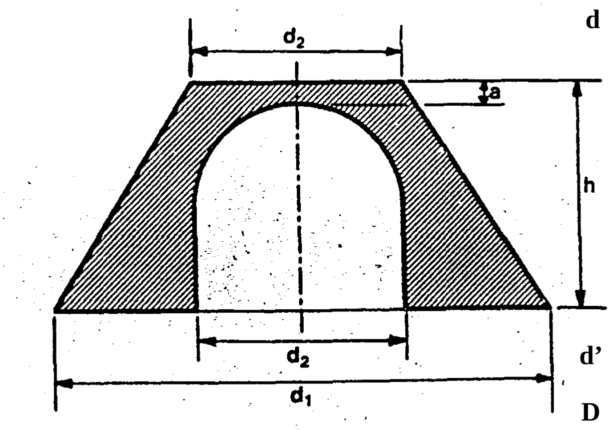
# 2.10. Prüfungsaufgaben zu Kugeln

**Zylinder, Kegel und Kugeln (18)**

Ein Werkstück besteht aus einem Kegelstumpf mit den Maßen D = 10 cm, h = 6 cm und d = 5 cm, in den ein Loch mit halbkugelförmigem Abschluß gebohrt wurde. Es hat den Durchmesser d’ = 4 cm und endet im Abstand a = 1 cm von der Oberfläche.




a) Berechne das Volumen des Werkstückes. (6)
b) Bei welchem Bohrdurchmesser d’ hat der ausgebohrte Zylinder das gleiche Volumen wie die ausgebohrte Halbkugel ? (2)
c) Berechne die Oberfläche des Werkstückes (8)
d) Bei welchem Bohrdurchmesser d’ hat der ausgebohrte Zylinder die gleiche Mantelfläche wie die ausgebohrte Halbkugel ? (2)

**Lösung**

Man rechnet zweckmäßiger mit den Radien $R = \frac{1}{2}D = 6$ cm, $r = \frac{1}{2}d = 2{,}5$ cm und $r' = \frac{1}{2}d' = 2$ cm.

a) Der Kegelstumpf entsteht aus einem großen Kegel mit der Höhe H = 12 cm und dem Radius R = 5 cm durch Entfernen eines kleinen Kegels mit der Höhe h = 6 cm und dem Radius r = 2,5 cm.

Der große Kegel hat das Volumen $V_K = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 100\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der kleine Kegel hat das Volumen $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 12{,}5\,\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der Kegelstumpf hat das Volumen $V_{KS} = V_K - V_k = 87{,}5\,\pi\text{ cm}^3$. (1)

Die ausgebohrte Halbkugel hat das Volumen $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r'^3 = 5\frac{1}{3}\pi\text{ cm}^3$ (1)

Der ausgebohrte Zylinder hat das Volumen $V_Z = \pi r'^2 \cdot h_z = 12\,\pi\text{ cm}^3$. (1)

Das Werkstück hat also das Volumen $V_{KS} - V_{HK} - V_Z = 67\frac{1}{6}\pi\text{ cm}^3$. (1)

b) $V_{HK} = V_Z \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r'^3 = \pi r'^2 \cdot h_z \Leftrightarrow \frac{2}{3}\pi r'^3 = \pi r'^2 \cdot (5 - r') \Leftrightarrow \frac{2}{3}r' = 5 - r' \Leftrightarrow r' = 3\text{ cm} \Rightarrow d' = 6\text{ cm}$. (2)

c) Der Kegelstumpf entsteht aus einem großen Kegel mit der Höhe H = 12 cm und dem Radius R = 5 cm durch Entfernen eines kleinen Kegels mit der Höhe h = 6 cm und dem Radius r = 2,5 cm.

Der große Kegel hat die Seitenhöhe $S = \sqrt{H^2 + R^2} = 13$ cm (1)
Der große Kegel hat die Mantelfläche $M_K = \pi RS = 65\,\pi\text{ cm}^2$ (1)

Der kleine Kegel hat die Seitenhöhe $s = \frac{1}{2}S$ und die Mantelfläche $M_k = \pi rs = 16{,}25\,\pi\text{ cm}^2$ (1)

Der Kegelstumpf hat die Mantelfläche $M_{KS} = M_K - M_k = 48{,}75\,\pi\text{ cm}^2$. (1)
Die ausgebohrte Halbkugel hat die Oberfläche $O_{HK} = 2\pi r'^2 = 8\,\pi\text{ cm}^2$ (1)
Der ausgebohrte Zylinder hat die Mantelfläche $M_Z = 2\pi r' \cdot h_z = 12\,\pi\text{ cm}^2$. (1)
Die Grundfläche ist $G = \pi R^2 - \pi r'^2 = 21\,\pi\text{ cm}^2$ (1)
Das Werkstück hat also die Oberfläche $O = M_{KS} + O_{HK} + M_Z + G = 89{,}75\pi\text{ cm}^2$. (1)

d) $O_{HK} = M_Z \Leftrightarrow 2\pi r'^2 = \pi r' \cdot h_z = 2\pi r' \cdot (5 - r') \Leftrightarrow r' = 5 - r' \Leftrightarrow r' = 2{,}5$ cm □d’ = 5 cm. (2)