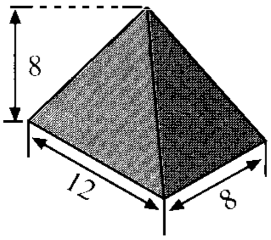
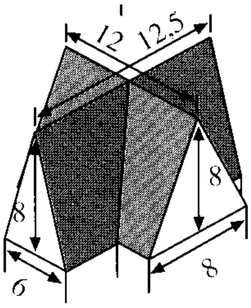
2.10. Prüfungsaufgaben zu Pyramiden

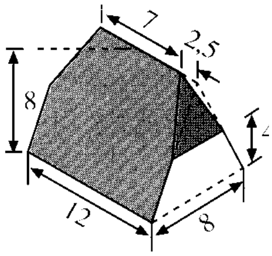
Aufgabe 1: Pyramiden
Berechne die Flächeninhalte und Volumina der unten abgebildeten Dächer, wobei all Maße in m angegeben sind:



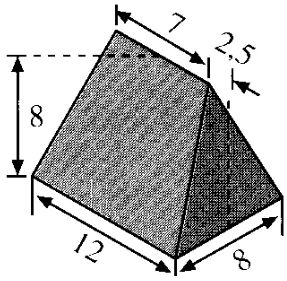
Zeltdach



Walmdach



Krüppelwalmdach



Gekreuztes Giebeldach

Lösungen
Zeltdach: $O = 187\ m^2$ und $V = 256\ m^3$.
Walmdach: $O = 237\ m^2$ und $V = 331\ m^3$.
Krüppelwalmdach: $O = 211\ m^2$ und $V = 371\ m^3$.
Gekreuztes Giebeldach: $O = 306\ m^2$ und $V = 556\ m^3$

Aufgabe 2: Pyramiden (4)
Ein Tetraeder ist eine Pyramide, die aus vier gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Berechne die Seitenhöhe h_S und die Höhe h eines Tetraeders mit der Seitenlänge s = 6 cm.

Lösung

$$h_S^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_S = \frac{\sqrt{3}}{2} s = \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm} \qquad (2)$$

$$h^2 + \left(\frac{h_S}{3}\right)^2 = h_S^2 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{2}}{3} h_S = \sqrt{\frac{2}{3}} s = \sqrt{6} \cdot 2 \text{ cm.} \qquad (2)$$

Aufgabe 3: Pyramiden (8)
Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt $12{,}25\ m^2$, die Höhe 2,5 m.
a) In dem Zelt schlafen zwei Personen. Wieviel m^3 Raum steht dann pro Person zur Verfügung? (2)
b) Wieviel m^2 Zeltbahn waren zur Herstellung des Zeltes (ohne Boden) nötig? (3)
c) Die Seitenkanten und der untere Rand sind mit einem Spezialband verstärkt. Wieviel m dieses Bandes wurden verarbeitet? (3)

Lösung
Gegeben: $G = 12{,}25\ m^2$ und $h = 2{,}5$ m

a) Gesucht: $V = \frac{G \cdot h}{3} = 10{,}2\ m^3$ entspricht $5{,}1\ m^3$ pro Person. (2)

b) Gesucht: $M = 4 \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} = 21{,}4\ m^2$. (1)

NR: $G = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{G} = 3{,}5$ m (1)

$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3{,}1$ m (1)

c) Gesucht: Seitenkanten s: $s^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3{,}5$ m (1)

unterer Rand a = 3,5 m (1)

$\Rightarrow$ gesamte Kantenlänge = $4 \cdot a + 4 \cdot s = 28$ m. (1)

Aufgabe 4: Pyramiden (8)

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt 20,25 m^2, die Höhe 3,5 m.

a) In dem Zelt schlafen drei Personen. Wie viel m^3 Raum steht dann pro Person zur Verfügung? (2)

b) Wieviel m^2 Zeltbahn waren zur Herstellung des Zeltes (ohne Boden) nötig? (3)

c) Die Seitenkanten und der untere Rand sind mit einem Spezialband verstärkt. Wieviel m dieses Bandes wurden verarbeitet? (3)

Lösung

Gegeben: $G = 20{,}25\ m^2$ und $h = 3{,}5$ m

a) Gesucht: $V = \frac{G \cdot h}{3} = 23{,}6\ m^3$ entspricht $7{,}8\ m^3$ pro Person. (2)

b) Gesucht: $M = 4 \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} = 37{,}4\ m^2$. (1)

NR: $G = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{G} = 4{,}5$ m (1)

$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4{,}2$ m (1)

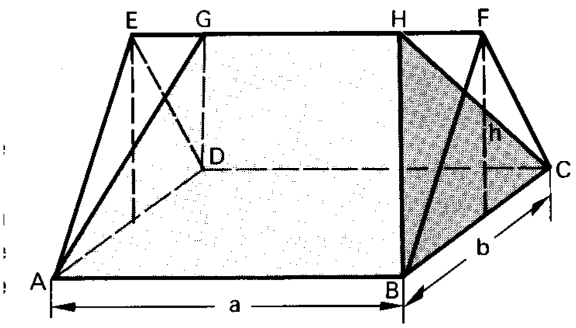
c) Gesucht: Seitenkanten s: $s^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4{,}7$ m (1)

unterer Rand a = 4,5 m (1)

$\Rightarrow$ gesamte Kantenlänge = $4 \cdot a + 4 \cdot s = 36{,}9$ m. (1)

Aufgabe 5: Pyramiden (3)

Ein dreiseitiges gerades Prisma ABCDEF hat die Form eines **Satteldachs** (siehe Zeichnung). Die beiden Grundflächen des Prismas heißen **Dachgiebel** und sind gleichschenklige Dreiecke mit der Basis b und der Höhe h. Die Seitenkante EF heißt **First** des Satteldachs. Wird der First eines Satteldachs beiderseits um eine gleichlange Strecke verkürzt, so entsteht ein so genanntes **Walmdach**. Wie ändert sich der überdachte Raum beim Übergang von Sattel- zum Walmdach für a = 10 m, b = 6 m und h = 3 m, wenn der First beiderseits um 2 m verkürzt wird?



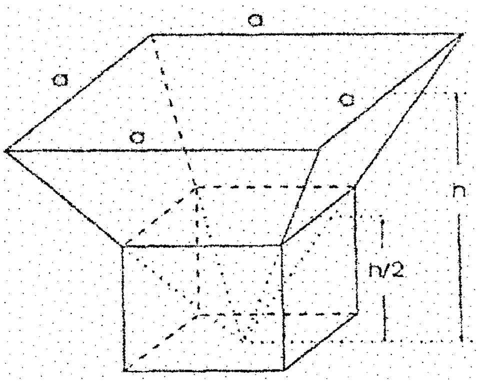
Lösung

Die Grundfläche des Prismas ist $G = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = 9\ m^2$ und sein Volumen demnach $V_S = G \cdot h = 90\ m^2$. (1)

Die beiden abgeschnittenen Pyramiden haben ebenfalls die Grundfläche $G = 9\ m^2$ und die Höhe h = 2 m, so dass ihr Volumen $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 6\ m^3$ beträgt. (1)

Das umbaute Volumen des Walmdaches ist also $V_S - 2 \cdot V_p = 78\ m^2$. (1)

Aufgabe 6: Pyramiden (12)
Das Schrägbild zeigt den Einfülltrichter einer Getreidemühle.



Der obere Teil gehört zu einer regelmäßigen senkrechten Pyramide mit der Grundseite a und der Höhe h. Diese geht ab der Mitte in einen Quader der Höhe 2 über.

a) Es ist a = 5,0 dm und h = 4,0 dm. Wie groß ist der Rauminhalt des Trichters? (4)
b) Der oben und unten offene Trichter wird aus dünnem Weißblech hergestellt. Wie viel dm^2 Weißblech benötigt man? (5)
c) Für einen Trichter mit 90 Litern Rauminhalt soll h = a gelten. Berechne die Länge der Grundseite a. (3)

Lösung:

a) $V = V_p - V_{p'} + V_Q$ (1)

$= \frac{1}{3} a^2 \cdot h - \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2}$ (1)

$= \frac{1}{4} a^2 \cdot h$ (1)

$= 25\ dm^3.$ (1)

b) $h_S = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4}}\ dm = 4{,}5\ dm$ (1)

$M = M_P - M_{P'} + M_Q$ (1)

$= 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_S - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_S}{2} + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2}$ (1)

$= 45\ dm^2 - 11{,}25\ dm^2 + 20\ dm^2$ (0,5)

$= 53{,}75\ dm^2$ (0,5)

c) $V = \frac{1}{4} a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{360 dm^3} \approx 7{,}1\ dm$ (3)

Aufgabe 7: Pyramiden (6)
Ein Steinmetz fertigt für eine Gartenausstellung aus einem Steinwürfel mit einer Grundfläche von 1,44 m^2 eine senkrechte Pyramide. Würfel und Pyramide haben die gleiche Grundfläche. Die Pyramide ist 1,2 m hoch.

a) Berechne die Kantenlänge des Würfels. (1)
b) Welches Volumen hat die Pyramide? (1)
c) Wieviel Prozent Abfall fallen bei der Bearbeitung des Steinwürfels an? (2)
d) Berechne die Mantelfläche der Pyramide! (2)

Lösung

a) Grundfläche $G = 1{,}44 m^2 \Rightarrow$ Kantenlänge $a = \sqrt{G} = 1{,}2$ m (1)

b) Die Pyramide hat das Volumen $V_p = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 0{,}576\ m^3$ (1)

c) $V_w = G \cdot h \Rightarrow$ Rest $V_w - V_p = \frac{2}{3} \cdot G \cdot h$ entspricht 66,6 % (2)

d) Die Pyramide hat die Höhe $h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a \approx 1{,}34$ m (1)

Ihre Mantelfläche ist also $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \approx 3{,}22\ m^2$. (1)

Aufgabe 8: Pyramiden

Ein 10 cm hoher Trichter wird halb **hoch** mit Wasser gefüllt.

a) Wie viel Prozent der Mantelfläche wird vom Wasser bedeckt?
b) Wie viel Prozent des Volumens nimmt das Wasser ein?
c) Der Trichter wird verschlossen und auf den Deckel gestellt. Wie hoch steht das Wasser jetzt?

Lösungen

a) $h' = k \cdot h = 0{,}5 \cdot h \Rightarrow k = 0{,}5$ und $M' = k^2 \cdot M = 0{,}25 \cdot M \Rightarrow$ 25 % der Mantelfläche werden bedeckt. (1)

b) $V' = k^3 \cdot V = 0{,}125 \cdot V \Rightarrow$ Das Wasser nimmt 12,5 % des Volumens ein. (1)

c) $V''_{Luft} = k^3 \cdot V = 0{,}875 \cdot V \Rightarrow k = \sqrt[3]{0{,}875} \approx 0{,}965 \Rightarrow h''_{Wasser} \approx 0{,}035\ h$

$\Rightarrow$ Das Wasser steht 3,5 mm hoch (2)

Aufgabe 9: Pyramiden (3)

Ein 10 cm hoher Trichter wird halb **voll** mit Wasser gefüllt.

a) Wie hoch steht das Wasser im Trichter?
b) Wie viel Prozent der Mantelfläche wird vom Wasser bedeckt?
c) Die Hälfte es Wassers wird ausgegossen. Dann wird der Trichter mit verschlossen und auf den Deckel gestellt. Wie hoch steht das Wasser jetzt?

Lösungen

a) $V' = k^3 \cdot V = 0{,}5 \cdot V \Rightarrow k = \sqrt[3]{0{,}5} \approx 0{,}794 \Rightarrow h' \approx 0{,}794\ h \Rightarrow$ Das Wasser steht ca. 7,94 cm hoch. (1)

b) $M' = k^2 \cdot M \approx 0{,}794^2 \cdot M \approx 0{,}63 \cdot M \Rightarrow$ 63 % der Mantelfläche werden bedeckt. (1)

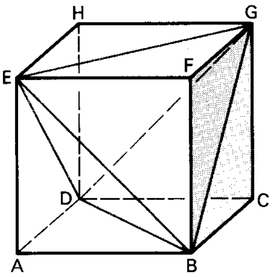
c) $V''_{Luft} = k^3 \cdot V = 0{,}75 \cdot V \Rightarrow k = \sqrt[3]{0{,}75} \approx 0{,}909 \Rightarrow h''_{Wasser} \approx 0{,}091\ h$

$\Rightarrow$ Das Wasser steht 9,1 mm hoch (1)

Aufgabe 10: Pyramiden (8)

In einen Würfel mit der Kantenlänge a wird ein Tetraeder einbeschrieben (siehe Zeichnung).

a) Berechne die Volumina des Würfels und des Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels. (3)
b) Berechne die Oberflächen des Würfels und des Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels. (3)
c) In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander? (1)
d) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächen zueinander? (1)



Lösung

a) Der Würfel hat das Volumen $V_w = a^3$ (1)

Der Tetraeder hat nach Pythagoras die Kantenlänge $s = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\ a$. (1)

Der Tetraeder hat also das Volumen $V_T = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = \frac{1}{3} a^3$. (1)

b) Das Verhältnis der Volumina ist $V_W : V_T = 3 : 1$ (1)

c) Der Würfel hat die Oberfläche $O_W = 6a^2$ (1)

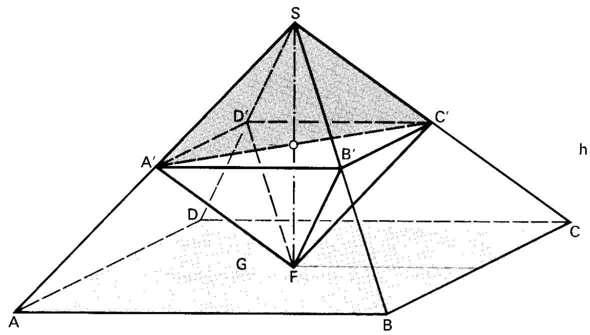
Die Seitenflächen des Tetraeders sind gleichseitig mit dem Flächeninhalt $G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$. (1)

Der Tetraeder hat also die Oberfläche $O_T = 4G = 2\sqrt{3}\ a^2$ (1)

d) Das Verhältnis der Oberflächen ist $O_W : O_T = 6 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$ (1)

Aufgabe 11: Pyramiden (8)
Eine gerade quadratische Pyramide wird von gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge a begrenzt. Sie wird auf halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten, so dass die Schnittfigur zusammen mit der Spitze S und dem Höhenfußpunkt F ein Oktaeder bilden.

a) Berechne das Volumen der Pyramide und des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a (4)
b) In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander ? (1)
c) Berechne die Oberfläche der Pyramide und des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a (3)



Lösung

a) Die Seitenflächen der Pyramide sind gleichseitig mit den Höhen $h_S = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (1)

Die Pyramide hat also nach Pythagoras die Höhe $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}a$. (1)

Ihr Volumen ist also $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3\sqrt{2}}a^3$ (1)

Der Oktaeder hat die Kantenlänge $s = \frac{1}{2}a$ und das Volumen $V_O = \frac{\sqrt{2}}{3}s^3 = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$ (1)

b) Das Verhältnis der Volumina ist $V_O : V_P = \frac{\sqrt{2}}{24} : \frac{1}{3\sqrt{2}} = 1 : 4$ (1)

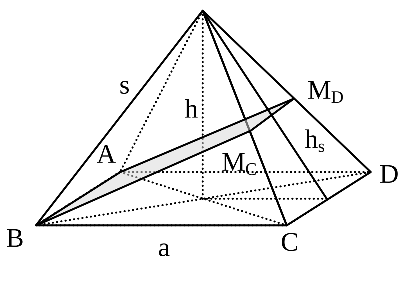
c) Der Oktaeder hat die Oberfläche $O_O = 2\sqrt{3}\,s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (1)

Die Seitenflächen der Pyramide sind gleichseitig mit dem Flächeninhalt $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ (1)

Ihre Oberfläche ist also $O_P = G + 4S = a^2 + \sqrt{3}\,a^2$ (1)

Aufgabe 12: Pyramide (8)
Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Grundseitenlänge a und die Kantenlänge $s = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

a) Berechnen Sie die Höhe h und die Seitenhöhe h_s der Pyramide.
b) Von den Kantenmitten M_C und M_D wird zu den gegenüberliegenden Eckpunkten A und B eine Ebene eingezogen. (siehe rechts) Welcher prozentuale Anteil des Pyramidenvolumens befindet sich nun oberhalb der Ebene?



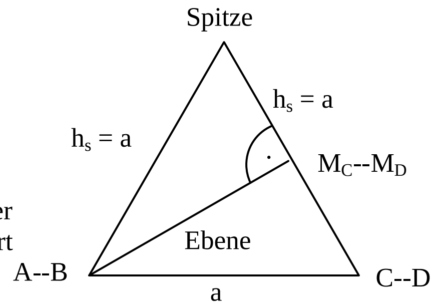
Lösungen:

a) Die Diagonale der Grundseite ist $d = \sqrt{2}\,a$. (1)

Die Höhe ist $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (1)

Die Seitenhöhe ist $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = a$ (1)

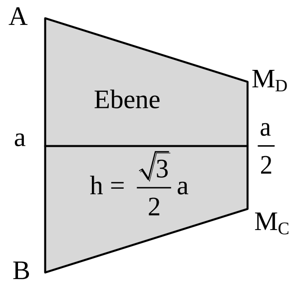
b) Das Profil der Pyramide ist also ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a, das durch die eingezogene Ebene genau halbiert wird. (1)



Die Ebene bildet ein Trapez mit dem Flächeninhalt

$A = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}a\right)\cdot h = \frac{3}{4}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2.$ (1)

Grundfläche



Die obere Teilpyramide hat das Volumen

$V_o = \frac{1}{3}\cdot A\cdot\frac{h_s}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}a^2\cdot\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^3.$ (1)

Die gesamte Pyramide hat das Volumen

$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$ (1)

Die obere Teilpyramide hat also einen Volumenanteil von

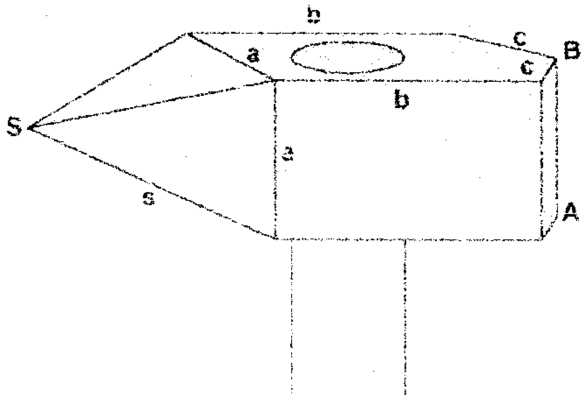
$\frac{V_o}{V} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^3 : \frac{\sqrt{3}}{6}a^3 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 37{,}5\ \%.$ (1)

Aufgabe 13: Pyramiden und Prismen (8)

Das Schrägbild zeigt einen Steinmetzhammer. Der Hammerkopf hat die Form eines Quaders, bei dem auf der einen Seite eine regelmäßige senkrechte Pyramide, auf der anderen ein dreiseitiges Prisma angesetzt ist. Die zylindrische Bohrung im Quader für den Stiel hat den Durchmesser d = 2 cm. Die in der Figur benannten Kanten haben die Längen a = 5 cm, b = 8 cm, c = 3 cm und s = 7 cm. Die Spitze der Pyramide ist S, die Mitte der Kante AB ist M.

a) Berechne die Länge SM des Hammerkopfes.

b) Berechne die Masse des Hammerkopfes, wenn er aus Stahl mit der Dichte $\rho = 7{,}8\ g/cm^3$ besteht.



Lösungen:

a) $\overline{SM} = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} + b + \sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \approx 6{,}04\ cm + 8\ cm + 1{,}66\ cm = 15{,}70\ cm$ (4)

b) $V = a^2\cdot\frac{1}{3}\sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} + a^2\cdot b + a^2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{c^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - a\cdot\pi r^2 \approx (50{,}35 + 200 + 20{,}73 - 15{,}71)\ cm^3 = 255{,}17\ cm^3$ (3)

$m = \rho\cdot V \approx 1990{,}3\ g$ (1)