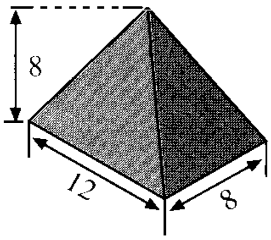
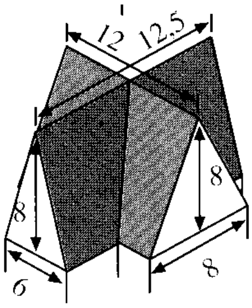
2.10. Prüfungsaufgaben zu Körperberechnungen

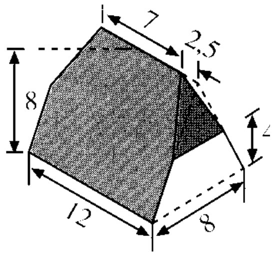
Pyramiden
Berechne die Fläche und das Volumen der unten abgebildeten Dächer::



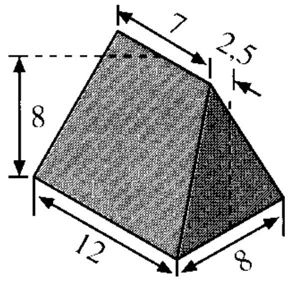
Zeltdach



Walmdach



Krüppelwalmdach



Gekreuztes Giebeldach

Lösungen
Zeltdach: O = 187 m^2 und V = 256 m^3.
Walmdach: O = 237 m^2 und V = 331 m^3.
Krüppelwalmdach: O = 211 m^2 und V = 371 m^3.
Gekreuztes Giebeldach: O = 306 m^2 und V = 556 m^3

Quader (2)
Welches Volumen hat ein Würfel, wenn seine Raumdiagonale 10 cm lang ist?

Lösung:

Raumdiagonale $d = \sqrt{3}\,a \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{3}}$ cm $\Rightarrow V = \frac{1000}{3\sqrt{3}} \approx 192$ cm^3.

Quader (2)
Ein Würfel hat die Oberfläche O = 1350 cm^2. Berechne das Volumen und die Raumdiagonale des Würfels.

Lösung
a = 15 cm, $V = a^3 = 3375$ cm^3 und $d = \sqrt{3}\,a = 25{,}98$ cm.

Prismen (2)
Eine Marmorsäule hat die Grundfläche eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Seiten 60 cm lang sind. Die Höhe h der Säule ist 2 m. Welches Volumen hat die Säule?

Lösung

$G = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 9353{,}1\ cm^2 = 0{,}94\ m^2 \Rightarrow V = G\cdot h = 1{,}87\ m^3$.

Prismen (3)
Ein symmetrischer Eisenbahndamm der Länge l = 300 m mißt an seiner Sohle s = 21 m, seine Höhe beträgt h = 6 m, die Krone ist k = 5 m breit.
a) Berechne die Querschnittsfläche G. (2)
b) Welche Erdmenge (in m^3) mußte beim Bau aufgeschüttet werden? (1)

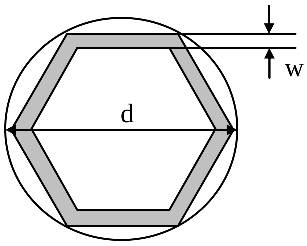
Lösung

a) $G = k\cdot h + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{s-k}{2}\cdot h = \frac{s+k}{2}\cdot h = \underline{78\ m^2}$. (2)

b) $V = G\cdot l = \underline{23\ 400\ m^3}$. (1)

Prismen (6)

Ein Aluminiumprofil ($\rho = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}$) hat einen sechseckigen Querschnitt mit der Wanddicke w = 3 mm und dem Durchmesser d = 16 mm. Wieviel g wiegt 1 m dieses Profils?



Lösung

Der Flächeninhalt des äußeren Sechseckes ist $G_a = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\, r^2 \approx 166{,}3\ mm^2$ (1)

Der Flächeninhalt des inneren Sechseckes ist $G_i = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\,(r - w)^2 \approx 65{,}0\ mm^2$ (1)

Die Querschnittsfläche ist als $Q = G_a - G_i = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\,[r^2 - (r - w)^2] = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot w\cdot(2r - w) \approx \underline{1{,}01\ cm^2}$. (1)

Das Volumen des Prismas ist dann $V = G\cdot h \approx 1{,}01\ cm^3\cdot 100\ cm = \underline{101\ cm^3}$ (1)

Das Gewicht des Profils ist $m = \rho\cdot V \approx 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}\cdot 101\ cm^3 = \underline{273{,}5\ g}$ (1)

Das Gewicht des Profils ist $m = \rho\cdot V \approx 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}\cdot 101\ cm^3 = \underline{273{,}5\ g}$ (1)

Pyramiden (4)

Ein Tetraeder ist eine Pyramide, die aus vier gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Berechne die Seitenhöhe h_S und die Höhe h eines Tetraeders mit der Seitenlänge s = 6 cm.

Lösung

$h_S^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_S = \frac{\sqrt{3}}{2}\, s = \sqrt{3}\cdot 3\ cm$ (2)

$h^2 + \left(\frac{h_S}{3}\right)^2 = h_S^2 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, h_S = \sqrt{\frac{2}{3}}\, s = \sqrt{6}\cdot 2\ cm.$ (2)

Pyramiden (8)

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt 12,25 m^2, die Höhe 2,5 m.

a) In dem Zelt schlafen zwei Personen. Wieviel m^3 Raum steht dann pro Person zur Verfügung? (2)
b) Wieviel m^2 Zeltbahn waren zur Herstellung des Zeltes (ohne Boden) nötig? (3)
c) Die Seitenkanten und der untere Rand sind mit einem Spezialband verstärkt. Wieviel m dieses Bandes wurden verarbeitet? (3)

Lösung

Gegeben: $G = 12{,}25\ m^2$ und $h = 2{,}5\ m$

a) Gesucht: $V = \frac{G\cdot h}{3} = 10{,}2\ m^3$ entspricht $5{,}1\ m^3$ pro Person. (2)

b) Gesucht: $M = 4\cdot\frac{h_a\cdot a}{2} = 21{,}4\ m^2$. (1)

NR: $G = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{G} = 3{,}5\ m$ (1)

$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3{,}1\ m$ (1)

c) Gesucht: Seitenkanten s: $s^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3{,}5$ m (1)

unterer Rand a = 3,5 m (1)

$\Rightarrow$ gesamte Kantenlänge = $4 \cdot a + 4 \cdot s = 28$ m. (1)

Pyramiden (8)

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt 20,25 m^2, die Höhe 3,5 m.

a) In dem Zelt schlafen drei Personen. Wieviel m^3 Raum steht dann pro Person zur Verfügung? (2)
b) Wieviel m^2 Zeltbahn waren zur Herstellung des Zeltes (ohne Boden) nötig? (3)
c) Die Seitenkanten und der untere Rand sind mit einem Spezialband verstärkt. Wieviel m dieses Bandes wurden verarbeitet? (3)

Lösung

Gegeben: G = 20,25 m^2 und h = 3,5 m

a) Gesucht: $V = \frac{G \cdot h}{3} = 23{,}6\ m^3$ entspricht 7,8 m^3 pro Person. (2)

b) Gesucht: $M = 4 \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} = 37{,}4\ m^2$. (1)

NR: $G = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{G} = 4{,}5$ m (1)

$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4{,}2$ m (1)

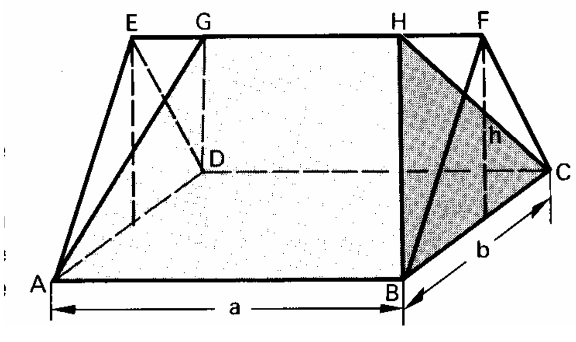
c) Gesucht: Seitenkanten s: $s^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4{,}7$ m (1)

unterer Rand a = 4,5 m (1)

$\Rightarrow$ gesamte Kantenlänge = $4 \cdot a + 4 \cdot s = 36{,}9$ m. (1)

Pyramiden (3)

Ein dreiseitiges gerades Prisma ABCDEF hat die Form eines **Satteldachs** (siehe Zeichnung). Die beiden Grundflächen des Prismas heißen **Dachgiebel** und sind gleichschenklige Dreiecke mit der Basis b und der Höhe h. Die Seitenkante EF heißt **First** des Satteldachs. Wird der First eines Satteldachs beiderseits um eine gleichlange Strecke verkürzt, so entsteht ein so genanntes **Walmdach**. Wie ändert sich der überdachte Raum beim Übergang von Sattel- zum Walmdach für a = 10 m, b = 6 m und h = 3 m, wenn der First beiderseits um 2 m verkürzt wird?



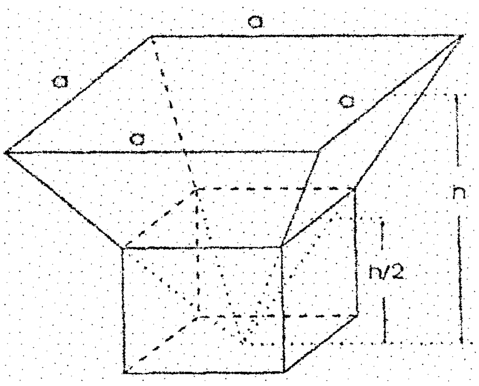
Lösung

Die Grundfläche des Prismas ist $G = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = 9\ m^2$ und sein Volumen demnach $V_S = G \cdot h = 90\ m^2$. (1)

Die beiden abgeschnittenen Pyramiden haben ebenfalls die Grundfläche G = 9 m^2 und die Höhe h = 2 m, so dass ihr Volumen $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 6\ m^3$ beträgt. (1)

Das umbaute Volumen des Walmdaches ist also $V_S - 2 \cdot V_p = 78\ m^2$. (1)

Pyramiden (12)
Das Schrägbild zeigt den Einfülltrichter einer Getreidemühle.



Der obere Teil gehört zu einer regelmäßigen senkrechten Pyramide mit der Grundseite a und der Höhe h. Diese geht ab der Mitte in einen Quader der Höhe 2 über.

a) Es ist a = 5,0 dm und h = 4,0 dm. Wie groß ist der Rauminhalt des Trichters? (4)
b) Der oben und unten offene Trichter wird aus dünnem Weißblech hergestellt. Wie viel dm^2 Weißblech benötigt man? (5)
c) Für einen Trichter mit 90 Litern Rauminhalt soll h = a gelten. Berechne die Länge der Grundseite a. (3)

Lösung:

a) $V = V_p - V_{p'} + V_Q$ (1)

$= \frac{1}{3} a^2 \cdot h - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}$ (1)

$= \frac{1}{4} a^2 \cdot h$ (1)

$= 25\ dm^3.$ (1)

b) $h_S = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4}}\ dm = 4{,}5\ dm$ (1)

$M = M_P - M_{P'} + M_Q$ (1)

$= 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_S - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_S}{2} + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}$ (1)

$= 45\ dm^2 - 11{,}25\ dm^2 + 20\ dm^2$ (0,5)

$= 53{,}75\ dm^2$ (0,5)

c) $V = \frac{1}{4} a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{360 dm^3} \approx 7{,}1\ dm$ (3)

Pyramiden (6)
Ein Steinmetz fertigt für eine Gartenausstellung aus einem Steinwürfel mit einer Grundfläche von 1,44 m^2 eine senkrechte Pyramide. Würfel und Pyramide haben die gleiche Grundfläche. Die Pyramide ist 1,2 m hoch.

a) Berechne die Kantenlänge des Würfels. (1)
b) Welches Volumen hat die Pyramide? (1)
c) Wieviel Prozent Abfall fallen bei der Bearbeitung des Steinwürfels an? (2)
d) Berechne die Mantelfläche der Pyramide! (2)

Lösung

a) Grundfläche G = $1{,}44 m^2 \Rightarrow$ Kantenlänge a = $\sqrt{G} = 1{,}2$ m (1)

b) Die Pyramide hat das Volumen $V_p = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 0{,}576\ m^3$ (1)

c) $V_w = G \cdot h \Rightarrow$ Rest $V_w - V_p = \frac{2}{3} \cdot G \cdot h$ entspricht 66,6 % (2)

d) Die Pyramide hat die Höhe $h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a \approx 1{,}34$ m (1)

Ihre Mantelfläche ist also $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \approx 3{,}22\ m^2$. (1)

Pyramiden (8)

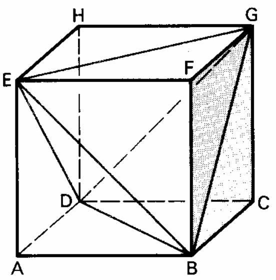
In einen Würfel mit der Kantenlänge a wird ein Tetraeder einbeschrieben (siehe Zeichnung).

a) Berechne die Volumina des Würfels und des Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels. (3)

b) Berechne die Oberflächen des Würfels und des Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels. (3)

c) In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander? (1)

d) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächen zueinander? (1)



Lösung

a) Der Würfel hat das Volumen $V_w = a^3$ (1)

Der Tetraeder hat nach Pythagoras die Kantenlänge s = $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$. (1)

Der Tetraeder hat also das Volumen $V_T = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = \frac{1}{3} a^3$. (1)

b) Das Verhältnis der Volumina ist $V_W : V_T = 3 : 1$ (1)

c) Der Würfel hat die Oberfläche $O_W = 6a^2$ (1)

Die Seitenflächen des Tetraeders sind gleichseitig mit dem Flächeninhalt $G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$. (1)

Der Tetraeder hat also die Oberfläche $O_T = 4G = 2\sqrt{3}\,a^2$ (1)

d) Das Verhältnis der Oberflächen ist $O_W : O_T = 6 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$ (1)

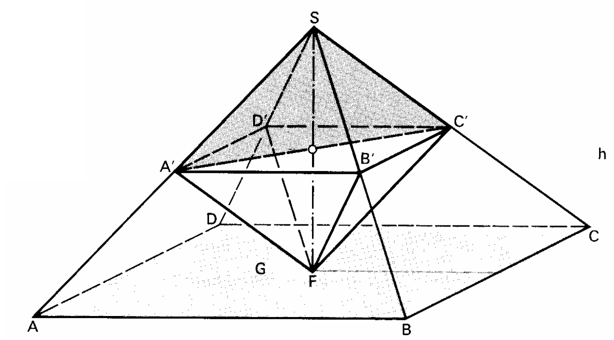
Aufgabe 2: Pyramiden (8)

Eine gerade quadratische Pyramide wird von gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge a begrenzt. Sie wird auf halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten, so dass die Schnittfigur zusammen mit der Spitze S und dem Höhenfußpunkt F ein Oktaeder bilden.

a) Berechne das Volumen der Pyramide und des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a (4)

b) In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander ? (1)

c) Berechne die Oberfläche der Pyramide und des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a (3)



Lösung

a) Die Seitenflächen der Pyramide sind gleichseitig mit den Höhen $h_S = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (1)

Die Pyramide hat also nach Pythagoras die Höhe $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}a.$ (1)

Ihr Volumen ist also $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3\sqrt{2}}a^3$ (1)

Der Oktaeder hat die Kantenlänge $s = \frac{1}{2}a$ und das Volumen $V_O = \frac{\sqrt{2}}{3}s^3 = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$ (1)

b) Das Verhältnis der Volumina ist $V_O : V_P = \frac{\sqrt{2}}{24} : \frac{1}{3\sqrt{2}} = 1 : 4$ (1)

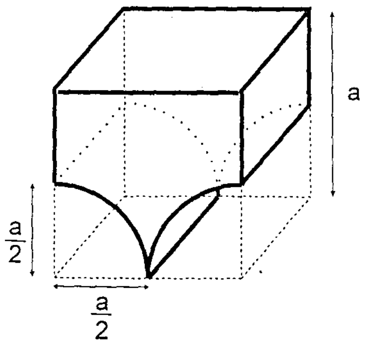
c) Der Oktaeder hat die Oberfläche $O_O = 2\sqrt{3}\,s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (1)

Die Seitenflächen der Pyramide sind gleichseitig mit dem Flächeninhalt $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ (1)

Ihre Oberfläche ist also $O_P = G + 4S = a^2 + \sqrt{3}\,a^2$ (1)

Zylinder (9)

Der abgebildete Körper ist Teil eines Würfels mit der Kantenlänge a = 1 m.



a) Berechne seine Masse (Dichte $\rho = 2{,}5\ g/cm^3$) (3)

b) Der Körper erhält einen Anstrich der Dicke d = 0,1 mm. Reicht dafür eine Dose mit 450 ml Farbe aus? (6)

Lösung:

a) $V = V_W - V_{HZ} = a^3 - \frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4} \cdot a = (1 - \frac{\pi}{8})a^3 \approx 0{,}607\ a^3.$ (2)

Mit a = 1 m ergibt sich die Masse m = ⇧·V = 1,51 t. (1)

b) $O = 4a^2 - \pi\frac{a^2}{4} + \pi\frac{a}{2} \cdot a = 4a^2(4 + \frac{\pi}{4}) \approx 4{,}78m^2$ für a = 1 (3)

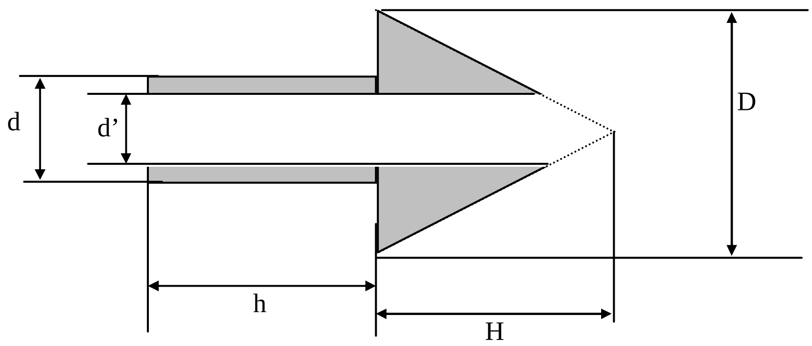
c) Farbvolumen $V = O \cdot d = 4{,}79 \cdot 10^6 mm^2 \cdot 0{,}1mm = 479\,000\ mm^3 = 479\ cm^3 = 479\ ml > 450\ ml$ (2)

$\Rightarrow$ die Dose reicht also nicht aus. (1)

Kegel und Zylinder (19)

Das abgebildete massive Werkstück ist aus einem Zylinder (Durchmesser d = 4 cm, Höhe h = 3 cm) und einem Kegel (Durchmesser D = 6 cm, Höhe H = 4 cm) zusammengesetzt. Die Bohrung hat den Durchmesser d' = 2 cm.

a) Berechne das Volumen des Werkstücks. (6)
b) Bei welchem Bohrlochdurchmesser d' verliert der Kegel gleich viel Material wie der Zylinder? (3)
c) Berechne die Oberfläche des Werkstücks (8)
d) Bei welchem Bohrlochdurchmesser d' hat die Kegelbohrung die gleiche Mantelfläche wie die Zylinderbohrung ? (2)



Lösung

Man rechnet zweckmäßiger mit den Radien $R = \frac{1}{2}D = 3$ cm, $r = \frac{1}{2}d = 2$ cm und $r' = \frac{1}{2}d' = 1$ cm.

a) Der Zylinder hat das Volumen $V_Z = \pi r^2 h = 12\pi\ \text{cm}^3$ (1)

Der Kegel hat das Volumen $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H = 12\pi\ \text{cm}^3$. (1)

Das Volumen der Zylinderbohrung ist $V_{Zb} = \pi r'^2 \cdot h = 3\pi\ \text{cm}^3$ (1)

Die Ausbohrung des Kegels setzt sich zusammen aus

einem Kegel mit dem Volumen $V_{KbK} = \frac{1}{3}\pi r'^2 \cdot H \cdot \frac{r'}{R} = \frac{4}{9}\pi\ \text{cm}^3$ (1)

einem Zylinder mit dem Volumen $V_{KbZ} = \pi r'^2 \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \frac{8}{3}\pi\ \text{cm}^3$ (1)

Das Volumen des Werkstückes ist $V = V_Z + V_K - V_{Zb} - V_{KbK} - V_{KbZ} = 17\frac{8}{9}\pi\ \text{cm}^3$ (1)

b) $V_{Zb} = V_{KbK} + V_{KbZ} \Leftrightarrow \pi r'^2 \cdot h = \pi r'^2 \cdot H \cdot \frac{r'}{R} + \pi r'^2 \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \pi r'^2 \cdot H \cdot (1 - \frac{2}{3}\frac{r'}{R})$ (2)

$\Leftrightarrow h = H \cdot (1 - \frac{2}{3}\frac{r'}{R}) \Leftrightarrow r' = \frac{3}{2}(1 - \frac{h}{H}) \cdot R = 1{,}125$ cm $\Rightarrow d' = 2r' = 2{,}25$ cm (1)

c) Der Kegel hat die Seitenlänge $S = \sqrt{H^2 + R^2} = 5$ cm (1)
Seine Mantelfläche ist $M_K = \pi RS = 15\pi\ \text{cm}^2$ (1)
Der Zylinder hat die Mantelfläche $M_Z = 2\pi rh = 12\pi\ \text{cm}^2$ (1)
Die Zylinderbohrung hat die Mantelfläche $M_{Zb} = 2\pi r'h = 6\pi\ \text{cm}^2$ (1)
Die Ausbohrung des Kegels setzt sich zusammen aus

einem Kegel mit der Mantelfläche $M_{KbK} = \pi r' \cdot S \cdot \frac{r'}{R} = \frac{5}{3}\pi\ \text{cm}^2$ (1)

einem Zylinder mit der Mantelfläche $M_{KbZ} = 2\pi r' \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \frac{16}{3}\pi\ \text{cm}^2$ (1)

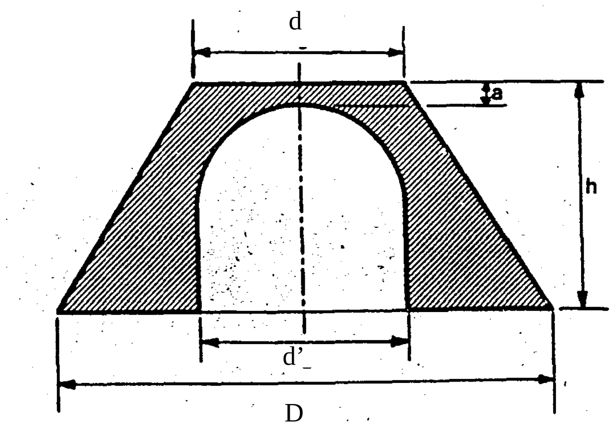
Die Grundfläche des Werkstückes ist $G = \pi R^2 - \pi r'^2 = 8\pi\ \text{cm}^2$ (1)
Die Oberfläche des Werkstückes ist $O = M_Z + M_K + M_{Zb} + M_{KbK} + M_{KbZ} + G = 48\pi\ \text{cm}^2$ (1)

d) $M_{Zb} = M_{KbZ} \Leftrightarrow 2\pi r' \cdot h = 2\pi r' \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R})$ (1)

$\Leftrightarrow h = H \cdot (1 - \frac{r'}{R}) \Leftrightarrow r' = (1 - \frac{h}{H}) \cdot R = 0{,}75$ cm $\Rightarrow d' = 1{,}5$ cm (1)

Zylinder, Kegel und Kugeln (18)

Ein Werkstück besteht aus einem Kegelstumpf mit den Maßen D = 10 cm, h = 6 cm und d = 5 cm, in den ein Loch mit halbkugelförmigem Abschluß gebohrt wurde. Es hat den Durchmesser d’ = 4 cm und endet im Abstand a = 1 cm von der Oberfläche.



a) Berechne das Volumen des Werkstückes. (6)

b) Bei welchem Bohrdurchmesser d’ hat der ausgebohrte Zylinder das gleiche Volumen wie die ausgebohrte Halbkugel ? (2)

c) Berechne die Oberfläche des Werkstückes (8)

d) Bei welchem Bohrdurchmesser d’ hat der ausgebohrte Zylinder die gleiche Mantelfläche wie die ausgebohrte Halbkugel ? (2)

Lösung

Man rechnet zweckmäßiger mit den Radien $R = \frac{1}{2}D = 6$ cm, $r = \frac{1}{2}d = 2{,}5$ cm und $r' = \frac{1}{2}d' = 2$ cm.

a) Der Kegelstumpf entsteht aus einem großen Kegel mit der Höhe H = 12 cm und dem Radius R = 5 cm durch Entfernen eines kleinen Kegels mit der Höhe h = 6 cm und dem Radius r = 2,5 cm.

Der große Kegel hat das Volumen $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 100\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der kleine Kegel hat das Volumen $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12{,}5\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der Kegelstumpf hat das Volumen $V_{KS} = V_K - V_k = 87{,}5\,\pi\text{ cm}^3$. (1)

Die ausgebohrte Halbkugel hat das Volumen $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r'^3 = 5\frac{1}{3}\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der ausgebohrte Zylinder hat das Volumen $V_Z = \pi r'^2 \cdot h_z = 12\,\pi\text{ cm}^3$. (1)

Das Werkstück hat also das Volumen $V_{KS} - V_{HK} - V_Z = 67\frac{1}{6}\,\pi\text{ cm}^3$. (1)

b) $V_{HK} = V_Z \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r'^3 = \pi r'^2 \cdot h_z \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r'^3 = \pi r'^2 \cdot (5 - r') \Leftrightarrow \frac{2}{3}r' = 5 - r' \Leftrightarrow r' = 3\text{ cm} \Rightarrow d' = 6\text{ cm}$. (2)

c) Der Kegelstumpf entsteht aus einem großen Kegel mit der Höhe H = 12 cm und dem Radius R = 5 cm durch Entfernen eines kleinen Kegels mit der Höhe h = 6 cm und dem Radius r = 2,5 cm.

Der große Kegel hat die Seitenhöhe $S = \sqrt{H^2 + R^2} = 13$ cm (1)

Der große Kegel hat die Mantelfläche $M_K = \pi RS = 65\,\pi\text{ cm}^2$ (1)

Der kleine Kegel hat die Seitenhöhe $s = \frac{1}{2}S$ und die Mantelfläche $M_k = \pi rs = 16{,}25\,\pi\text{ cm}^2$ (1)

Der Kegelstumpf hat die Mantelfläche $M_{KS} = M_K - M_k = 48{,}75\,\pi\text{ cm}^2$. (1)

Die ausgebohrte Halbkugel hat die Oberfläche $O_{HK} = 2\pi r'^2 = 8\,\pi\text{ cm}^2$ (1)

Der ausgebohrte Zylinder hat die Mantelfläche $M_Z = 2\pi r' \cdot h_z = 12\,\pi\text{ cm}^2$. (1)

Die Grundfläche ist $G = \pi R^2 - \pi r'^2 = 21\,\pi\text{ cm}^2$ (1)

Das Werkstück hat also die Oberfläche $O = M_{KS} + O_{HK} + M_Z + G = 89{,}75\pi\text{ cm}^2$. (1)

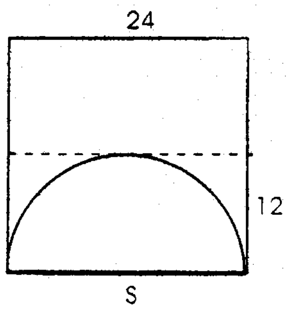
d) $O_{HK} = M_Z \Leftrightarrow 2\pi r'^2 = \pi r' \cdot h_z = 2\pi r' \cdot (5 - r') \Leftrightarrow r' = 5 - r' \Leftrightarrow r' = 2{,}5\text{ cm} \Rightarrow d' = 5\text{ cm}$. (2)

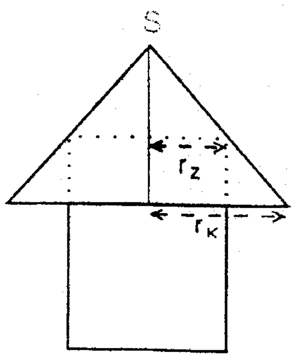
Zylinder und Kegel

a) Ein Bastler schneidet ein Quadrat der Seitenlänge 24 cm in zwei gleich große Rechtecke (siehe links). Das obere Rechteck biegt er zum Mantel eines 12 cm hohen Kreiszylinders zusammen. Zeige, dass der Zylinderradius $r_Z \approx 3{,}82$ cm ist. Berechne das Zylindervolumen.

b) Aus dem unteren Rechteck schneidet er den abgebildeten Halbkreis aus und biegt ihn zum Mantel eines Kreiskegels zusammen. (siehe rechts) Zeige, dass sein Grundkreis den Radius $r_K = 6$ cm hat. Berechne das Volumen des Kegels.

c) Der Kegel wird nun mit der Spitze nach oben über den Zylinder gestülpt. Welche Gesamthöhe hat der entstandene Körper?



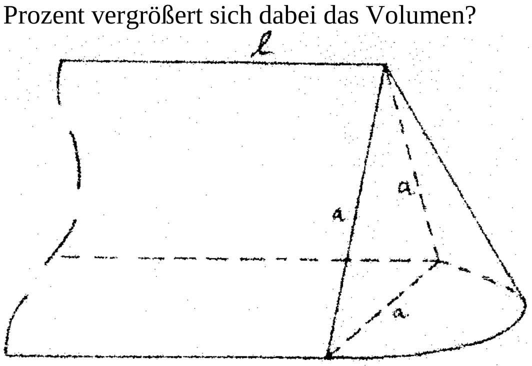


Prismen und Kegel

Ein senkrechtes Prisma P besitzt als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 6,0 cm. Die Höhe des Prismas ist l = 4a.

a) Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas.

b) An beiden Dreiecksflächen des Prismas werden Kegelhälften angesetzt. Dadurch entsteht ein neuer Körper (vgl. Skizze). Um wie viel Prozent vergrößert sich dabei das Volumen?



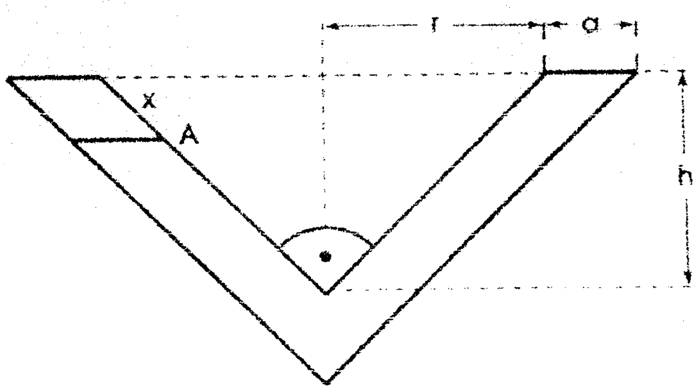
Kegel

Eine Brunnenschale aus Marmor besteht aus einem Hohlkegel. Dabei sind Radius r und Höhe h gleich groß (siehe den skizzierten Querschnitt). Der Rand hat überall die Breite a = 3 cm.

a) Wie groß müsste der Radius r sein, damit das Fassungsvermögen der Schale bis zum oberen Rand 16 Liter beträgt?

b) Es sei nun r = 25,0 cm angenommen. Welche Masse hat die Brunnenschale, wenn 1 cm^3 Marmor die Masse 2,6 g besitzt? Wie groß ist die gesamte Oberfläche der Schale?

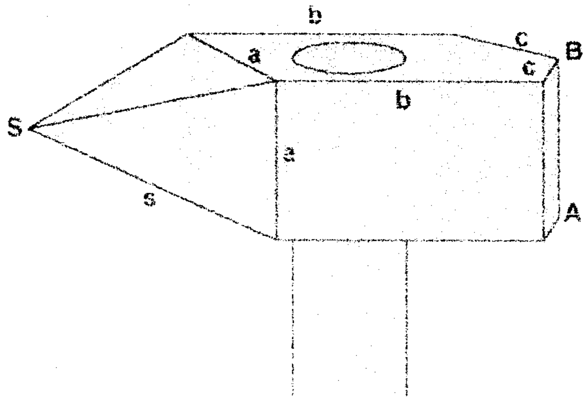
c) Es sei wieder r = 25,0 cm. Wenn die Brunnenschale zu 80 % ihres Volumens gefüllt ist, soll das weiter zufließende Wasser durch ein im Rand angebrachtes (dünnes) Abflussrohr abfließen können? In welcher Entfernung x vom oberen Rand muss das Abflussrohr angebracht werden?



Pyramiden und Prismen

Das Schrägbild zeigt einen Steinmetzhammer. Der Hammerkopf hat die Form eines Quaders, bei dem auf der einen Seite eine regelmäßige senkrechte Pyramide, auf der anderen ein dreiseitiges Prisma angesetzt ist. Die zylindrische Bohrung im Quader für den Stiel hat den Durchmesser d = 2,5 cm. Die in der Figur benannten Kanten haben die Längen a = 5,1 cm, b = 8,3 cm, c = 3,3 cm und s = 7,2 cm. Die Spitze der Pyramide ist S, die Mitte der Kante AB ist M.

a) Berechne die Länge SM des Hammerkopfes.
b) Berechne die Masse des Hammerkopfes, wenn er aus Stahl mit der Dichte ⇧ = 7,8 g/cm^3 besteht.

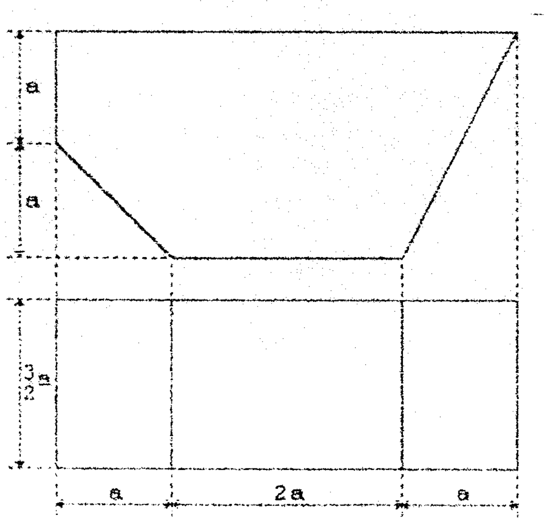


Zylinder und Kegel

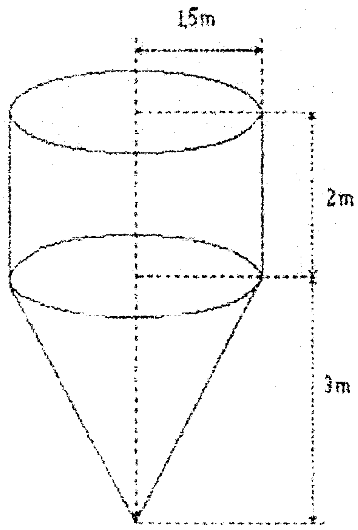
Die Skizze 1 zeigt den Aufriss und den Grundriss eines Transportcontainers, der oben offen ist.

a) Berechne das Fassungsvermögen des beschriebenen Containers für a = 1,5 m.
b) In den Container werden 10 m^3 Sand eingeladen und zu einer Baustelle gebracht. Dort wird der Sand in ein bereitstehendes leeres Silo (Skizze 2) eingefüllt. Das Silo besteht aus einem senkrechter. Kreiskegel und einem daran. angesetzten Trichter in Form eines senkrechten Kreiskegels. Die Maße sind der Skizze 2 zu entnehmen. Bis zu welcher Höhe ist das Silo nun gefüllt?

Skizze 1



Skizze 2



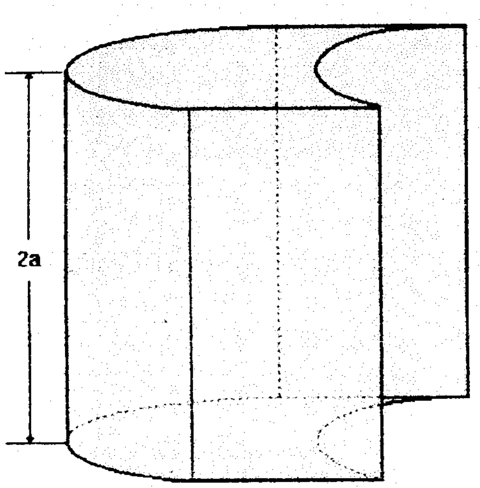
Zylinder

Der Wasserbehälter einer Kaffeemaschine hat die Form einer geraden Säule wie in Figur 1. Ihre Grundfläche wird durch den schraffierten Bereich in Figur 2 wiedergegeben; sie wird von Strecken und Kreisbögen begrenzt.

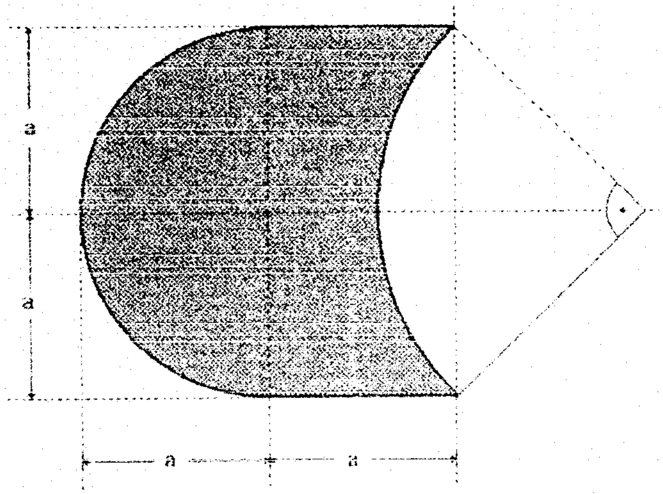
a) Zeige, dass die Grundfläche der Säule hat den Inhalt $3a^2$ besitzt.

b) Für welchen Wert von a fasst der Wasserbehälter einen Liter?

c) Bei einem anderen Wasserbehälter dieser Form ist a = 6 cm. Das Innere des oben offenen Behälters trägt eine Schutzschicht gegen das Verkalken. Ein Quadratdezimeter dieses Belags kostet 0,85 €. Welche Kosten entstehen durch diesen Schutzbelag?



Figur 1



Figur 2

Kegel

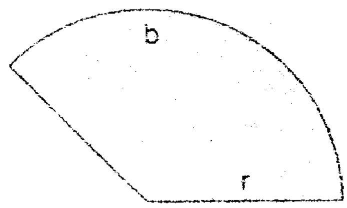
Der Kreisausschnitt aus Figur 1 hat den Radius r = 21,54 cm und den Bogen b =-50,27 cm.

a) Berechne seinen Flächeninhalt und seinen Mittelpunktswinkel.

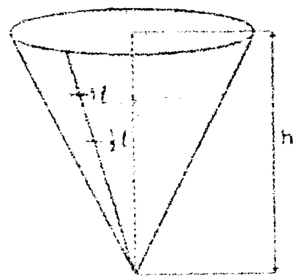
b) Aus dem Kreisausschnitt in Figur 1 wird (ohne Überlappung) ein Messbecher wie in Figur 2 geformt. Zeige: Die Höhe h des Messbechers beträgt gerundet 20 cm.

c) Welches Volumen hat dieser Messbecher?

d) Der Messbecher soll längs einer Mantellinie mit Markierungen für die Füllmengen 1/2 Liter und 1 Liter versehen werden (siehe Figur 2). Welchen Abstand haben diese beiden Markierungen voneinander?



Figur 1



Figur 2