Komplementen dieser offenen Mengen nichtleer und bilden die Basis eine Ultrafilters, der nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$ konvergiert. Der Ultrafilter enthält dann aber alle Umgebungen von x und damit auch ein Element der offenen Überdeckung gleichzeitig mit dem Komplement dieser offenen Menge. Widerspruch!

9.3 Folgen auf quasikompakten Räumen. Nach 9.2.3 besitzt jede Folge auf einem quasikompakten Raum einen Häufungspunkt. Die Umkehrung ist nicht immer erfüllt: Sei $X = \{0;1\}^{\mathbb{R}}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \{0;1\}$ mit der Produkttopologie und A der Unterraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \{0;1\}$ mit abzählbar vielen Nullstellen. Für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit den abzählbaren Nullstellenmengen I_n ist die Funktion $f \in A$ mit $f(x) = 0$ für $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (eine abzählbare Vereiniung abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar, vgl. z.B.[4] Satz 17.6) und $f(x) = 1$ sonst ein Limespunkt, weil die Mengen $\{0\}^I \times \{1\}^J \times \{0;1\}^{\mathbb{R}\setminus(I\cup J)}$ mit endlichen $I \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $J \subset \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ eine Umgebungsbasis für f in A bilden und jeweils alle (!) f_n enthalten. Jede Folge in A konvergiert also gegen einen Limespunkt, der ebenfalls in A liegt. A ist aber nicht kompakt, denn z.B. die offenen Mengen $\{0\}_x \times \{0;1\}^{\mathbb{R}\setminus\{x\}}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\{1\}_0 \times \{0;1\}^{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ überdecken X und insbesondere A, aber keine endliche Auswahl dieser Mengen überdeckt A.

9.4 Kompaktheit von Teilmengen. Jede **abgeschlossene** Teilmenge eines **quasikompakten Raumes** ist offensichtlich wieder **quasikompakt**. Jede **kompakte** Teilmenge eines **Hausdorff-Raumes** ist **abgeschlossen**. Allgemeiner läßt sich in Hausdorff-Räumen jede kompakte Teilmenge K von jedem Punkt $x \in X \setminus K$ durch disjunkte, offene Umgebungen trennen: Jeder Punkt $y \in K$ besitzt ja eine Umgebung $U(y)$, die eine offene Umgebung $U_y(x)$ von x nicht schneidet. Die $U(y)$ überdecken K und die Vereinigung der endlichen Teilüberdeckung ist eine offene Umgebung von K, welche den Schnitt der endlich vielen entsprechenden $U_y(x)$ nicht trifft. Insbesondere folgt aus diesen Erkenntnissen, dass kompakte Räume **regulär** sind. Es gilt sogar noch mehr:

9.5 Satz: Kompakte Räume sind **normal**.

Beweis: Zwei abgeschlossene, disjunkte Mengen A und B sind wegen 9.4 kompakt und jeder Punkt $y \in B$ besitzt wegen der Regularität von X eine Umgebung $U(y)$, die eine offene Umgebung $U_y(A)$

von A nicht schneidet. Die $U(y)$ überdecken B und die Vereinigung der endlichen Teilüberdeckung ist eine offene Umgebung von B, welche den Schnitt der endlich vielen entsprechenden $U_y(A)$ nicht trifft.

9.6 Satz von Alexander: Ein topologischer Raum X ist schon dann quasikompakt, wenn jede Überdeckung von X mit Mengen einer **Subbasis** $\mathcal{S}$ stets eine endliche Überdeckung enthält.

Beweis: Angenommen, es gibt einen Ultrafilter $\mathcal{F}$, der nicht konvergiert. Dann gibt es für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{S}$, die nicht in $\mathcal{F}$ enthalten ist und die nach Voraussetzung existierende endliche Teilüberdeckung von $(U_x)_{x \in X}$ hat endlich viele Komplemente, die alle zu $\mathcal{F}$ gehören. Ihr Durchschnitt ist aber leer im Widerspruch zu 6.1.

9.7 Korollar: Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt.

Beweis: Aufgrund von 9.4 und 9.6 muss nur gezeigt werden, dass jede Überdeckung $\mathcal{U}$ eines abgeschlossenen Intervalls $[a; b] \subset \mathbb{R}$ durch Intervalle der Gestalt $[a; c[$ und $]d; b]$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ist $c' := \sup\{c \in \mathbb{R} : [a; c[\in \mathcal{U}\} > b$, so gibt es ein $c'' < b$ mit $[a; c''[\in \mathcal{U}$, welches allein schon $[a; b[$ überdeckt. Ist andererseits $c \leq b$, so muss ein $d' < c'$ existieren mit $]d'; b] \in \mathcal{U}$, denn sonst wird c' nicht überdeckt. Außerdem gibt es dann ein c'' mit $d' < c'' < c'$ mit $[a; c''[\in \mathcal{U}$, so dass $[a; b] \subset [a; c''[\cup]d'; b]$.

9.8 Stetige Abbildungen auf quasikompakten Räumen: Das Bild $f[X]$ eines quasikompakten Raumes X unter der stetigen Abbildung $f : X \to Y$ ist offenbar wieder quasikompakt. Ist Y außerdem **hausdorffsch**, so ist f wegen 9.4 **abgeschlossen.** Ist f zusätzlich **injektiv**, so ist f wegen $f[X \setminus O] = f[X] \setminus f[O]$ auch **offen** und es handelt sich um einen **Homöomorphismus.**

9.9 Satz von Tychonoff: Ein nichtleerer **Produktraum** $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann quasikompakt, wenn alle X_i quasikompakt sind.

Beweis:

$\Rightarrow$: folgt aus 9.8 und der Stetigkeit der **Projektionen** $p_i : X \to X_i$.

$\Leftarrow$: Für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ sind die Bildfilter $p_i(\mathcal{F})$ wegen 6.5 ebenfalls Ultrafilter, denn für jedes $A_i \subset X_i$ sind entweder $p_i^{-1}[A_i]$ oder $p_i^{-1}[X \setminus A_i]$ in $\mathcal{F}$ enthalten und damit auch entweder $A_i = p_i\left[p_i^{-1}[A_i]\right]$ oder $X \setminus A_i = p_i\left[p_i^{-1}[X \setminus A_i]\right]$ in $p_i(\mathcal{F})$. Nach 9.2.4 konvergieren die $p_i(\mathcal{F})$ gegen ein $x_i \in X_i$ und wegen 6.10 konvergiert $\mathcal{F}$ gegen $(x_i)_{i \in I} \in X$.

9.10 Satz von Heine-Borel: Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis:

$\Rightarrow$: Eine kompakte Teilmenge auf dem Hausdorff-Raum $\mathbb{R}^n$ ist nach 9.4 abgeschlossen. Die Beschränktheit sieht man anhand der offenen Überdeckung $\{B_n(0) : n \in \mathbb{N}\}$.

$\Leftarrow$: Eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist als Teilmenge eines wegen 9.7 sowie 9.9 kompakten Würfels $[-m; m]^n$ wieder kompakt.

9.11 Approximationssatz von Kronecker: Für ein irrationales $\gamma \in [0; 1[$ sei $f : \mathbb{N} \to [0; 1]$ definiert durch $f(n) := n\gamma - [n\gamma]$. Dabei steht die **Gaußklammer** $[a]$ für die größte ganze Zahl $\leq a$. Dann ist f injektiv und die abzählbare Menge $f[\mathbb{N}]$ liegt dicht in $[0; 1]$.

Beweis: f ist injektiv, denn $n\gamma - [n\gamma] = m\gamma - [m\gamma] \Leftrightarrow \gamma = \frac{[n\gamma]-[m\gamma]}{m-n} \in \mathbb{Q}$. Da die $f(n)$ alle voneinander verschieden sind, besitzt die Folge in dem nach 9.7 **kompakten** Intervall $[0; 1]$ wegen 9.3 einen **Häufungspunkt** und es gibt für jedes $\epsilon > 0$ natürliche Zahlen o.B.d.A. $n > m$ mit $|n\gamma - [n\gamma] - (m\gamma - [m\gamma])| < \epsilon$. Mit $k = n-m$ und $z = [n\gamma]-[m\gamma]$ erhält man $|k\gamma - z| < \epsilon \Rightarrow z = [k\gamma]$, falls $k\gamma > z$ oder $z = [k\gamma]+1$, falls $k\gamma < z$. Im ersten Fall folgt $0 < f(k) = k\gamma - [k\gamma] < \epsilon$ und für $\nu \cdot \epsilon < 1$ gilt dann $[\nu k\gamma] = \nu[k\gamma]$, so dass die Werte $f(\nu k\gamma)$ der Vielfachen von $k\gamma$ eine aufsteigende Folge in $[0; 1]$ mit Abständen $f((\nu+1)k\gamma) - f(\nu k\gamma) < \epsilon$ bilden. Im zweiten Fall ist $1-\epsilon < f(k) = k\gamma - [k\gamma] < 1$ und für $\nu \cdot \epsilon < 1$ gilt dann $[\nu k\gamma] = \nu[k\gamma] + 1$, so dass die Werte $f(\nu k\gamma)$ der Vielfachen von $k\gamma$ eine absteigende Folge in $[0; 1]$ mit Abständen $f(\nu k\gamma) - f((\nu+1)k\gamma) < \epsilon$ bilden. In beiden Fällen haben die Werte $f(\nu k\gamma)$ der aufeinanderfolgenden Vielfachen von $k\gamma$ einen Abstand $< \epsilon$ voneinander und kommen jeder Zahl in $[0; 1]$ näher als ϵ.

10 Andere Kompaktheitsbegriffe

10.1 Lokalkompakte Räume: Ein Haussdorff-Raum heißt **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt eine **kompakte Umgebung** besitzt. Das wichtigeste Beispiel eines lokalkompakten Raumes ist wegen 9.10 der $\mathbb{R}^n$.

10.2 Satz: Ein lokalkompakter Raum X ist regulär.

Beweis: Die kompakte Umgebung K eines Punktes $x \in X$ ist nach 9.4 abgeschlossen und regulär. Für eine Umgebung U von x ist $U \cap K$ eine Umgebung von x in K und nach 7.7 gibt es eine abgeschlossene Umgebung V von x in K mit $V \subset U \cap K$. V ist auch Umgebung von x in X, da K Umgebung von x ist und V ist abgeschlossen in X, da K abgeschlossen in X ist. Nach 7.7 ist also auch X regulär.

10.3 Korollar: Wegen 7.7, 9.4 und 10.2 bilden die **kompakten Umgebungen** eines Punktes in einem lokalkompakten Raum bereits eine **Umgebungsbasis**. Insbesondere ist jede **offene** und jede **abgeschlossene** Menge sowie jeder **endliche Durchschnitt** offener und abgeschlossener Mengen eines lokalkompakten Raumes mit der jeweiligen Spurtopologie wieder lokalkompakt.

10.4 Satz (Alexandroff-Kompaktifizierung): Ein lokalkompakter Raum X läßt sich durch Hinzufügen eines **unendlich fernen Punktes** ∞ sowie der **Komplemente aller kompakten Teilmengen** von X vereinigt mit $\{\infty\}$ zu einem **kompakten** Raum $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ erweitern. Jeder kompakte Raum, der bis auf einen Punkt homöomorph zu X ist, ist homöomorph zu $\overline{X}$.

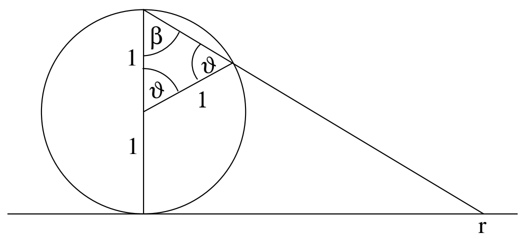
Beweis: Die Komplemente kompakter Mengen in X vereinigt mit $\{\infty\}$ bilden für sich schon eine **Topologie**, weil beliebige Duchschnitte und endliche Vereinigungen kompakter Mengen wieder kompakt sind. Die hinzugefügten Mengen sind auch **verträglich** mit der bisherigen Topologie auf X, weil entsprechende Durchschnitte nach 9.4 (2. Satz) wieder offen in X und Vereinigungen nach 9.4 (1. Satz) wieder Komplemente kompakter Mengen sind. $\overline{X}$ ist **hausdorffsch**, weil X hausdorffsch ist und jedes $x \in X$ sich durch seine kompakte Umgebung bzw. ihr Komplement von ∞ trennen läßt. $\overline{X}$ ist **quasikompakt**, weil jede offene Überdeckung das Komplement einer kompakten Teilmenge von X enthalten muss. Sei nun $\overline{X}'$ ein kompakter Raum mit einem Punkt ∞', so dass $X' := \overline{X}' \setminus \{\infty'\}$ homöomorph zu X ist. Die Komplemente $\overline{X}' \setminus U' = X' \setminus U'$ offener Umgebungen von ∞' sind als abgeschlossene Teilmengen des kompakten Raumes $\overline{X}'$ kompakt. Der Homöomorphismus $f : X \to X'$ wird durch $\overline{f}|_X := f$ und $\overline{f}(\infty) := \infty'$ zu $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{X}'$ erweitert. Dann ist nur zu zeigen, dass $\forall U \in \mathcal{U}(\infty) : \overline{\mathrm{f}}\,[U] \in \mathcal{U}(\infty')$ und umgekehrt $\forall U' \in \mathcal{U}(\infty') : \overline{\mathrm{f}}^{-1}\,[U'] \in \mathcal{U}(\infty)$. Dies folgt aus der Bijektivität von $\overline{f}$ zusammen mit 9.8 und der Tatsache, dass wegen 9.4 die Umgebungen von ∞' genau wieder die Komplemente kompakter Mengen in X' sind.

10.5 Abzählbarkeit im Unendlichen: Ein lokalkompakter Raum heißt **abzählbar im Unendlichen**, wenn er eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen ist. Ein lokalkompakter Raum ist also genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn der bei der **Alexandroff-Kompaktifizierung** hinzugefügte unendlich ferne Punkt ∞ eine **abzählbare Umgebungsbasis** besitzt.

10.6 Satz: Ein lokalkompakter Raum X ist genau dann abzählbar im Unendlichen, wenn es eine **aufsteigende** Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **offener Mengen** gibt, welche X überdecken und deren **Abschlüsse** $\overline{U}_n$ **kompakt** sind.

Beweis. Zu jedem K_i der kompakten Überdeckung $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X erhält man aus den offenen Kernen der endlichen Teilüberdeckung von K_i durch kompakte Umgebungen von Punkten aus K_i eine darüberliegende offene Menge $O_i \supset K_i$, deren Abschluss $\overline{O}_i$ kompakt ist. Die Mengen $U_n := \bigcup_{0\le i\le n} O_i$ erfüllen dann die gewünschten Eigenschaften.

10.7 Beispiele: Die Einpunktkompaktifizierung der **reellen Zahlen** $\overline{\mathbb{R}}$ bzw. **komplexen Zahlen** $\overline{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zum **Einheitskreis** S^1 bzw. zur **Einheitssphäre** S^2. Der Homöomorphismus ist die **stereographische Projektion** $p: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vartheta = 2 \cdot \arctan\left(\frac{2}{r}\right) \\ \varphi \end{pmatrix}$, denn mit $\tan(\beta) = \frac{r}{2}$ und $\vartheta + 2\beta = 180°$ bzw. $\beta = 90° - \frac{\vartheta}{2}$ folgt $\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{2}{r}$ (siehe Abbildung rechts).



Eine Funktion $\bar{f}: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist genau dann stetig, wenn ihre Restriktion $f := \bar{f}|_{\{|\bar{f}|<\infty\}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist und für jedes $x \in \bar{f}^{-1}(\infty)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\bar{f}\left[B_\delta(x)\right] \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_n(0)}$, d.h., $\|u - x\| < \delta \Rightarrow \|f(u)\| \geq n$. Alle **meromorphen Funktionen** sind also an ihren Polstellen stetig bezüglich der Einpunktkompaktifizierung.

Wegen $\left\{(u+v) : u \in B_{1/\delta}(a) \wedge v \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_\delta(0)}\right\} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_n(0)}$ mit $\delta = n + 2\|a\|$ für alle $n \geq 2$ ist die nach 4.2.3 auf $\mathbb{C}^2$ stetige **erweiterte Addition** $+ : \overline{\mathbb{C}}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ für $a \in \mathbb{C}$ auch an den Stellen $(a;\infty)$ bzw. $(\infty;a)$ und analog auch $(\infty;\infty)$ stetig und somit auf ganz $\overline{\mathbb{C}}^2$. Analog folgt aus $\left\{(u \cdot v) : u \in B_{1/\delta}(a) \wedge v \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_\delta(0)}\right\} \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_n(0)}$ mit $\delta = \frac{n}{\|a\|}$ für alle $n \geq 3$ die Stetigkeit der **erweiterten Multiplikation** $\cdot : \overline{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0;\infty);(\infty;0)\} \to \overline{\mathbb{C}}$.

10.8 Abzählbar kompakte Räume: Ein Hausdorff-Raum heißt **abzählbar kompakt**, wenn jede **abzählbare** offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein Hausdorff Raum ist genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge einen **Häufungspunkt** besitzt.

Beweis:

$\Rightarrow$: Wenn die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, hat jeder Punkt eine Umgebung, die nur endlich viele Folgenglieder trifft. In einem Hausdorff-Raum gibt es dann sogar eine Umgebung, die keinen Folgenpunkt trifft und damit ist das Komplement der Folge eine offene Menge, die zusammen mit den entsprechenden Umgebungen der Folgenglieder eine abzählbare offene Überdeckung von X bildet. Die nach Voraussetzung existierende Teilüberdeckung von endlich vielen dieser Umgebungen enthält dann auch nur endlich viele Folgenglieder im Widerspruch zur Unendlichkeit der Folge.

$\Leftarrow$: Sei $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung des Hausdorff-Raumes X und $x_n \in X \setminus \bigcup_{0\leq i\leq n} O_i$. Der Häufungspunkt y der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt dann in einem O_i, welches demnach unendlich viele x_n enthält im Widerspruch zur Konstruktion der Folge.

10.9 Lindelöf-Räume: Ein topologischer Raum heißt **Lindelöf-Raum**, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Jeder Raum mit **abzählbarer Basis** (**2. Abzählbarkeitsaxiom**) ist also ein Lindelöf-Raum. Ein Lindelöf-Raum ist genau dann kompakt, wenn er **abzählbar kompakt** ist.

10.10 Folgenkompakte Räume: Ein Hausdorff-Raum heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge eine **konvergente Teilfolge** besitzt. In einem Raum mit **abzählbarer Umgebungsbasis** (**1. Abzählbarkeitsaxiom**) für jeden seiner Punkte läßt sich für jeden Häufungspunkt einer Folge eine konvergente Teilfolge konstruieren. Ein solcher Raum ist also genau dann folgenkompakt, wenn der abzählbar kompakt ist.

10.11 Kompaktheit auf metrischen Räumen: In metrischen Räumen fallen die Bergiffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt zusammen.

Beweis: Wegen 10.8 - 10.10 ist nur zu zeigen, dass folgenkompakte metrische Räume eine abzählbare Basis besitzen. Dazu konstruiert man rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ eine endliche Folge $(x_{n,i})_{0\leq i\leq i_o(n)}$ mit $d(x_i;x_j) \geq \frac{1}{n}$ für alle $0 \leq i \neq j \leq i_0(n)$: Für ein beliebig gewähltes $x_{0,n} \in X$ wähle $x_{0,n} \in X \setminus B_{1/n}(x_{o,n})$ und für $x_{i,n} \in X$ wähle $x_{i+1,n} \in X \setminus \bigcup_{0\leq j\leq i} B_{1/n}(x_{j,n})$. Wegen der Folgenkompaktheit muß die Folge nach endlich vielen $x_{i,n}$ enden und überdeckt dann offensichtlich X. Die Menge aller $x_{i,n}$ ist dann eine abzählbare dichte Teilmenge von X und die $B_{1/m}(x_{i,n})$ für $m \in \mathbb{N}^*$ bilden eine abzählbare Basis für X.

11 Uniforme Räume

11.1 Uniforme Strukturen: Für Mengen $A, B \subset X^2$ sei $A^{-1} = \{(x;y) \in X : (y;x) \in A\}$ und $AB := \{(x;z) \in X : \exists y \in X : (x;y) \in A \wedge (y;z) \in B\}$ mit $A^2 := AA$, usw.. A heißt **symmetrisch**, wenn $A^{-1} = A$. Es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(AB)\,C = A\,(BC)$; aus $A \subset B$ folgt $A^{-1} \subset B^{-1}$ und $AC \subset BC$ für beliebige C. Ist A symmetrisch, so auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Ein **Nachbarschaftsfilter** $\mathcal{U}$ auf einer Menge X ist ein **Filter** auf dem **Produkt** $X \times X$, dessen **Nachbarschaften** $U \in \mathcal{U}$ die **Diagonale** Δ enthalten und der mit jeder Nachbarschaft U auch ihr Spiegelbild U^{-1} sowie eine weitere Nachbarschaft V mit $V^2 \subset U$ enthält. Das Paar $(X;\mathcal{U})$ heißt dann **uniformer Raum** und zwei Punkte x und y aus X heißen **benachbart von der Ordnung U**, wenn $(x;y) \in U \in \mathcal{U}$. Wegen $\Delta \subset U \in \mathcal{U}$ gilt $U \subset U^n \in \mathcal{U}$ für $n \in \mathbb{N}^*$.

11.2 Nachbarschaftsbasis: Ein Teilsystem $\mathcal{B}$ eines Nachbarschaftsfilters $\mathcal{U}$ heißt **Nachbarschaftsbasis**, wenn jede Nachbarschaft aus $\mathcal{U}$ eine Menge aus $\mathcal{B}$ enthält. Mit $\mathcal{B}$ sind auch die Systeme $\mathcal{B}' := \{B \cap B^{-1} : B \in \mathcal{B}\}$ und $\mathcal{B}_n := \{B^n : B \in \mathcal{B}\}$ Nachbarschaftsbasen für den Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$.

11.3 Uniformisierung: Für einen Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$ auf einer Menge X bilden die Mengen $U(x) = \{y \in X : (x;y) \in U\}$ für $U \in \mathcal{U}$ für jedes $x \in X$ ein **Umgebungssystem** und definieren nach 2.5 eine **Topologie** $\mathcal{O}$ auf X. Für eine **Nachbarschaftsbasis** $\mathcal{B}$ bilden die Mengen $B(x)$ mit $B \in \mathcal{B}$ entsprechend eine **Umgebungsbasis** für x. Die von den $\mathcal{B}$(x) bzw. $\mathcal{U}$(x) erzeugte Topologie $\mathcal{O}$ heißt **Topologie des uniformen Raumes** bzw. die von $\mathcal{U}$ **induzierte Topologie**. Eine Topologie $\mathcal{O}$ heißt **uniformisierbar**, wenn es einen Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$ gibt, welcher $\mathcal{O}$ induziert.

11.4 Beispiele: Die **indiskrete Topologie** wird von der Menge $X \times X$ selbst erzeugt. Die **diskrete Topologie** wird einerseits von allen Teilmengen von $X \times X$ erzeugt, welche die Diagonale Δ enthalten. Sie wird aber andererseits auch von dem **Nachbarschaftsfilter der endlichen Partitionen** erzeugt. Die Nachbarschaften $U_P = \{(x;y) : \exists A_i \in P : x, y \in A_i\}$ für jede endliche Partition $P = \{A_1, ..., A_n\}$ von X erfüllen nämlich die Bedingungen 11.1, wobei $U_P \supset U_{P'}$ genau dann, wenn jede Menge aus P Vereinigung von Mengen aus P' ist und $U_P \cap U_{P'}$ die Nachbarschaft der Partition ist, welche durch alle Schnitte von Mengen aus P mit Mengen aus P' entsteht. Da eine Partition eine disjunkte Überdeckung ist, gilt weiterhin $U_P^2 = U_P$.

11.5 Metrisation: Der **Nachbarschaftsfilter eines metrischen Raumes** $(X;d)$ wird von den Nachbarschaften $U_{1/n} := \left\{(x;y) \in X^2 : d(x;y) < \frac{1}{n}\right\}$ für $n \in \mathbb{N}^*$ erzeugt oder **induziert** und besitzt somit eine **abzählbare** Nachbarschaftsbasis. Ein Nachbarschaftsfilter bzw. eine Topologie heißt **metrisierbar**, wenn er bzw. sie sich durch eine Metrik induzieren läßt.

Wie in 1.4 und 11.4 gezeigt, sind die Zuordnungen Metrik $\to$ Nachbarschaftsfilter $\to$ Topologie nicht injektiv. Insbesondere kann eine Topologie durch verschiedene Nachbarschaftsfilter erzeugt werden, von denen nicht jeder metrisierbar ist. Z.B. ist der diskrete Nachbarschaftsfilter durch $d(x;x) = 0$ und $d(x;y) = 1$ sonst metrisierbar, der Nachbarschaftsfilter der endlichen Partitionen hingegen nicht (siehe 12.5). Aus der Metrisierbarkeit folgt aber natürlich immer die Uniformisierbarkeit.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[dr] & d' \arrow[d] & d'' \arrow[dl] & & \\ & \mathcal{U} \arrow[dr] & \mathcal{U}' \arrow[d] & \mathcal{U}'' \arrow[dl] & \\ & & O & \mathcal{O}' & \mathcal{O}'' \end{tikzcd}$$

11.6 Satz: Die offenen Kerne bzw. die Abschlüsse in X^2 einer Nachbarschaftsbasis bilden wieder eine Nachbarschaftsbasis in X.

Beweis: Zu einer beliebigen Nachbarschaft U gibt es nach 11.1 eine symmetrische Nachbarschaft V mit $V^3 \subset U$. Für $(x;y) \in V$ ist die in X^2 offene Menge $V(x) \times V(y)$ in V^3 enthalten. V^3 ist also bezüglich der Produkttopologie auf X^2 Umgebung jedes seiner Punkte und damit offen in X^2. Damit folgt $V^3 \subset \overset{o}{U}$ und $\overset{o}{U}$ ist ebenfalls Nachbarschaft in X. Sei nun $(x;y) \in \overline{V}$, dann ist $V(x) \times V(y) \cap V \neq \emptyset$ und es gibt $(x';y') \in V$ mit $(x;x') \in V$ und $(y;y') \in V$ und wegen der Symmetrie von V folgt $(x;y) \in V^3$. Insbesondere ist $\overline{V} \subset V^3 \subset U$. Da es für jedes U ein solches V gibt, sind also auch die Abschlüsse einer Nachbarschaftsbasis wieder eine Nachbarschaftsbasis.

11.7 Trennungseigenschaften: Die bisherigen Begriffe werden weiter verwendet und beziehen sich auf die induzierten Topologien. Hausdorffsche uniforme Räume heißen auch **separiert**.

1. Ein uniformer Raum ist genau dann separiert, wenn der Durchschnitt aller Nachbarschaften die Diagonale Δ ist.
2. Jeder uniforme Raum ist ein T_3-Raum.

Beweis:

1. $\Rightarrow$: Nach Voraussetzung gibt es für $x \neq y$ eine Nachbarschaft U, so dass $U(x) \cap U(y) = \emptyset \Rightarrow (x;y) \notin U$. $(x;y)$ ist also nicht im Durchschnitt aller Nachbarschaften enthalten und da dies für beliebige Paare $x \neq y$ gilt, folgt die Behauptung. $\Leftarrow$: Nach Voraussetzung gibt es für $x \neq y$ eine Nachbarschaft U mit $(x;y) \notin U$. Nach 11.1 gibt es eine weitere Nachbarschaft V mit $V^2 \subset U$ und insbesondere $V(x) \cap V(y) = \emptyset$.
2. Die Behauptung folgt aus 7.7, weil es nach 11.1 für jedes Nachbarschaft U eine symmetrische Nachbarschaft V mit $V^2 \subset U$ gibt und $\overline{V(x)} \subset V^2(x) \subset U(x)$. Beachte, dass wir hier der Abschluss $\overline{V(x)} \subset V^2(x)$ in X betrachten, während in 11.6 der Abschluss $\overline{V} \subset V^3$ in X^2 verwendet wird.

11.8 Kompaktheit: Für eine Nachbarschaft U und eine Teilmenge A heißt $V(A) := \bigcup_{x \in A} V(x)$ **gleichmäßige Umgebung** von A.

1. Jede Umgebung einer kompakten Teilmenge eines uniformen Raumes enthält eine gleichmäßige Umgebung.
2. Zwei disjunkte Mengen K und A eines uniformen Raumes lassen sich durch gleichmäßige Umgebungen trennen, wenn K kompakt und A abgeschlossen ist.

Beweis:

1. Für die Umgebung U der kompakten Teilmenge $K \subset X$ und jedes $x \in K$ gibt es eine Nachbarschaft U_x mit $U_x(x) \subset U$ und eine weitere Nachbarschaft V_x mit $V_x^2 \subset U_x$. Die $V_x(x)$ bilden eine Überdeckung von K und V sei der Schnitt der endlich vielen V_x, deren Umgebungen $V_x(x)$ eine endliche Teilüberdeckung von K bilden. Für jedes $y \in V(K)$ gibt es ein $z \in K$ mit $(y;z) \in V$. Das z liegt in einem der $V_x(x)$, d.h. $(z;x) \in V_x$ und weiter $(y;x) \in \mathrm{VV_x} \subset V_x^2 \subset U_x$. Damit folgt $y \in U_x(x) \subset U$ und weiter $V(K) \subset U$.
2. Wegen 11.7.2 läßt sich K durch eine gleichmäßige Umgebung $U(K)$ von A trennen. Die gleichmäßigen Umgebungen $V(K)$ und $V(A)$ mit $V^2 \subset U$ sind dann disjunkt.

11.9 Gleichmäßig stetige Funktionen: Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei uniformen Räumen $(X,\mathcal{U}_X)$ und $(Y,\mathcal{U}_Y)$ von heißt **gleichmäßig stetig**, wenn $(f \times f)^{-1}[U] \in \mathcal{U}_X \forall U \in \mathcal{U}_Y$ Für jede Nachbarschaft $U \in \mathcal{U}_Y$ gibt es also eine Nachbarschaft $V \in \mathcal{U}_X$ mit $(f \times f)[V] \subset U$. Für den Nachweis kann man sich offenbar auf **Nachbarschaftsbasen** beschränkten. Die **Verkettung** $g \circ f : X \to Z$ zweier gleichmäßig stetiger $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist wieder gleichmäßig stetig. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist **stetig** bezüglich der induzierten Topologien.

11.10 Satz: Eine stetige Funktion $f : X \to Y$ eines kompakten uniformen Raumes $(X,\mathcal{U}_X)$ in einen uniformen Raum $(Y,\mathcal{U}_Y)$ ist schon gleichmäßig stetig.

Beweis: Zu einem beliebigen $U \in \mathcal{U}_Y$ sei ein symmetrisches $V \in \mathcal{U}_Y$ so gewählt, dass $V^2 \subset U$. Da f stetig, gibt es für jedes $x \in X$ ein $V_x \in \mathcal{U}_X$ mit $f[V_x(x)] \subset V(f(x))$ und zu diesem wiederum ein symmetrisches $W_x \in \mathcal{U}_X$ mit $W_x^2 \subset V_x$. Die $W_x(x)$ besitzen eine endliche Teilüberdeckung und der Schnitt W der entsprechenden W_x ist die gesuchte Nachbarschaft mit $(f \times f)[W] \subset U$. Für $(y;z) \in W$ existiert ein $W_x(x)$ der endlichen Teilüberdeckung mit $y \in W_x(x) \subset W_x^2(x) \subset V_x(x)$ und daher auch $z \in WW_x(x) \subset W_x^2(x) \subset V_x(x)$. Wegen $f[V_x(x)] \subset V(f(x))$ folgt $f(y), f(z) \in V(f(x))$ und damit $(f(y); f(z)) \in V^2 \subset U$.

11.11 Initiale Nachbarschaftsfilter: Gilt für zwei Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, so heißt $\mathcal{U}_2$ **feiner** als $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_1$ **gröber** als $\mathcal{U}_2$. Dies Verhältnisse übertragen sich auf die induzierten Topologien. Die Identität $\mathrm{id} : (X;\mathcal{U}_1) \to (X;\mathcal{U}_2)$ ist genau dann **gleichmäßig stetig**, wenn $\mathcal{U}_1$ **feiner** als $\mathcal{U}_2$ ist. Der gröbste Nachbarschaftsfilter $\mathcal{U}$ auf einer Menge X, auf dem die Funktionen

$f_i : (X,\mathcal{U}) \to (Y_i,\mathcal{U}_i)$ in die **uniformen** Räume $(Y_i,\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ **gleichmäßig stetig** sind, heißt **initialer Nachbarschaftsfilter** bezüglich der f_i. Die **endlichen Schnitte** $\bigcap_{i\in E}(f_i \times f_i)^{-1}[U_i]$ der Urbilder von Nachbarschaften $U_i \in \mathcal{U}_i$ für endliche $E \subset I$ bilden eine **Nachbarschaftsbasis** von $\mathcal{U}$, denn $(f_i \times f_i)^{-1}\left[U_i^{-1}\right] = \left((f_i \times f_i)^{-1}[U_i]\right)^{-1}$ und für $V_i^2 \subset U_i$ folgt $\left(\bigcap_{i\in E}(f_i \times f_i)^{-1}[V_i]\right)^2 \subset \bigcap_{i\in E}(f_i \times f_i)^{-1}[V_i^2] \subset \bigcap_{i\in E}(f_i \times f_i)^{-1}[U_i]$. Der **initiale Nachbarschaftsfilter** $\mathcal{U}$ induziert die **Initialtopologie** bezüglich der $f_i : (X,\mathcal{O}) \to (Y_i,\mathcal{O}_i)$, wobei O bzw. $\mathcal{O}_i$ die von $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{U}_i$ induzierten **Topologien** sind. Die Mengen $\left(\bigcap_{i\in E}(f_i \times f_i)^{-1}[U_i]\right)(x) = \bigcap_{i\in E}\left((f_i \times f_i)^{-1}[U_i]\right)(x) = \bigcap_{i\in E} f_i^{-1}[U_i(f_i(x))]$ bilden nämlich die Umgebungsbasis der von $\mathcal{U}$ induzierten Topologie. Die von diesem Umgebungen erzeugte Topologie ist aber gerade die gröbste Topologie, bezüglich der alle f_i stetig sind.

11.12 Produkt uniformer Räume: In Analogie zu 4.2 definiert man den **Produktfilter** auf dem **Produkt** $\prod_{i\in I} X_i$ der uniformen Räume $(X_i,U_i)_{i\in I}$ als den **initialen Nachbarschaftsfilter** bezüglich der **Projektionen** $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$. Sie werden erzeugt von endlichen Schnitten $\bigcap_{i\in E}(p_i \times p_i)^{-1}[U_i]$. Die Funktion $f : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ ist genau dann **gleichmäßig stetig**, wenn die Urbilder $(f \times f)^{-1}\left[\bigcap_{i\in E}(p_i \times p_i)^{-1}[U_i]\right] = \bigcap_{i\in E}(p_i \circ f \times p_i \circ f)^{-1}[U_i]$ von Nachbarschaften der **Basis** auch wieder Nachbarschaften in $(Y,\mathcal{U})$ sind. f ist also genau dann gleichmäßig stetig, wenn alle **Komponenten** $p_i \circ f : (Y,\mathcal{U}) \to (X_i,\mathcal{U}_i)$ gleichmäßig stetig sind.

11.13 Uniforme Unterräume: In Analogie zu 4.3 definiert man den **Spurfilter** auf der Teilmenge $A \subset X$ des uniformen Raumes $(X;\mathcal{U})$ als den **initialen Nachbarschaftsfilter** bezüglich der **Injektion** $j : A \to X$. Er besteht aus den Schnitten $(j \times j)^{-1}[U] = U \cap (A \times A)$ der Nachbarschaften $U \in \mathcal{U}$ mit $A \times A$.

11.14 Satz: Ist A **dicht** in X, so bilden die Abschlüsse in $X \times X$ der Nachbarschaften des uniformen Unterraums A bereits eine Basis für die Nachbarschaften in X.

Beweis: Für eine **offene** Nachbarschaft U von X gilt $U \subset \overline{U \cap A^2}$, denn für $(x;y) \in U$ muss jede Umgebung $V(x)\times W(y)$, welche o.B.d.A in U liegt, auch A^2 schneiden und damit ist $(x;y)$ Berührungspunkt von $U \cap A^2$. Insbesondere ist $\overline{U \cap A^2}$ selbst eine Nachbarschaft und enthält $\overline{U}$. Die Behauptung folgt dann aus 11.6.

12 Uniformisierung und Metrisation

12.1 Halbmetriken: Eine **Halbmetrik** ist eine Funktion $d : X^2 \to [0;\infty[$ mit den Eigenschaften

1. $d(x;x) = 0 \forall x \in X$
2. $d(x;y) = d(y;x)$ für alle $x,y \in X$ (**Symmetrie**)
3. $d(x;y) + d(y;z) \leq d(x;z)$ für alle $x,y,z \in X$ (**Dreiecksungleichung**).

12.2 Halbnormen: Eine **Halbnorm** auf einem Vektorraum X über einem normierten Körper $K \in \{\mathbb{R};\mathbb{C}\}$ ist eine Funktion $\|\| : X \to [0;\infty[$ mit

1. $\|x\| = 0$
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $\lambda \in K$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x,y \in X$

Beispiele: Auf dem Raum $X = L^2(Y;\mathbb{C})$ der **quadratisch integrierbaren** komplexwertigen Funktionen auf einem Maßraum $(Y;\mathcal{A};\mu)$ ist mit $\|f\| := \sqrt{\int\left(f \cdot \overline{f}\right)d\mu}$ eine Halbnorm erklärt mit $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-fast überall. Auf dem Raum $X = C(Y;\mathbb{C})$ der **stetigen** komplexwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum $(Y;\mathcal{O})$ ist für eine kompakte Menge $K \subset Y$ durch $\|f\|_K := \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ eine Halbnorm erklärt mit $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \forall x \in K$. Mittels $d(x;y) := \|x-y\|$ kommt man wieder auf die entsprechende **Halbmetrik**.

12.3 Satz: Ein uniformer Raum $(X;\mathcal{U})$ lässt sich genau dann durch eine Halbmetrik definieren, wenn er eine abzählbare Nachbarschaftsbasis besitzt.

Beweis: Für die abzähbare Nachbarschaftsbasis $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des Nachbarschaftfilters $\mathcal{U}$ kann man nach 11.2 annehmen, dass alle B_n symmetrisch sind mit $B_{n+1}^3 \subset B_n$.

Für $x, y \in X$ sei $g(x;y) := \begin{cases} 1 \text{ für } (x;y) \notin B_1 \\ \inf\left\{2^{-k} : (x;y) \in {}_k : k \in \mathbb{N}^*\right\} \end{cases}$ und M_{xy} die Menge aller endlichen Folgen $(x_i)_{i\in K}$ mit Indexmenge $K = \{0;1;...;n\}$, Startpunkt $x_0 = x$ sowie Endpunkt $x_n = y$.

Die gesuchte Halbmetrik ist dann $d(x;y) := \inf\left\{\sum_{0\le i\le n-1} g(x_i;x_{i+1}) : (x_i)_{i\in K} \in M_{xy}\right\}$. Die Eigenschaften 12.1.1 und 12.1.2 sind trivialerweise erfüllt und für die Dreiecksungleichung genügt der Hinweis, dass die endlichen Folgen von x nach z über den Zwischenhalt y eine Teilmenge der endlichen Folgen von x nach z sind. Um zu zeigen, dass $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ wirklich von d erzeugt wird, benötigen wir die Abschätzung $\frac{1}{2}g(x;y) \le d(x;y) \le g(x;y)$. Die rechte Ungleichung folgt direkt aus der Definition. Die linke ist äquivalent zu $\frac{1}{2}g(x;y) \le \sum_{0\le i\le n-1} g(x_i;x_{i+1}) : (x_i)_{i\in K} \in M_{xy}$ und wird durch Induktion nach n bewiesen:

Der Induktionsstart $n = 1$ ist trivial. Sei nun $x_0 = x; ..; x_{n+1} = y$ und $\sum_{0\le i\le n-1} g(x_i;x_{i+1}) \ne 0$. Falls $a \ge \frac{1}{2}$, so ist wegen $g(x;y) \le 1$ nicht zu zeigen. Sei also $a < \frac{1}{2}$ und m der größte Index, so dass $\sum_{0\le i\le m-1} g(x_i;x_{i+1}) \le \frac{a}{2}$. Dann ist $\sum_{0\le i\le m} g(x_i;x_{i+1}) > \frac{a}{2}$ und damit die restliche Summe $\sum_{m+1\le i\le n} g(x_i;x_{i+1}) \le \frac{a}{2}$. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf die Teilsummen links und rechts von m erhält man $\frac{1}{2}g(x;x_m) \le \sum_{0\le i\le m-1} g(x_i;x_{i+1}) \le \frac{a}{2}$ und $\frac{1}{2}g(x_{m+1};y) \le \sum_{m+1\le i\le n} g(x_i;x_{i+1}) \le \frac{a}{2}$. Nach Definition von a ist außerdem $\frac{1}{2}g(x_m;x_{m+1}) \le \frac{a}{2}$. Ist k die kleinste natürliche Zahl mit $2^{-k} \le a$, so liegen $(x;x_m), (x_m;x_{m+1})$ und $(x_{m+1};y)$alle in B_k und damit $(x;y)$ in $B_k^3 \subset B_{k-1}$. Insbesondere ist $g(x;y) \le 2^{-(k-1)}$ bzw. $\frac{1}{2}g(x;y) \le 2^{-k} \le a$, was zu zeigen war.

Im Fall $\sum_{0\le i\le n-1} g(x_i;x_{i+1}) = 0$ liegen alle $(x_i;x_{i+1})$ in B_{k+n} und damit $(x;y)$ in B_k jeweils für alle $k \in \mathbb{N}^*$, d.h. $g(x;y) = 0$.

Aus der gerade bewiesenen Abschätzung folgt nun $B_k \subset d^{-1}\left[\left[0;2^{-k}\right[\right] \subset B_{k-1}$, d.h. die gegebene Nachbarschaftsbasis $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ wird von d erzeugt. Umgekehrt erzeugt eine Halbmetrik d eine abzählbare Nachbarschaftsbasis $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit $B_n := d^{-1}\left[\left[0;2^{-k}\right[\right]$ für den durch d induzierten Nachbarschaftsfilter.

12.4 Korollar: Ein uniformer Raum ist genau dann metrisierbar und damit normal, wenn er separiert ist und eine abzählbare Nachbarschaftsbasis besitzt. Jeder Haussdorff-Raum mit 1. Abzählbarkeitsaxiom ist also metrisierbar.

12.5 Beispiel: Die in 11.4 definierte Nachbarschaftsfilter der **endlichen Partitionen** induziert die **diskrete Topologie**, welche mittels des diskreten Nachbarschaftsfilters metrisierbar ist. Sie ist im Fall einer **unendlichen** Menge X selbst aber nicht metrisierbar, denn dann müsste nach 12.4 eine abzählbare Nachbarschaftsbasis $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existieren, d.h., **jede** Menge einer endlichen Partition P von X müsste als Vereinigung von Mengen aus **einem** der $P_n \subset P$ darstellbar sein. Aus einer endlichen Partition P_n können aber durch Vereinigung nur wieder endlich viele gröbere Partitionen gebildet werden und dann müsste die Menge aller endlichen Partitionen der unendlichen Menge X abzählbar sein im Widerspruch zu [4, Satz 17.9].

12.6 Bemerkung: Der **Metrisationssatz von Bing, Nagata und Smirnow** (siehe z.B. [3, Satz 10.14]) fordert nur eine σ-lokal-endliche Basis, verlangt dafür aber zusätzlich T_3: Jeder reguläre Raum mit σ-lokal-endlicher Basis ist metrisierbar.

12.7 Satz: Jeder uniforme Raum lässt sich durch ein System von Halbmetriken definieren.

Beweis: Zu jeder Nachbarschaft V des gegebenen Nachbarschaftsfilters $\mathcal{U}$ gibt es eine Folge symmetrischer Nachbarschaften B_n, so dass $B_1 \subset V$ und $B_{n+1}^3 \subset B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Jede dieser Folgen ist eine Basis für eines Nachbarschaftsfilters $\mathcal{U}_V$, der sich nach 12.3 durch eine Halbmetrik d_V definieren lässt. Wegen $\mathcal{U}_V \subset \mathcal{U} \forall V \in \mathcal{U}$ und $\bigcup_{V\in\mathcal{U}} \mathcal{U}_V = \mathcal{U}$ ist $\mathcal{U}$ der gröbste Nachbarschaftsfilters, der feiner als alle $\mathcal{U}_V$ ist. Eine Nachbarschaftsbasis von $\mathcal{U}$ wird gegeben durch

$\mathcal{B} := \left\{\bigcap_{V\in\mathcal{E}} d_V^{-1}\left[[0;a[\right] : \mathcal{E} \text{ endliche Teilmenge von } \mathcal{U} \text{ und } a \in]0;1]\right\} = \left\{d^{-1}\left[[0;a[\right] : a \in]0;1]\right\}$ mit

$d(y;y) := \min\left\{d_V(x;y) : V \in \mathcal{E} \text{ und } \mathcal{E} \text{ endliche Teilmenge von } \mathcal{U}\right\}$.

Beachte, dass die d_V Halbmetriken auf dem durch $\mathcal{U}$ erzeugten topologischen Raum sind, welche jedoch nur einen Teil $\mathcal{U}_V$ der Nachbarschaften erzeugen, während die Funktion $d : X^2 \to [0;1]$ zwar mit ihren Urbildern ganz $\mathcal{U}$ erzeugt, aber i.A. keine Halbmetrik mehr ist.

12.8 Satz: Ein topologischer Raum ist genau dann uniformisierbar und damit T_3, wenn er ein T_{3a}-Raum ist.

Beweis:

$\Rightarrow$: Für ein abgeschlossenen $A \subset X$, $x_0 \in X \setminus A$ und $V \in \mathcal{U}$ mit $V(x_0) \subset X \setminus A$ gibt es nach 12.5 eine Halbmetrik d_V und ein $a \in]0;1]$, so dass $d_V^{-1}\left[[0;a]\right] \subset V$. Die Funktion $f : X \to [0;1]$ mit $f(x) := \sup\left\{0; 1 - \frac{1}{a} d_V(x;x_0)\right\}$ ist dann stetig, da $d_V^{-1}\left[[0;a[\right] \in U_V \subset U$ und außerdem ist $f[A] = \{0\}$ sowie $f(x_0) = 1$.

$\Leftarrow$: $(X;\mathcal{O})$ sei ein T_{3a}-Raum und I die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \to [0;1]$. Wegen 7.8.2 ist $\mathcal{O}$ die **Initialtopologie** bezüglich der $f \in I$. Die von der Initialtopologie $\mathcal{U}$ bezüglich der $f \in I$ erzeugte Topologie $\mathcal{O}'$ stimmt wegen 11.11 mit $\mathcal{O}$ überein.

13 Vervollständigung

13.1 Cauchy-Filter: Eine Teilmenge A eines uniformen Raumes $(X;\mathcal{U})$ bzw. metrischen Raumes $(X;d)$ heißt **klein von der Ordnung** $V \in \mathcal{U}$ bzw. $\epsilon > 0$, wenn $A^2 \subset V$ bzw. $A^2 \subset d^{-1}\left[[0;\epsilon[\right]$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt **Cauchy-Filter**, wenn es zu jeder Nachbarschaft V ein $F \in \mathcal{F}$ gibt, welches klein von der Ordnung V ist.

1. Jeder **konvergente** Filter $\mathcal{F}$ ist ein Cauchy-Filter, denn er enthält für jedes $V \in \mathcal{U}$ mit dem Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ auch eine Umgebung $U(x) \in \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ mit $U^2 \subset V$, d.h., $U(x)$ ist klein von der Ordnung V.
2. Jeder Cauchy-Filter **konvergiert gegen seine Berührungspunkte**, denn für jedes $U(x) \in \mathcal{U}(x)$ gibt es $F \in \mathcal{F}$ klein von der Ordnung $V \in \mathcal{U}$ mit $V^2 \subset U$ und $F \cap V(x) \neq \emptyset$, also $F \subset U(x)$ und damit $U(x) \in \mathcal{F}$.
3. Das **Bild** $f(\mathcal{F})$ eines Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ unter der gleichmäßig stetigen Funktion $f : (X;\mathcal{U}_X) \to (Y;\mathcal{U}_Y)$ ist wieder ein Cauchy-Filter, denn für jedes $V \in \mathcal{U}_Y$ ist $(f \times f)^{-1}[V] \in \mathcal{U}_X$, so dass ein $F \in \mathcal{F}$ existiert mit $F^2 \subset (f \times f)^{-1}[V]$ und damit $(f \times f)\left[F^2\right] = (f[F])^2 \subset V$.
4. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X ist genau dann ein **Cauchy-Filter** bezüglich des **initialen Nachbarschaftsfilters** $\mathcal{U}$ für die Funktionen $f_i : X \to (Y_i \mathcal{U}_i)$, wenn dies auch für alle **Bildfilter** $f_i(\mathcal{F})$ gilt, denn für eine gegebene Basisnachbarschaft $B = \bigcap_{i\in E} (f_i \times f_i)^{-1}[U_i]$ mit $U_i \in \mathcal{U}_i$ (vgl. 11.11) gibt es im Fall der Cauchy-Eigenschaft der Bildfilter $f_i(F_i) \in f_i(\mathcal{F})$ mit $(f_i \times f_i)(F_i \times F_i) \subset U_i \forall i \in E$ und die Filtermenge $F := \bigcap_{i\in E} F_i$ erfüllt dann $(f_i \times f_i)(F \times F) \subset U_i \forall i \in E$ und damit $F \times F \subset B$, so dass also auch $\mathcal{F}$ ein Cauchy-Filter sein muss. Die andere Richtung folgt aus 13.1.3.

13.2 Vollständige Räume: Ein uniformer Raum $(X;\mathcal{U})$ heißt **vollständig**, wenn jeder Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert.

1. Das **Produkt** $X = \prod_{i\in I} X_i$ vollständiger Räume X_i ist vollständig, denn die Bilder $p_i(\mathcal{F})$ eines Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ unter den Projektionen $p_i : X \to X_i$ sind wieder Cauchy-Filter auf den $X_i$und konvergieren dort gegen $x_i \in X_i$, so dass $\mathcal{F}$ gegen $(x_i)_{i\in I} \in X$ konvergiert.
2. Jeder **abgeschlossene** Unterraum A eines vollständigen Raumes X ist wieder vollständig, weil der Bildfilter $i(\mathcal{F})$ eines Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ unter der Injektion $i : A \to X$ wieder Cauchy-Filter auf X ist und dort gegen ein $x \in X$ konvergiert, welches damit Berührungspunkt sowohl der Menge A als auch des Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ auf A ist, so dass nach Voraussetzung $\mathcal{F}$ gegen $x \in A$ konvergiert.

3. Umgekehrt ist jeder **vollständige Unterraum** A eines separierten Raumes X **abgeschlossen**, denn für jeden Berührungspunkt x von A erzeugen die nichtleeren Schnitte $\mathcal{U}(x) \cap A$ einer Umgebungsbasis $\mathcal{U}(x)$ mit A einen Cauchy-Filter auf A, der wegen T_2 nur den einzigen Berührungspunkt x besitzt und wegen 13.1 gegen diesen konvergiert. Wegen der Vollständigkeit von A muss x in A liegen.

13.3 Minimale Cauchy-Filter: Zu jedem Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf einem uniformen Raum $(X;\mathcal{U})$ existiert ein eindeutig bestimmter minimaler Cauchy-Filter $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$.

Beweis: $\mathcal{F}_0$ wird von $\mathcal{B} := \{U(F) : U \in \mathcal{U}, F \in \mathcal{F}\}$ erzeugt. Wegen $(U_1 \cap U_2)(F_1 \cap F_2) \subset U_1(F_1) \cap U_2(F_2)$ ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis. $\mathcal{F}_0$ ist ein Cauchy-Filter, denn für $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}$ mit $V^3 \subset U$ und n.Vor. ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F \times F \subset V$, so dass $V(F) \times V(F) \subset V^3 \subset U$. Offensichtilich gilt $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ und jeder andere Cauchy-Filter $\mathcal{F}_0' \subset \mathcal{F}$ muss $\mathcal{F}_0$ enthalten, denn für jedes $U(F) \in \mathcal{B}$ muss es ein $F' \in F_0'$ geben mit $F' \times F' \subset U$ und $F' \cap F \neq \emptyset$, so dass $F' \subset U(F)$ und damit $\mathcal{F}_0' \subset \mathcal{F}_0$.

13.4 Eigenschaften minimaler Cauchy-Filter: Jeder Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist ein minimaler Cauchy-Filter, da er sich nach dem Beweis von 13.3 selbst erzeugt und umgekehrt enthält jeder minimale Cauchy-Filter mit einer Filtermenge F auch ihren offenen Kern $\mathring{F}$. Die Basis $\mathcal{B}$ eines Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ ist auch eine Basis für den zugehörigen minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{F}_0$.

13.5 Satz: Ein uniformer Raum X ist schon dann vollständig, wenn für jeden Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf einer dichten Teilmenge $A \subset X$ der Bildfilter $i(\mathcal{F})$unter der kanonischn Injektion $i : A \to X$ gegen ein $x \in X$ konvergiert.

Beweis: Alle Elemente $F \in \mathcal{F}_0$ des zu $\mathcal{F}$ gehörenden minimalen Cauchy-Filters $\mathcal{F}_0$ haben nach dem Beweis zu 13.2 einen nichtleeren Kern $\mathring{F} \in \mathcal{F}_0$, welcher die in X dichte Menge A trifft. Der nach 6.11 existierende Spurfilter $\mathcal{F}_0 \cap A$ ist wieder ein Cauchy-Filter und nach Voraussetzung konvergiert der Bildfilter $i(\mathcal{F}_0 \cap A)$ gegen ein $x \in X$. Dann aber ist x Berührungspunkt von $\mathcal{F}_0$ und nach 13.1 konvergiert $\mathcal{F}_0$ und damit auch $\mathcal{F}$ gegen x.

13.6 Satz: Wenn A eine dichte Teilmenge des uniformen Raumes $(X;\mathcal{U}_X)$ und $(Y;\mathcal{U}_Y)$ ein vollständiger separierter Raum sind, lässt sich die gleichmäßig stetige Funktion $f : A \to Y$ eindeutig gleichmäßig stetig auf ganz X fortsetzen.

Beweis: Da jede Umgebung eines beliebigen $x \in X$ die Menge A schneidet, ist $i(\mathcal{U}(x)) = \mathcal{U}(x) \cap A$ ein Cauchy-Filter auf A, dessen gleichmäßig stetiges Bild $f(\mathcal{U}(x) \cap A) = (f \circ i)(U(x))$ wieder ein Cauchy-Filter auf Y ist, der n.Vor. gegen ein eindeutig bestimmtes $\overline{f}(x) := \lim (f \circ i)(U(x))$ konvergiert.Dabei ist $i : A \to X$ wie immer die **kanonische Injektion**. $\overline{f}$ ist gleichmäßig stetig, denn für $U \in \mathcal{U}_Y$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}_Y$ mit $V^3 \subset U$ und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $W \in \mathcal{U}_X$ mit $(f \times f)[W \cap (A \times A)] \subset V$. Für $(x;y) \in M$ mit $M^3 \subset W$ existieren dann Nachbarschaften M_x bzw. M_y, welche o.B.d.A. klein sind von der Ordnung M und Punkte $x_A \in M_x(x) \cap A$ bzw. $y_A \in M_y(y) \cap A$ mit $f(x_A) \in f[W_x(x) \cap A] \subset V\left(\overline{f}(x)\right)$ bzw. $f(y_A) \in f[W_y(y) \cap A] \subset V\left(\overline{f}(y)\right)$. Damit folgt $(x_A; y_A) \in M^3 \subset W$, also $(f(x_A); f(y_A)) \in V$ und schließlich $\left(\overline{f}(x); \overline{f}(x)\right) \in V^3 \subset U$. $\overline{f}$ stimmt nach 6.9.3 auf A mit f überein.

13.7 Vervollständigung separierter uniformer Räume: Ein uniformer separierter Raum $(X;\mathcal{U})$ lässt sich mittels $i : X \to \widetilde{X}$ in einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten vollständigen separierten Raum $\left(\widetilde{X};\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ einbetten, so dass sich jede gleichmäßig stetige Funktion $f : X \to \widetilde{Y}$ in einen weiteren **vollständigen** separierten Raum $\widetilde{Y}$ fortsetzen lässt in ein gleichmäßig stetiges $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, so dass $f = \widetilde{f} \circ i$. Die Vervollständigung $\left(\widetilde{X};\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ wird auch **vollständige Hülle** von X genannt.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \widetilde{Y} \\ X \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis: $\widetilde{X}$ sei die Menge aller **minimalen Cauchy-Filter** auf X mit der uniformen Struktur $\widetilde{\mathcal{U}}$, deren Nachbarschaften $\widetilde{V}$ aus allen Paaren $(\mathcal{F};\mathcal{G})$ besteht, welche eine Menge M gemeinsam haben, die klein ist von der Ordnung $V \in \mathcal{U}$, wobei V **symmetrisch** sein soll. Wegen 6.1 stimmen dann $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf allen über M liegenden Mengen überein, so dass ihre etwaigen Limespunkte benachbart von der Ordnung M sein müssen. Mit V sind auch die $\widetilde{V}$ **symmetrisch** und enthalten die **Diagonale**, da jeder Cauchy-Filter eine Menge besitzt, die klein ist von der Ordnung V. Für ein

W mit $W^2 \subset V$ gilt auch $\widetilde{W}^2 \subset \widetilde{V}$, denn für $(\mathcal{F};\mathcal{G}),(\mathcal{G};\mathcal{H}) \in \widetilde{W}$ gibt es $M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ und $N \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ mit $M, N \subset V \times V$, so dass $M \cup N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ und $M \cup N \subset V^2 \times V^2$. Für zwei Nachbarschaften $\widetilde{V}$ und $\widetilde{W}$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset V \cap W$ und nach Definition von $\widetilde{\mathcal{U}}$ ist dann auch $\widetilde{U} \subset \widetilde{V} \cap \widetilde{W}$.

$\widetilde{X}$ ist **separiert**, denn falls $(\mathcal{F};\mathcal{G}) \in \widetilde{V}$ für alle $V \in \mathcal{U}$, so wird durch die Mengen $M \cup N$ mit $M \in \mathcal{F}$ und $N \in \mathcal{G}$ wieder ein Cauchy-Filter erzeugt, der sowohl in $\mathcal{F}$ als auch in $\mathcal{G}$ liegt und wegen der Minimalität von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

$i : X \to \widetilde{X}$ mit $i(x) := \mathcal{U}(x) \in \widetilde{X}$ ist wegen 13.1 **wohldefiniert** und außerdem **injektiv**, denn $i(x) = i(y) \Rightarrow U(x) = U(y) \Rightarrow x = y$, da Y separiert ist.i ist **gleichmäßig stetig**, denn für jedes $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ gibt es ein symmetrisches $W \in \mathcal{U}$ mit $W^3 \subset V$ und für $(x;y) \in W$ ist $(W(x) \cap W(y) \in \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{U}(y)$ klein von der Ordnung W^3, d.h. $(i(x);i(y)) \in \widetilde{V}$. **Die Menge $i[X]$ aller Umgebungsfilter ist dicht in der Menge $\widetilde{X}$ der minimalen Cauchy-Filter**, denn für $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$ und jede Umgebung $\widetilde{V}(\mathcal{F})$ gibt es ein wegen 13.4 o.b.d.A. offenes $U \in \mathcal{F}$ klein von der Ordnung V, d.h. $i(x) = U(x) \in \widetilde{V}(\mathcal{F})$ für alle $x \in U \in \mathcal{F}$. Das bedeutet aber auch $i[U] \subset \widetilde{V}(\mathcal{F})$ und da es für jedes $\widetilde{V}(\mathcal{F}) \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ ein solches $U \in \mathcal{F}$ gibt, konvergiert das Bild $i(\mathcal{F})$ eines minimalen Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ immer gegen den Punkt $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$.

$\widetilde{X}$ ist **vollständig**, denn für einen Cauchy-Filter $\mathcal{G}$ auf $\widetilde{X}$ ist wegen $(i \times i)^{-1}\left[\widetilde{V}\right] \subset V \forall V \in \mathcal{U}$ das Urbild $i^{-1}(\mathcal{G})$ Basis für einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}'$auf X, der wiederum einen minimalen Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ enthält. Das gleichmäßig stetige Bild $i(\mathcal{F})$ ist wieder ein Cauchy-Filter, der gegen den Punkt $\mathcal{F} \in \widetilde{X}$ konvergiert. Wegen 11.2 gilt $i^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} = i(i^{-1}\mathcal{G}) \subset i(\mathcal{F})$ und wegen $\mathcal{U}(\mathcal{F}) \subset i(\mathcal{F})$ ist $\mathcal{F}$ auch Berührungspunkt von $\mathcal{G}$ und da $\mathcal{G}$ Cauchy-Filter ist, konvergiert er gegen $\mathcal{F}$. (In [3, Satz 12.16 (iii)] wird gezeigt, dass umgekehrt $i(\mathcal{F}) \subset \mathcal{G}$ und da $i(\mathcal{F})$ gegen $\mathcal{F}$ konvergiert, gilt dies auch für den feineren Filter $\mathcal{G}$. Tatsächlich erzeugt $i(\mathcal{F})$ also wieder $\mathcal{G}$!)

Für ein gleichmäßig stetiges $f : X \to \widetilde{Y}$ in einen vollständigen, separierten Raum $\widetilde{Y}$ ist $\widetilde{f_0} : i(X) \to \widetilde{Y}$ mit $\widetilde{f_0}(x) := \lim f(\mathcal{U}(x))$wegen der Vollständigkeit von $\widetilde{Y}$ und der gleichmäßigen Stetigkeit von f wohldefiniert. Es gilt $f = \widetilde{f_0} \circ i$ und $\widetilde{f_o}$ ist gleichmäßig stetig, denn für eine Nachbarschaft $\widetilde{U}$ in $\widetilde{Y}$ gibt es eine symmetrische Nachbarschaft V in X mit $(x;y) \in V \Rightarrow (f(x);f(y)) \in \widetilde{U}$, so dass $(i(x);i(y)) \in \widetilde{V} \Rightarrow (x;y) \in V \Rightarrow (f(x);f(y)) = \left(\widetilde{f_0}(i(x));\widetilde{f_0}(i(y))\right) \in \widetilde{U}$. $\widetilde{f_0}$ ist durch die Bedingung $f = \widetilde{f_0} \circ i$ eindeutig bestimmt und lässt sich nach 13.6 **eindeutig fortsetzen** zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$, für die wieder gilt $f = \widetilde{f} \circ i$.

Sei schließlich $\left(\widetilde{X}';i'\right)$ ein weiteres Paar mit den geforderten Eigenschaften, dann folgt durch Fortsetzung von $i' := f : X \to \widetilde{Y} := \widetilde{X}'$ zu $\widetilde{i}' : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$einerseits $i' = \widetilde{i}' \circ i$ und durch Fortsetzung von $i := f : X \to \widetilde{Y} := \widetilde{X}$ zu $\widetilde{i} : \widetilde{X}' \to \widetilde{X}$ andererseits $i = \widetilde{i} \circ i'$. Durch Einsetzen erhält man einerseits $\widetilde{i}' \circ \widetilde{i} = id_{\widetilde{X}'}$ und andererseits $\widetilde{i} \circ \widetilde{i}' = id_{\widetilde{X}}$, d.h. $\widetilde{X}'$ ist **isomorph** zu $\widetilde{X}$.

13.8 Vervollständigung metrischer Räume: Jeder metrische Raum $(X;d)$ lässt sich dicht in einen vollständigen metrischen Raum $\left(\widetilde{X};\widetilde{d}\right)$ einbetten.

Beweis: $\left(\widetilde{X};\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ sei die vollständige Hülle des durch die Metrik d induzierten uniformen Raumes $(X;\mathcal{U})$ nach Satz 13.7. $i(X) \times i(X)$ liegt dicht in $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ und die **Funktion** $d \circ i^{-1} : i(X) \times i(X) \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, denn für $\epsilon > 0$ und $U_\epsilon = \{(x;y) \in X \times X : d(x;y) < \epsilon\}$ (Achtung: hier wird d als **Metrik** auf X betrachtet!) sowie $\widetilde{U}_\epsilon = \left\{(\mathcal{F};\mathcal{G}) \in \widetilde{X} \times \widetilde{X} : \exists M \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \wedge M \times M \subset U_\epsilon\right\}$ gilt $(d \circ i^{-1} \times d \circ i^{-1})\left[\widetilde{U}_\epsilon^2\right] \subset [0;\epsilon[^2$. Nach 13.6 lässt sich $d \circ i^{-1}$ zu einem gleichmäßig stetigen **Funktion** $\widetilde{d} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ fortsetzen, welche wieder die Bedingungen einer **Metrik** erfüllt. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung sei $\epsilon > 0$ und $U_{\epsilon/3}$ bzw. $\widetilde{U}_{\epsilon/3}$ definiert wie oben. Für $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \widetilde{X}$ gibt es $x, y, z \in X$ mit $(\mathcal{U}(x);\mathcal{F}),(\mathcal{U}(y);\mathcal{G}),(\mathcal{U}(z);\mathcal{H}) \in \widetilde{U}_{\epsilon/3} \subset \widetilde{X} \times \widetilde{X}$, da $i(X) \times i(X)$ dicht liegt in $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$, und $\left(\widetilde{d} \times \widetilde{d}\right)\left[\widetilde{U}^2_{\epsilon/3}\right] \subset [0;\frac{\epsilon}{3}[^2$ wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der **Funktion** $\widetilde{d}$. Wegen $\widetilde{d}(\mathcal{U}(x);\mathcal{U}(y)) = d \circ i^{-1}(\mathcal{U}(x);\mathcal{U}(y)) = d(x;y) \forall x, y \in X$ folgt $\widetilde{d}(\mathcal{F};\mathcal{G}) + \widetilde{d}(\mathcal{G};\mathcal{H}) - \widetilde{d}(\mathcal{F};\mathcal{H}) > \widetilde{d}(\mathcal{U}(x);\mathcal{U}(y)) + \widetilde{d}(\mathcal{U}(y);\mathcal{U}(z)) - \widetilde{d}(\mathcal{U}(x);\mathcal{U}(z)) - \epsilon > d(x;y) + d(y;z) - d(y;z) - \epsilon > -\epsilon$ und da diese Abschätzung für jedes $\epsilon > 0$ gilt, ist die Dreiecksungleichung damit erfüllt. Die Nachweise für anderen beiden Bedingungen verlaufen analog.

Der nach 11.6 durch die **abgeschlossenen** Mengen $\widetilde{U}_{\widetilde{d\epsilon}} = \left\{(\mathcal{F};\mathcal{G}) \in \widetilde{X} \times \widetilde{X} : \tilde{d}(\mathcal{F};\mathcal{G}) \leq \epsilon\right\}$ auf $\widetilde{X}$ erzeugte Nachbarschaftsfilter $\widetilde{\mathcal{U}}_{\tilde{d}}$ ist identisch mit $\widetilde{\mathcal{U}}$, denn mit $M = U_\epsilon(x) \cap U_\epsilon(y)$ erhält man $\widetilde{U}_{\widetilde{d\epsilon}} = \overline{\widetilde{U}_{\widetilde{d\epsilon}} \cap (X \times X)} = \overline{\{(U(x);U(y)) \in i(X) \times i(X) : (x;y) \in U_\epsilon\}} = \overline{\widetilde{U}_\epsilon \cap (X \times X)} = \widetilde{U}_\epsilon \in \widetilde{\mathcal{U}}$.

13.9 Vollständige metrische Räume: In einem metrischen Raum $(X;d)$ definiert man den **Durchmesser** einer Teilmenge $A \subset X$ als $\delta(A) := \sup\{d(x;y); x,y \in A\}$. Die folgenden Aussagen für $(X;d)$ sind äquivalent:

1. X ist vollständig.
2. Der Durchschnitt einer absteigenden Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht leerer, abgeschlossener Teilmengen $A_{n+1} \subset A_n \subset X \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\inf \delta(A_n) = 0$ besteht aus genau einem Punkt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x\}$ mit $x \in X$.
3. Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.: Die A_n bilden wegen $\inf \delta(A_n) = 0$ die Basis für einen Cauchy-Filter, der nach Voraussetzung und wegen 7.2 gegen genau einen Punkt konvergiert.

2. $\Rightarrow$ 3.: Die Abschlüsse der Schwänze $A_n = \overline{\bigcup_{m\geq n}\{x_n\}}$ erfüllen die Bedingungen aus 2. und der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x\}$ enthält den Limespunkt $x = \lim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. $\Rightarrow$ 1.: Ein Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ besitzt für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $\emptyset \neq F_n \in \mathcal{F}$ mit $\delta(F_n) < \frac{1}{n}$. Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A_n$ ist eine Cauchy-Folge und konvergiert n.Vor gegen ein $x = \lim (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, welches dann aber Berührungspunkt und wegen 13.1 und 7.2 eindeutig bestimmer Limespunkt des ganzen Filters $\mathcal{F}$ ist.

14 Kompaktifizierung

14.1 Präkompakte Räume: Ein uniformer Raum heißt **präkompakt**, wenn zu jeder Nachbarschaft V von X eine endliche Überdeckung von X existiert, deren Mengen alle klein sind von der Ordnung V. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt präkompakt, wenn der uniforme Unterraum A präkompakt ist. Präkompakte metrische Räume heißen auch **totalbeschränkt**.

14.2 Separierte präkompakte Räume: Für einen separierten Raum X sind äquivalent:

1. X ist präkompakt.
2. Die vollständige Hülle $\widetilde{X}$ ist kompakt.
3. Jeder Ultrafilter auf X ist ein Cauchy-Filter.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2. : Für einen Ultrafilter $\widetilde{\mathcal{F}}$ und eine nach 11.6 o.B.d.A. abgeschlossene Nachbarschaft $\widetilde{V}$ auf der vollständigen Hülle $\widetilde{X}$ enthält die Familie $i^{-1}\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ wegen der Injektivität von $i : X \to i[X] \subset \widetilde{X}$ für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A = i^{-1}[i[A]]$ oder $X \setminus A = i^{-1}[i[X] \setminus i[A]] = i^{-1}\left[\widetilde{X} \setminus i[A]\right]$ und ist daher ein Ultrafilter auf X. Nach 14.2 ist $i^{-1}\left(\widetilde{\mathcal{F}}\right)$ ein Cauchy-Filter und enthält eine Menge $i^{-1}\left[\widetilde{F}\right]$ klein von der Ordnung $(i \times i)^{-1}\left[\widetilde{V}\right]$ mit $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Dann ist $i\left[i^{-1}\left[\widetilde{F}\right]\right]$ klein von der Ordnung $\widetilde{V}$ und dies gilt auch für $\widetilde{F} \subset \overline{i\left[i^{-1}\left[\widetilde{F}\right]\right]}$, denn $\widetilde{V}$ ist abgeschlossen und $\overline{i[X]} = \widetilde{X}$. $\widetilde{\mathcal{F}}$ ist also ein Cauchy-Filter und wegen der Vollständigkeit von $\widetilde{X}$ folgt aus 9.2.4 die Behauptung.

2. $\Rightarrow$ 3. : Für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X ist $i(\mathcal{F})$ ein Ultrafilter auf $\widetilde{X}$, denn für jede Menge $\widetilde{A} \subset \widetilde{X}$ ist entweder $i^{-1}\left(\widetilde{A}\right) \in \mathcal{F} \Rightarrow \widetilde{A} = i\left(i^{-1}\left(\widetilde{A}\right)\right) \in i(\mathcal{F})$ oder wegen 6.9 $X \setminus i^{-1}\left(\widetilde{A}\right) \in \mathcal{F} \Rightarrow i\left(X \setminus i^{-1}\left(\widetilde{A}\right)\right) = i(X) \setminus \widetilde{A} \subset \widetilde{X} \setminus \widetilde{A} \in i(\mathcal{F})$. Nach Voraussetzung und wegen 9.2.4 konvergiert $i(\mathcal{F})$und enthält für jede Nachbarschaft $V \subset X \times X$ Filtermenge $\widetilde{F} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ mit $\widetilde{F} \times \widetilde{F} \subset i(V)$ und wieder wegen 6.9 muss es ein $F \in \mathcal{F}$ geben mit $i(F) \subset \widetilde{F}$, also $i(F) \times i(F) \subset i(V) \Rightarrow F \times F \subset V$. $\mathcal{F}$ ist daher ein Cauchy-Filter.

3. $\Rightarrow$ 1. : Falls es für eine Nachbarschaft V keine endliche Überdeckung von X mit A_i klein von der Ordnung V gibt, bilden die Mengen $X \setminus \bigcup_{i \in L} A_i$ mit endlichen Indexmengen L und A_i klein von der Ordnung V eine Basis für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$, der alle $X \setminus A_i$ und daher keins der A_i enthält. $\mathcal{F}$ enthält also keine Menge, die klein ist von der Ordnung V und ist daher auch kein CauchyFilter.

14.3 Satz: Ein separierter Raum ist genau dann kompakt, wenn er präkompakt und vollständig ist.

Beweis: Folgt direkt aus 9.2.4, 14.2 und 13.2.

14.4 Satz: Ein kompakter Raum X hat einen eindeutig bestimmten Nachbarschaftsfilter, der aus allen Umgebungen der Diagonalen Δ in $X \times X$ besteht.

Beweis: X ist nach 9.4 regulär, nach 14.2 vollständig und nach 12.6 uniformisierbar. Sei $V \in \mathcal{U}$ eine Nachbarschaft von X und $W^2 \subset V$, dann gilt $\Delta \subset \bigcup_{x \in X} W(x) \times W(x) \subset V$ und $\bigcup_{x \in X} W(x) \times W(x)$ ist offen in $X \times X$, d.h., V ist Umgebung von Δ in $X \times X$. Angenommen, es gibt eine Umgebung V von Δ, die nicht zu $\mathcal{U}$ gehört, dann bilden die Mengen $\{U \cap (X \times X \setminus V) : U \in \mathcal{U}\}$ eine Basis für einen Filter $\mathcal{F}$, der feiner als $\mathcal{U}$ ist. Da mit X wegen 9.9 auch $X \times X$ kompakt ist, besitzen wegen 9.2.3 $\mathcal{F}$ und damit auch $\mathcal{U}$ einen Berührungspunkt $(x, y) \notin \Delta$ im Widerspruch zu 11.6.

14.5 Totalbeschränkte Räume: Für einen metrischen Raum $(X; d)$ sind äquivalent:

1. X ist totalbeschränkt.
2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine endliche Überdeckung $(U_k)_{1 \le k \le n}$von X mit $\delta(U_k) \le \epsilon$.
3. Jede Folge besitzt eine Cauchy-Teilfolge.

Beweis:

1. $\Rightarrow$ 2.: In einem metrischen Raum ist eine Menge A genau dann klein von der Ordnung ϵ, wenn ihr Durchmesser $\delta(A) \le \epsilon$ ist.

2. $\Rightarrow$ 3.: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es mindestens eine Menge U_k jeder endlichen Übdeckung aus Mengen, die klein sind von der Ordnung $\frac{1}{k}$, welche unendlich viele Glieder einer gegebenen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält. Wähle o.B.d.A. $n_0 := 0$, $n_1 := 1$ und $V_1 := U_1$ so, dass sie unendlich viele Folgenglieder x_n mit $n \ge 1$ enthält. Sind $x_{n1}; ...; x_{nk}$ und $V_1; ...; V_k$ schon bestimmt, so wähle ein U_{k+1} so, dass in $V_{k+1} := U_{k+1} \cap V_k$unendlich viele Folgenglieder x_n mit $n \ge n_k$ liegen, und $n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_{k+1} \setminus \{x_{n1}; ...; x_{nk}\}\}$ und erhält damit eine Cauchy-Teilfolge $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{nk} \in V_{k0}$ für $k > k_0$ und $V_{k+1} \subset V_k$ sowie $\delta(V_k) = \frac{1}{k}$.

3. $\Rightarrow$ 1.: Angenommen, es gibt ein $\epsilon > 0$, so dass keine endliche Vereinigung von Mengen klein von der Ordnung ϵ die Menge X überdeckt. Dann wähle ein beliebiges $x_0 \in X$ und $U_0 := B_\epsilon(x_0)$. Für $k = n + 1$ seien x_k und U_k für $1 \le k \le n$ schon definiert. Mit $x_{n+1} \in \overline{U}_n \setminus U_n$ und $U_{n+1} := U \cup B_\epsilon(x_{n+1})$ wird dann eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert mit $d(x_n; x_k) \ge \epsilon$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k < n$. Insbesondere hat diese Folge keine Cauchy-Teilfolge im Widerspruch zu 3.

14.6 Stone-Čech-Kompaktifizierung vollständig regulärer Räume: Jeder vollständig reguläre Raum X kann in einen bis auf Homöomorphie eindeutigen kompakten Raum $\hat{X}$ eingebettet werden, so das jede stetige Funktion $f : X \to Y$ in einen kompakten Raum Y eindeutig stetig fortgesetzt werden kann zu $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ mit $f = \hat{f} \circ e$, wobei $e : X \to \hat{X}$ die Einbettung ist.

Beweis: (Vgl. 7.9) Für jedes $\varphi : X \to \mathbb{R}$ aus der Menge $C^*(X)$ der stetigen, **beschränkten** reellen Funktionen auf X liegt das Bild $f[X]$ in einem minimalen **abgeschlossenen** Intervall $I_\varphi \subset \mathbb{R}$. Die gesuchte Einbettung ist dann $e : X \to \prod_{\varphi \in C^*(X)} I_\varphi$ mit $e(x) := (\varphi(x))_{\varphi \in C^*(X)}$ und die Kompaktifizierung ist $\hat{X} := \overline{e[X]}$. Nach 9.9 ist $\hat{X}$ **kompakt**. e ist **injektiv**, denn für $x \neq y$ gibt es wegen der vollständigen Regularität von X ein $\varphi \in C^*(X)$ mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ und damit $e(x) \neq e(y)$. e ist aufgrund der Stetigkeit der Komponenten $p_\varphi \circ e : X \to I_\varphi$ mit $(p_\varphi \circ e)(x) = \varphi(x)$ und wegen 4.1 **stetig**. e ist **offen**, denn die Urbilder $p_\varphi^{-1}[U] = \varphi^{-1}[U]$ mit U offen in I_φ bilden nach 7.8.2 eine Basis der Topologie auf X und ihre Bilder $e\left[p_\varphi^{-1}[U]\right] = e[X] \cap p_\varphi^{-1}[U]$ sind offen in $\hat{X}$.

Sei nun Y kompakt und $f : X \to Y$ stetig und $a : Y \to \prod_{\psi \in C^*(Y)} I_\psi$ mit $a(y) := (\psi(y))_{\psi \in C^*(Y)}$ sowie $\hat{Y} = a[Y] = \overline{a[Y]}$ die entsprechende Einbettung. Dann definiert man zunächst $F : \prod_{\varphi \in C^*(X)} I_\varphi \to \prod_{\psi \in C^*(Y)} I_\psi$ durch $F(e(x)) := a(f(x))$ bzw. $(p_\psi \circ F)\left((t_\varphi)_{\varphi \in C^*(X)}\right) := t_{\psi \circ f}$. Die $\psi \in C^*(Y)$ werden also als $\varphi = \psi \circ f \in C^*(X)$ identifiziert, so dass die φ-te Koordinate t_φ von $\prod_{\varphi \in C^*(X)} I_\varphi$ der ψ-ten Koordinate t_ψ von $a[Y] \subset \prod_{\psi \in C^*(Y)} I_\psi$ zugewiesen werden kann. F ist **stetig**, denn $F^{-1}\left[p_\psi^{-1}[U_\psi]\right] = (p_\psi \circ F)^{-1}[U_\psi] = p_{\psi \circ f}^{-1}[U_{\psi \circ f}]$ ist offen in $\prod_{\varphi \in C^*(X)} I_\varphi$. Aufgrund der Stetigkit von F und wegen $F(e(x)) = a(f(x))$ gilt auch $F\left[\hat{X}\right] = F\left[\overline{e[X]}\right] \subset \overline{F[e[X]]} \subset \overline{a[f[X]]} \subset \overline{a[Y]} = \hat{Y}$.

$$
\begin{tikzcd}
\prod_{\varphi \in C^*(X)} I_\varphi \arrow[r, "F"] & \prod_{\psi \in C^*(Y)} I_\psi \\
\cup & \cup \\
\hat{X} \arrow[r, "\hat{f}"] & \hat{Y} \\
X \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}
$$

Die gewünschte stetige Fortsetzung ist dann $\hat{f} := a^{-1} \circ F|_{\hat{X}}$ mit $\left(\hat{f} \circ e\right)(x) = \left(a^{-1} \circ F|_{\hat{X}} \circ e\right)(x) = \left(a^{-1} \circ a \circ f\right)(x) = f(x)$. $F|_{e[X]} = a \circ f \circ e^{-1}$ bzw. $\hat{f}|_X = f \circ e^{-1}$ sind durch $F|_{e[X]} \circ e = a \circ f$ bzw. $f = \hat{f}|_X \circ e$ schon eindeutig festgelegt und wegen 7.13 sind auch die stetigen Fortsetzungen F bzw. $\hat{f}$ eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit der Kompaktifizierung $\hat{X} := \overline{e[X]}$ ergibt sich analog zum Beweis von 13.7 durch zweifache Anwendung der Fortsetzungseigenschaft auf die alternative Einbettung $f := e' : X \to \hat{X}'$.

14.7 Beispiele: Um die stetige Fortsetzbarkeit zu ermöglichen, benötigt die Stone-Čech-Kompaktifizierung in der Regel wesentlich mehr zusätzliche Punkte als die **Alexandroff-Kompaktifizierung** gemäß 10.4. Offensichtlich ist $\widetilde{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, aber man kann zeigen, dass $|\hat{\mathbb{N}}| = \left|[0;1]^{[0;1]}\right|$. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung kann aber auch aus nur einem Punkt bestehen: Auf der Menge ω der **Ordinalzahlen** (vgl. [4, 11.1]) mit der **Ordnungstopologie**, welche von den offenen Intervallen $]a;b[$mit $a \subsetneq b \in \omega$ erzeugt wird, sei $\aleph_0 = \mathbb{N}$ die kleinste unendliche Ordinalzahl $\aleph_0 = \mathbb{N}$ und $\aleph_1$ ist die kleinste **überabzählbare** Ordinalzahl. Jede Ordinalzahl $x \in \omega$ lässt sich als Intervall $x = [\emptyset; x[$ schreiben. (vgl.[4, Satz 11.3]) Man kann zeigen, dass die Stone-Čech-Kompaktifizierung der Menge der abzählbaren Ordinalzahlen $\aleph_1 = [\emptyset; \aleph_1[$ gerade durch Hinzunahme von $\aleph_1$ selbst gewonnen wird: $\widehat{\aleph_1} = \aleph_1 \cup \{\aleph_1\}$.

15 Kompakte Konvergenz

15.1 Gleichmäßigen Konvergenz: Auf der Menge $F(X;Y)$ der Funktionen $f : X \to Y$ von einer Menge X auf einen uniformen Raum $(Y;\mathcal{U})$ ist $\mathcal{W}(\mathcal{U})$ der von den endlichen Durchschnitten der Mengen $W(U) := \{(f;g) \in F(X;Y) \times F(X;Y) : (f(x);g(x)) \in U\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$ erzeugte **Nachbarschaftsfilter der gleichmäßigen Konvergenz**. Die durch $\mathcal{W}(\mathcal{U})$ definierte uniforme Struktur wird mit $F_\mathcal{U}(X;Y)$ bezeichnet. Entsprechend bilden die endlichen Durchschnitte der Mengen $W(U)(f) := \{g \in F(X;Y) : g(x) \in U(f(x))\}$ eine Basis der **induzierten Topologie der gleichmäßigen Konvergenz**.

15.2 Beispiele: Für einen **metrischen Raum** $(Y;d)$ bilden die Nachbarschaften $W\left(U_{1/n}\right)$ (vgl. 11.3) eine **abzählbare Basis** für $\mathcal{W}(\mathcal{U})$. $\mathcal{W}(\mathcal{U})$ lässt sich auch direkt auf $F(X;Y)$ durch die **Halbmetrik** $D(f;g) := \sup\{d(f(x);g(x)) : x \in X\}$ erzeugen, denn $f,g \in W\left(U_{1/n}\right) \Leftrightarrow D(f;g) < \frac{1}{n}$. Ist X außerdem **kompakt**, so ist nach 9.8 auch das **stetige** Bild $f[X]$ kompakt und insbesondere **beschränkt**

bezüglich der Metrik d auf Y, so dass D auf dem Unterraum $C_{\mathcal{U}}(X;Y)$ der **stetigen Funktionen** $f : X \to Y$ sogar eine **Metrik** ist. Nach 11.10 sind die Elemente aus $C_{\mathcal{U}}(X;Y)$ für kompakte X sogar **gelchmäßig** stetig.

15.3 Satz: $C_{\mathcal{U}}(X;Y)$ ist **abgeschlossen** in $F_{\mathcal{U}}(X;Y)$. Insbesondere ist der Limespunkt jedes gleichmäßig konvergenten Filters von stetigen Funktionen wieder stetig.

Beweis: Für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X ist die Menge $A_{\mathcal{F}}$ aller $f \in F_{\mathcal{U}}(X;Y)$, für die $f(\mathcal{F})$ ein Cauchy-Filter ist, abgeschlossen in $F_{\mathcal{U}}(X;Y)$: Für jeden Berührungspunkt g von $A_{\mathcal{F}}$ und $V^3 \subset U \in \mathcal{U}$ gibt es nämlich ein $f \in A_{\mathcal{F}}$ mit $f(x) \times g(x) \in V \forall x \in X$ und eine Filtermenge $F \in \mathcal{F}$ mit $f[F] \times f[F] \subset V$, so dass $g[F] \times g[F] \subset V^3 \subset U$, d.h. auch $g(\mathcal{F})$ ist ein Cauchy-Filter und damit $g \in A_{\mathcal{F}}$. Nach 6.9.2 gilt $\bigcap_{x \in X} A_{\mathcal{U}(x)} = C_{\mathcal{U}}(X;Y)$ und mit den Mengen $A_{\mathcal{U}(x)}$ ist auch ihr Durchschnitt abgeschlossen in $F_{\mathcal{U}}(X;Y)$.

15.4 Satz: Mit Y ist auch $F_{\mathcal{U}}(X;Y)$ vollständig.

Beweis: Für einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}$ auf $F_{\mathcal{U}}(X;Y)$ und jedes $x \in X$ bilden die Mengen $F(x) := \{g(x) : g \in F\}$für $F \in \mathcal{F}$ einen Cauchy-Filter $\mathcal{F}(x)$ auf Y, der n.Vor **gleichmäßig** gegen ein $f(x) := y \in Y$ konvergiert. Die so definierte Funktion $f : X \to Y$ ist der Limespunkt von $\mathcal{F}$, denn für jede Nachbarschaft $U \in \mathcal{U}$ gibt es ein $F \in \mathcal{F}$ mit $F(x) \subset U(f(x))\ \forall x \in X$, d.h. $F \subset W(U)(f) \in \mathcal{F}$.

15.5 Gleichmäßige $\mathcal{S}$-Konvergenz: Für ein Teilmengensystem $\mathcal{S} \subset P(X)$ sei $\mathcal{W}(\mathcal{S};\mathcal{U})$ der **initiale Nachbarschaftsfilter** auf der uniformen Struktur $F_{\mathcal{S}}(X;Y)$ bezüglich der Projektionen $p_S : F(X;Y) \to F_{\mathcal{U}}(S;Y)$ mit $p_S(f) := f|_S$. $\mathcal{W}(\mathcal{S};\mathcal{U})$ wird von den endlichen Durchschnitten der Mengen $W(S;U) := (p_S \times p_S)^{-1}[W(U)] = \{(f;g) \in F(X;Y) \times F(X;Y) : (f(x);g(x)) \in U\, \forall x \in S\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und $S \in \mathcal{S}$ gemäß 11.11 erzeugt und heißt **Nachbarschaftsfilter der gleichmäßigen $\mathcal{S}$-Konvergenz**. Die **induzierte Topologie der $\mathcal{S}$-Konvergenz** wird von den endlichen Durchschnitten der Mengen $p_S^{-1}[U(f)] = \{g \in F(X;Y) : g(x) \in U(f(x))\ \forall x \in S\}$ erzeugt. Für $S_1 \subset S_2$ gilt $W(S_1;U) \supset W(S_2;U)$ aber für $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ gilt $\mathcal{W}(\mathcal{S}_1;\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}(\mathcal{S}_2;\mathcal{U})$**.**

15.6 Beispiele:

1. Für die Menge $\mathcal{S} = \mathcal{E}$ der **endlichen** Teilmengen auf X erhält man den Nachbarschaftsfilter $\mathcal{W}(\mathcal{E};\mathcal{U})$ **der punktweisen Konvergenz,** der mit dem durch die Mengen $W(\{x\};U) := (p_x \times p_x)^{-1}[U]$ erzeugten **Produktfilter** auf $\prod_{x \in X} Y = Y^X$ übereinstimmt. Ein Filter konvergiert auf $F_{\mathcal{E}}(X;Y)$ genau dann, wenn alle Komponenten $p_x(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ **punktweise** konvergieren.
2. Besitzt auch X eine Topologie, so erhält man für die Menge $\mathcal{S} = \mathcal{K}$ der **kompakten** Teilmengen auf X den Nachbarschaftsfilter $\mathcal{W}(\mathcal{K};\mathcal{U})$ **der kompakten Konvergenz.** Ein Filter konvergiert auf $F_{\mathcal{K}}(X;Y)$ genau dann, wenn er auf jeder **kompakten** Teilmenge von X **gleichmäßig** konvergiert. Der Unterraum $C_{\mathcal{K}}(X;Y) \subset F_{\mathcal{K}}(X;Y)$ enthält die auf kompakten Teilmengen **stetigen F**unktionen, die nach 11.10 dann sogar **gleichmäßig stetig** sind.
3. Für $\mathcal{S}$=$\{X\}$ ergibt sich der Nachbarschaftsfilter $\mathcal{W}(\mathcal{U})$ **der gleichmäßigen Konvergenz auf ganz** X.
4. Wegen einerseits $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ und andererseits $W(X;U) \subset W(K;U)\, \forall U \in \mathcal{U}, K \in \mathcal{K}$ gilt nach 15.5 $\mathcal{W}(\mathcal{E};\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}(\mathcal{K};\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}(\mathcal{U})$.
5. Wegen 4. sind die Projektionen $p_x : F(X;Y) \to Y$ mit $p_x(f) := f(x)$ nicht nur auf $\mathcal{W}(\mathcal{E};\mathcal{U})$ gleichmäßig stetig, sondern auch für $\mathcal{W}(\mathcal{K};\mathcal{U})$ und $\mathcal{W}(\mathcal{U})$. Für eine Menge $A \subset F(X;Y)$ gilt daher nach 3.5 $\overline{A}(x) = p_x\left[\overline{A}\right] \subset \overline{p_x[A]} = \overline{A(x)}$.

15.7 Eigenschaften: Sei X eine Menge und Y ein uniformer Raum.

1. Ist Y **separiert** und $\mathcal{S}$ eine **Überdeckung** von X, so ist $F_{\mathcal{S}}(X;Y)$ **separiert**, denn für $f \neq g \in F_{\mathcal{S}}(X;Y)$ gibt es ein $x \in S \subset \mathcal{S}$ mit $f(x) \neq g(x)$ und nach Voraussetzung $U, V \in \mathcal{U}_Y$ mit $U((f(x)) \cap V(g(x)) = \emptyset$und damit $W(S;U)(f) \cap W(S;V)(g) = \emptyset$.

2. Ist $\mathcal{S}$ eine Familie von Teilmengen, deren **Innere** schon X **überdecken**, so ist $C(X;Y)$ **abgeschlossen** in $F_{\mathcal{S}}(X;Y)$, denn nach 15.3 sind alle $C_{\mathcal{U}}(S;Y)$ abgeschlossen in $F_{\mathcal{U}}(S;Y)$ und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Projektionen $p_S : F(X;Y) \to F_{\mathcal{U}}(S;Y)$ gilt dies auch für $C(X;Y) = \bigcap_{S\in\mathcal{S}} p_S^{-1}\left[C_{\mathcal{U}}(S;Y)\right]$. Die Gleichheit ist durch die Überdeckungseigenschaft von $\mathcal{S}$ und 4.3.3 begründet.
3. Ist Y **vollständig**, so überträgt sich dies nach 15.4 auf $F_{\mathcal{U}}(S;Y)$ und wegen 6.10 bzw. 13.2.3 auch auf $F_{\mathcal{S}}(X;Y)$.
4. Ist Y ein $\mathbf{T}_k$**-Raum** mit $k = 1;2;3$ oder 3a, dann ist wegen 7.10 auch $F_{\mathcal{E}}(X;Y)$ ein T_k-Raum.
5. Ist Y **metrisierbar** und X **lokalkompakt** sowie **abzählbar im Unendlichen**, so sind wegen 10.5; 12.4 und 15.7.1 auch $F_{\mathcal{K}}(X;Y)$ und $C_{\mathcal{K}}(X;Y)$ **metrisierbar.** Sind $K_n \subset X$ für $n \in \mathbb{N}$ kompakt mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$ und $d_n(f;g) := \sup\{d(f(x);g(x)) : x \in K_n\}$ mit der Metrik d auf Y, so ist durch $D(f;g) := \sum_{n\in N} \min\{2^{-n}; d_n(f;g)\}$ eine Metrik für $F_{\mathcal{K}}(X;Y)$ definiert. Die Dreiecksungleichung ergibt sich aus $D(f;g)+D(g;h) = \sum_{n\in N} \min\{2^{-n}; d_n(f;g)\} + \min\{2^{-n}; d_n(f;g)\} \geq \sum_{n\in N} \min\{2^{-n}; d_n(f;g) + d_n(g;h)\} \geq \sum_{n\in N} \min\{2^{-n}; d_n(f;h)\} = D(f;h)$.

15.8 Kompakt-offene Topologie: Für einen topologischen Raum X und einen uniformen Raum Y bilden die Mengen $(K;O) := \{f : X \to Y : f \text{ stetig mit } f[K] \subset O\}$für **kompakte** $K \subset X$ und **offene** $O \subset Y$ eine **Subbasis** für die **kompakt-offene Topologie** auf der Menge $C(X;Y)$ der stetigen Funktionen $f : X \to Y$. Sie stimmt mit der Topologie der kompakten Konvergenz auf dem Unterraum $C_{\mathcal{K}}(X;Y) \subset F_{\mathcal{K}}(X;Y)$ gemäß 15.6.2 überein.

Beweis:

Für ein beliebiges $(K;O)$ und $f \in (K;O)$ existiert zu jedem $y \in f[K]$ eine Umgebung $V_y(y) \subset O$ und da $f[K]$nach 9.8 wieder quasikompakt ist, gibt es ein endliches $E \subset f[K]$ mit $f[K] \subset \bigcup_{y\in E} U_y(y)$ und $U_y^2 \subset V_y$. Für $U := \bigcap_{y\in E} U_y$ gilt außerdem $U(f[K]) \subset O$, so dass für $g \in W(K;U)(f)$ mit $f[K] \times g[K] \subset U$ auch $g[K] \subset U(f[K]) \subset O$ folgt, also $g \in (K;O)$. Damit ist gezeigt, dass $W(K;U)(f) \subset (K;O)$.

Umgekehrt gibt es für ein beliebiges $W(K;U)(f)$ ein abgeschlossenes und symmetrisches $V^3 \subset U$ und wegen der Kompaktheit von $f[K]$ ein endliches $E \subset f[K]$ mit $f[K] \subset \bigcup_{i\in E} V(f(x_i))$. Dann sind die Mengen $K_i := K \cap f^{-1}(V(f(x_i)))$wegen 3.1 bzw. 9.4 wieder kompakt und überdecken K. Die Mengen $O_i := V^2(\mathring{f}(x_i))$ sind offen. Für $g \in \bigcap_{i\in E}(K_i;O_i)$ und $x \in K$ gibt es dann ein $i \in E$ mit $x \in K_i$, so dass $g(x) \in V^2(\mathring{f}(x_i))$ und da außerdem $f(x) \in V(f(x_i))$, folgt $(f(x);g(x)) \in V^3$und damit $\bigcap_{i\in E}(K_i;O_i) \subset W(K;U)(f)$.

15.9 Algebren stetiger Funktionen: Die Menge $C(X;\mathbb{C})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X bildet bezüglich der Addition und der $\mathbb{C}$-Mulitplikation einen **Vektorraum** über $\mathbb{C}$ und bezüglich der Multiplikation zweier Funktionen zusätzlich einen **Ring**. Er bildet damit eine **Algebra** und die Bezeichnungen **Untervektorraum**, **Unterring** oder **Unteralgebra** beziehen sich auf die algebraische Angeschlossenheit bezüglich der entsprechenden Verknüpfungen. Eine Teilmenge $D \subset C(X;\mathbb{C})$ erzeugt mittels aller möglichen **Linearkombinationen** einen Untervektorraum und durch alle möglichen **Polynome** ohne konstantes Glied eine Unteralgebra $A(D) \subset C(X;\mathbb{C})$.

15.10 Gleichmäßige Näherung der Betragsfunktion durch reelle Polynome:

1. Die durch$p_0(t) := 0$ und $p_{n+1}(t) := p_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n^2(t)\right)$ definierten Polynome $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergieren auf $[0;1]$ gleichmäßig gegen $f(t) = \sqrt{t}$, denn für $t \in [0;1]$gilt zunächst $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right) \cdot (1) \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + p_n(t)\right)$ und durch Induktion nach n weiter $0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \leq \frac{2}{n}$ und damit die gleichmäßige Konvergenz.
2. Die durch $q_n(t) := a \cdot p_n\left(\frac{t^2}{a^2}\right)$ definierten Polynome $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergieren auf $[-a;a]$ gleichmäßig gegen $h(t) = |t|$, denn für $t \in [-a;a]$ gilt $||t| - q_n(t)| = \left|a\sqrt{\frac{t^2}{a^2}} - q_n(t)\right| \leq \frac{2a\sqrt{\frac{t^2}{a^2}}}{2+n\sqrt{\frac{t^2}{a^2}}} \leq \frac{2a}{n}$.

15.11 Algebren stetiger Funktionen auf kompakten Räumen:

1. Der **Abschluss** $\overline{A}$ einer Unteralgebra $A \subset C(X;\mathbb{C})$ **stetiger komplexwertiger** Funktionen auf einem **kompakten** Raum X ist wieder eine Unteralgebra, denn für $f, g \in \overline{A}$ gibt es in jeder ϵ-Umgebung $f_\epsilon, g_\epsilon \in A$, so dass $|\|\alpha \cdot f\| - \|\alpha \cdot f_\epsilon\|| \leq |\alpha| \cdot \|f - f_\epsilon\| \leq |\alpha| \epsilon \Rightarrow \alpha \cdot f \in \overline{A}$; $|\|f+g\| - \|f_\epsilon + g_\epsilon\|| \leq \|f - f_\epsilon + g - g_\epsilon\| \leq 2\epsilon \Rightarrow f+g \in \overline{A}$ und schließlich $|\|f \cdot g\| - \|f_\epsilon \cdot g_\epsilon\|| \leq |\|g\| \cdot \|f - f_\epsilon\| + \|f_\epsilon\| \cdot \|g - g_\epsilon\|| \leq \|g\| \cdot \epsilon + (\|f\| + \epsilon) \cdot \epsilon \Rightarrow f \cdot g \in \overline{A}$, da f und g wegen 9.8 bzw. 9.10 auf X beschränkt sind.

2. Der **Abschluss** $\overline{A}$ einer Unteralgebra $A \subset C(X;\mathbb{R})$ **stetiger reellwertiger** Funktionen auf einem **kompakten** Raum X enthält mit f und g auch $|f|$, $\max\{f;g\} = \frac{1}{2}((f+g) + |f-g|)$ und $\min\{f;g\} = \frac{1}{2}((f+g) + |f-g|)$, denn mit $a := \|f\|$ lässt sich 15.10.2 anwenden, d.h. es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom p_ϵ ohne konstantes Glied mit $\||f(x)| - p_\epsilon(f(x))\| < \epsilon$ und, da mit 1. gilt $p_\epsilon(f(x)) \in \overline{A}$, ergibt sich die Behauptung.

15.12 Satz von Stone-Weierstrass: Die von einer Teilmenge $D \subset C(X;\mathbb{C})$ **stetiger komplexwertiger** Funktionen auf einem **kompakten** Raum X erzeugte Unteralgebra $A(D)$ ist **dicht** in $C(X;\mathbb{C})$,wenn D die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. D enthält eine **konstante Funktion** $k \neq 0$.
2. D **trennt Punkte** in X: $\forall y, z \in X \; \exists g \in D : \; g(y) \neq g(z)$
3. D enthält für jedes $f \in D$ auch die **komplex konjugierte** Funktion $\overline{f}$.

Beweis: Mit Hilfe von Bedingung 3. und wegen $\overline{g+h} = \overline{g} + \overline{h}$ bzw. $\overline{g \cdot h} = \overline{g} \cdot \overline{h}$ lässt sich $A(D)$ in einen Realteil $ReA(D) := \left\{\frac{1}{2}\left(h + \overline{h}\right) : h \in A(D)\right\} \subset A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ und einen Imaginärteil $ImA(D) := \left\{\frac{1}{2}\left(h - \overline{h}\right) : h \in A(D)\right\} \subset A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ aufspalten. Für ein gegebenes $f \in C(X;\mathbb{C})$ ist $Ref \in C(X;\mathbb{R})$ und es existiert zu $y, z \in X$ ein $h_{yz} := \frac{Ref(y)(g-g(z)) - Ref(z)(g-g(y))}{g(y)-g(z)} \in A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ mit $h_{yz}(y) = Ref(y)$ und $h_{yz}(z) = Ref(z)$, wobei $g \in A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ je nach Lage der Trennung entweder der Real- oder der Imaginärteil der Trennfunktion für x und y aus Bedingung 2. ist. Für jedes $z \in X$ überdecken die Umgebungen $U_{z\epsilon}(y) := (h_{yz} - Ref)^{-1}]-\infty; \epsilon[$ schon für endliche viele $y \in K \subset X$ die kompakte Menge X und nach 15.11.2 ist $h_{z\epsilon} := \max\{h_{yz} : \; y \in K\} \in A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ mit $h_{z\epsilon}(x) - Ref(x) < \epsilon \forall x \in X$. Die Umgebungen $U_\epsilon(z) := (h_{z\epsilon} - Ref)^{-1}]-\epsilon; \infty[$ überdecken ebenfalls für endliche viele $z \in L \subset X$ die Menge X und wieder nach 15.11.2 ist $Reh_\epsilon := \max\{h_{z\epsilon} : \; z \in L\} \in A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ mit $\|Reh_\epsilon - Ref\| < \epsilon$. Analog findet man ein $Imh_\epsilon \in A(D) \cap C(X;\mathbb{R})$ mit $\|Imh_\epsilon - Imf\| < \epsilon$ und für $h_\epsilon := Reh_\epsilon + iImh_\epsilon \in A(D)$ gilt $\|h_\epsilon - f\| < \sqrt{2}\epsilon$.

15.14 Bemerkung: Der Satz von Stone-Weierstrass lässt sich auch für **lokalkompakte** Räume formulieren, die **abzählbar im Unendlichen** sind, aber da 15.10 dann nicht mhr vorausgesetzt werden kann, muss die wesentlich stärkere Bedingung 15.11.2 direkt gefordert werden: $A(D)$ muss für jedes $f \in A(D)$ auch ihren **Betrag** $|f|$ enthalten. Außerdem muss man sich natürlich auf die **kompakte Konvergenz** anstelle der gleichmäßigen Konvergent beschränken.

16 Gleichgradige Stetigkeit

16.1 Gleichgradige Stetigkeit: Für einen topologischen Raum X und einen uniformen Raum Y heißt eine Teilmenge H$\subset F(X;Y)$ **gleichgradig stetig** in $x \in X$, wenn es für jede Nachbarschaft U in Y eine Umgebung $V(x)$ von x gibt, so dass $f[V(x)] \subset U(f(x)) \forall f \in H$. Ist H in jedem $x \in X$ gleichgradig stetig, so heißt H **gleichgradig stetig**. Ist X ein uniformer Raum und V unabhängig von x, so spricht man von gleichmäßig gleichgradiger Stetigkeit.

16.2 Beispiele:

1. Für zwei metrische Räume $(X;d)$ und $(Y;d')$ sowie $k, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ sind die **Lipschitz-stetigen** Funktionen $H_{k;\alpha} := \{f : X \to Y : d'(f(x); f(y)) \leq k \cdot d(x;y)^\alpha \; \forall x, y \in X\}$ gleichgradig stetig, da $f[V_\delta(x)] \subset U_\epsilon(f(x)) \forall f \in H \wedge \epsilon > 0$ mit $\delta = \left(\frac{\epsilon}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

2. Für $a < b$ und $k \in \mathbb{R}_+^*$ ist $H_k := \{f : [a;b] \to \mathbb{R} : |f'(x)| \leq k \, \forall x \in [a;b]\}$ gleichgradig stetig, da $f\left[V_\delta(x)\right] \subset U_\epsilon\left(f(x)\right) \forall f \in H \wedge \epsilon > 0$ mit $\delta = \frac{\epsilon}{k}$.
3. Die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = n$ ist gleichmäßig gleichgradig stetig, aber nirgendwo beschränkt, obwohl alle f_n beschränkt sind.
4. Die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{n} \\ n^3\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{für } \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1} \\ \frac{n^2}{n-1} & \text{für } \frac{1}{n-1} < x \end{cases}$ ist gleichgradig stetig und alle f_n sind gleichmäßig stetig sowie beschränkt, aber die Familie ist nicht gleichmäßig gleichgradig stetig und auch nicht beschränkt außer in $x = 0$. (Gegenbeispiel zu [3, Aufgabe 14.11]!)
5. Die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : [0;1] \to [-1;1]$ mit $f_n(x) = \cos(nx)$ ist nicht gleichgradig stetig, aber gleichmäßig beschränkt und alle f_n sind gleichmäßig stetig.

16.3 Satz: Für einen topologischen Raum X und einen uniformen Raum Y ist $H \subset F(X;Y)$ genau dann gleichgradig stetig in $x_0 \in X$, wenn der **Abschluss** $\overline{H}$ von H in $F_{\mathcal{E}}(X;Y)$ gleichgradig stetig in x_0 ist.

Beweis: Es ist nur $\Rightarrow$ zu zeigen. Für eine Nachbarschaft U in Y gibt es n.Vor. eine Nachbarschaft $U'^3 \subset U$ und eine Umgebung $V(x_0)$ von x_0 mit $f\left[V\left(x_0\right)\right] \subset U'\left(f(x_0)\right) \forall f \in H$. Für $g \in \overline{H}$ und jedes $x \in V\left(x_0\right)$ findet man ein $f \in H \cap W\left(\{x_0;x\};U'\right)(g) \neq \emptyset$ mit $\left(f\left(x_0\right);g\left(x_0\right)\right) \in U'$ und $\left(f\left(x\right);g\left(x\right)\right) \in U'$. Da außerdem gilt $\left(f\left(x_0\right);f\left(x\right)\right) \in U'$, folgt $\left(g\left(x_0\right);g\left(x\right)\right) \in U'^3$, d.h. $g\left[V\left(x_0\right)\right] \subset U'^3\left(g(x_0)\right)$.

16.4 Satz: Für einen topologischen Raum X und einen uniformen Raum Y stimmen die Nachbarschaftsfilter der **kompakten** und der **einfachen** Konvergenz auf jeder **gleichgradig stetigen Teilmenge** $H \subset C(X;Y)$ überein.

Beweis: Wegen 16.2.4 ist nur zu zeigen, dass $C_{\mathcal{K}}(X;Y) \subset C_{\mathcal{E}}(X;Y)$. Für jede Nachbarschaft $W\left(K;U\right)$ seien $U'^3 \subset U$ eine Nachbarschaft in Y und $\left(V\left(x_i\right)\right)_{1\leq i\leq n}$ endliche viele Umgebungen in X mit $f\left[V\left(x_i\right)\right] \subset U'\left(f\left(x_i\right)\right) \forall f \in H$ sowie $K \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} V_i$. Für ein beliebiges $f \in W\left(E;U'\right)$ mit $E := \{x_1;\ldots;x_n\}$ und $x, y \in K$ gibt es dann $x_i, x_j \in E$ mit $x \in V\left(x_i\right)$ bzw. $y \in V\left(x_j\right)$, so dass $\left(f\left(x_i\right);f(x)\right) \in U'$ bzw. $\left(f\left(x_j\right);f(y)\right) \in U'$. Wegen $f \in W\left(E;U'\right)$ gilt auch $\left(f\left(x_i\right);f(x_j)\right) \in U'$ und damit $\left(f\left(x\right);f(y)\right) \in U'^3 \subset U$, also $W\left(E;V\right) \subset W\left(K;U\right)$ bzw. $\mathcal{W}\left(\mathcal{E};\mathcal{U}\right) \supset \mathcal{W}\left(\mathcal{K};\mathcal{U}\right)$.

16.5 Satz: Für einen topologischen Raum X und einen uniformen Raum Y stimmen die Abschlüsse $\overline{H}$ jeder **gleichgradig stetigen Teilmenge** $H \subset C(X;Y)$ bezüglich $C_{\mathcal{K}}\left(X;Y\right)$ und $F_{\mathcal{E}}\left(X;Y\right)$ überein.

Beweis: Wegen 16.2.4 gilt $\overline{H}_{\mathcal{E}} \supset \overline{H}_{\mathcal{K}}$ für die Abschlüsse beliebiger Mengen $H \subset F\left(X;Y\right)$ bezüglich $\mathcal{W}\left(\mathcal{E};\mathcal{U}\right) \subset \mathcal{W}\left(\mathcal{K};\mathcal{U}\right)$. Nach 16.3 ist der Abschluss$\overline{H}_{\mathcal{E}}$ in $F_{\mathcal{E}}\left(X;Y\right)$ gleichgradig stetig und damit insbesondere$\overline{H}_{\mathcal{K}} \subset \overline{H}_{\mathcal{E}} \subset C(X;Y)$, so dass 16.4 auf $\overline{H}_{\mathcal{E}}$ angewandt werden kann, woraus die Behauptung folgt.

16.6 Satz von Ascoli: Für einen **lokalkompakten** Raum X und einen **separierten** Raum Y ist der Abschluss $\overline{H}$ einer Familie $H \subset C\left(X;Y\right)$ genau dann **kompakt** in $C_{\mathcal{K}}\left(X;Y\right)$, wenn H **gleichgradig stetig** und $\overline{H(x)}$ für jedes $x \in X$ **kompakt** in Y ist.

Beweis:

$\Rightarrow$: Wegen 16.2.5 ist $\overline{H(x)}$ relativ kompakt in Y. Zum Nachweis der gleichgradigen Stetigkeit sei U eine Nachbarschaft in Y, U' symmetrisch mit $U'^3 \subset U$ und $x_0 \in X$. Für eine kompakte Umgebung K von x_0 gibt es n. Vor endlich viele $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ mit $H \subset \overline{H} \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} W\left(K;U'\right)(f_i)$. Wegen der Stetigkeit der f_i gibt es Umgebungen $V_i \subset K$ von x_0 mit $f_i\left[V_i\left(x_0\right)\right] \subset U'\left(f_i\left(x_0\right)\right)$. Für $x \in V\left(x_0\right) \subset K$ mit $V := \bigcap_{1\leq i\leq n} V_i$ und $f \in H$ gibt es dann ein j mit $\left(f_j\left(x_0\right);f_j(x)\right) \in U'$, $\left(f\left(x\right);f_j\left(x\right)\right) \in U'$, $\left(f\left(x_0\right);f_j\left(x_0\right)\right) \in U'$, und damit $\left(f\left(x\right);f(x_0)\right) \in U'^3$, d.h., $f\left[V\left(x_0\right)\right] \subset U'^3\left(f(x_0)\right) \subset U\left(f(x_0)\right)$.

$\Leftarrow$: Für gleichgradiges stetiges $H \subset C(X;Y)$ stimmen nach 15.12 die Nachbarschaftsfilter der **kompakten** und der **einfachen** Konvergenz überein, so dass H gemäß 15.6.1 als Teilmenge des Produktraumes $Y^X = \prod_{x\in X} Y$ betrachtet werden kann mit $H \subset \overline{H} \subset \prod_{x\in X} \overline{H}(x) \subset \prod_{x\in X} \overline{H(x)}$, wobei die letzte Inklusion wegen 16.2.5 gilt. Da die Komponenten $\overline{H(x)}$ nach Voraussetzung kompakt sind, gilt dies nach 9.9 auch für ihr Produkt sowie nach 9.4 für die abgeschlossene Teilmenge $\overline{H}$.

16.7 Beispiele:

1. Ist Y **metrisierbar** und X **lokalkompakt** sowie **abzählbar im Unendlichen**, so ist nach 15.7.5 auch $C_{\mathcal{K}}(X;Y)$ **metrisierbar** und nach 10.10 fallen die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt sowohl auf Y als auch auf $C_{\mathcal{K}}(X;Y)$ zusammen. Man erhält die **klassische Formulierung des Satzes von Ascoli**: Jede Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer Familie $H \subset C(X;Y)$ stetiger Funktionen hat genau dann eine auf kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergente Teilfolge, wenn H gleichgradig stetig ist und die Folgen $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ auf Y für jedes $x \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzen.

2. Eine abgeschlossene Teilmenge $H \subset C_K([a;b];\mathbb{R})$ist genau dann kompakt bzw. folgenkompakt, wenn sie gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt ist.

3. **Satz von Dini:** Konvergiert eine **monoton wachsende** Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X;\mathbb{R})$ reeller stetiger Funktionen auf einem beliebigen topologischen Raum X **punktweise** gegen ein $f \subset C(X;\mathbb{R})$, so konvergiert sie auch **gleichmäßig auf kompakten** Teilmengen von X.

4. Für ein offenes $G \subset \mathbb{C}$ heißt $H \subset C(G;\mathbb{C})$ **normale Familie**, wenn ihr Abschluss $\overline{H}$ kompakt bzw. folgenkompakt in $C_{\mathcal{K}}(G;\mathbb{C})$ ist. Nach 16.7 ist das äquivalent zur gleichgradigen Stetigkeit von H und der Kompaktheit aller $\overline{H(x)}$ mit $x \in G$.

Index

Literatur

[1] Bourbaki, Nicolas: Topologie générale, Hermann 1961

[2] Kelley, John: General topology, Springer 1955

[3] von Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer 1979

[4] http://www.poenitz-net.de/Mathematik/10.Mengenlehre.pdf