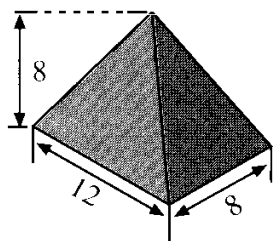


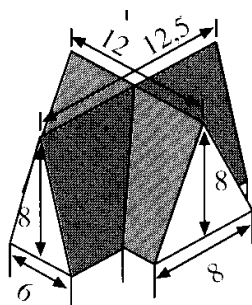
## 2.10. Prüfungsaufgaben zu Pyramiden und Kegeln

### Aufgabe 1: Pyramiden

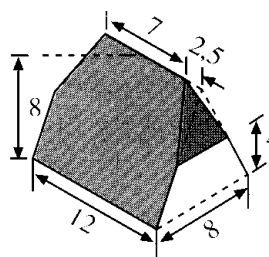
Berechne die Flächeninhalte und Volumina der unten abgebildeten Dächer, wobei alle Maße in m angegeben sind:



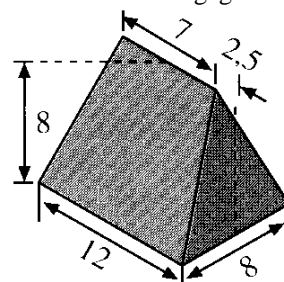
Zeltdach



Walmdach



Krüppelwalmdach



Gekreuztes Giebeldach

### Lösungen

Zeltdach:  $O = 187 \text{ m}^2$  und  $V = 256 \text{ m}^3$ .

Walmdach:  $O = 237 \text{ m}^2$  und  $V = 331 \text{ m}^3$ .

Krüppelwalmdach:  $O = 211 \text{ m}^2$  und  $V = 371 \text{ m}^3$ .

Gekreuztes Giebeldach:  $O = 306 \text{ m}^2$  und  $V = 556 \text{ m}^3$ .

### Aufgabe 2: Pyramiden (4)

Ein Tetraeder ist eine Pyramide, die aus vier gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Berechne die Seitenhöhe  $h_s$  und die Höhe  $h$  eines Tetraeders mit der Seitenlänge  $s = 6 \text{ cm}$ .

### Lösung

$$h_s^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_s = \frac{\sqrt{3}}{2} s = \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm} \quad (2)$$

$$h^2 + \left(\frac{h_s}{3}\right)^2 = h_s^2 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{2}}{3} h_s = \frac{\sqrt{2}}{3} s = \sqrt{6} \cdot 2 \text{ cm}. \quad (2)$$

### Aufgabe 3: Pyramiden (8)

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt  $12,25 \text{ m}^2$ , die Höhe  $2,5 \text{ m}$ .

- In dem Zelt schlafen zwei Personen. Wieviel  $\text{m}^3$  Raum steht dann pro Person zur Verfügung? (2)
- Wieviel  $\text{m}^2$  Zeltbahn waren zur Herstellung des Zeltes (ohne Boden) nötig? (3)
- Die Seitenkanten und der untere Rand sind mit einem Spezialband verstärkt. Wieviel m dieses Bandes wurden verarbeitet? (3)

### Lösung

Gegeben:  $G = 12,25 \text{ m}^2$  und  $h = 2,5 \text{ m}$

a) Gesucht:  $V = \frac{G \cdot h}{3} = 10,2 \text{ m}^3$  entspricht  $5,1 \text{ m}^3$  pro Person. (2)

b) Gesucht:  $M = 4 \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} = 21,4 \text{ m}^2$ . (1)

NR:  $G = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{G} = 3,5 \text{ m}$  (1)

$$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3,1 \text{ m} \quad (1)$$

c) Gesucht: Seitenkanten  $s$ :  $s^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 3,5 \text{ m}$  (1)

unterer Rand  $a = 3,5 \text{ m}$  (1)

$\Rightarrow$  gesamte Kantenlänge  $= 4 \cdot a + 4 \cdot s = 28 \text{ m}$ . (1)

#### Aufgabe 4: Pyramiden (8)

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Grundfläche beträgt  $20,25 \text{ m}^2$ , die Höhe  $3,5 \text{ m}$ .

- In dem Zelt schlafen drei Personen. Wie viel  $\text{m}^3$  Raum steht dann pro Person zur Verfügung? (2)
- Wieviel  $\text{m}^2$  Zeltbahn waren zur Herstellung des Zeltes (ohne Boden) nötig? (3)
- Die Seitenkanten und der untere Rand sind mit einem Spezialband verstärkt. Wieviel m dieses Bandes wurden verarbeitet? (3)

#### Lösung

Gegeben:  $G = 20,25 \text{ m}^2$  und  $h = 3,5 \text{ m}$

a) Gesucht:  $V = \frac{G \cdot h}{3} = 23,6 \text{ m}^3$  entspricht  $7,8 \text{ m}^3$  pro Person. (2)

b) Gesucht:  $M = 4 \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} = 37,4 \text{ m}^2$ . (1)

NR:  $G = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{G} = 4,5 \text{ m}$  (1)

$$h_a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h_a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4,2 \text{ m} \quad (1)$$

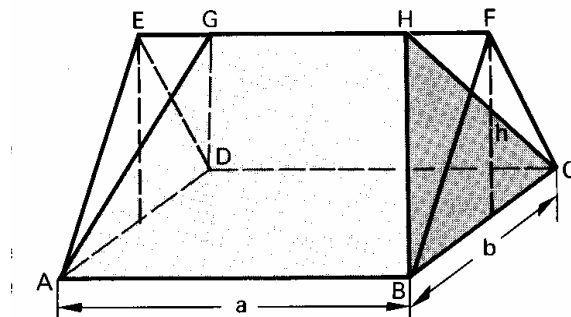
c) Gesucht: Seitenkanten  $s$ :  $s^2 = h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 4,7 \text{ m}$  (1)

unterer Rand  $a = 4,5 \text{ m}$  (1)

$\Rightarrow$  gesamte Kantenlänge  $= 4 \cdot a + 4 \cdot s = 36,9 \text{ m}$ . (1)

#### Aufgabe 5: Pyramiden (3)

Ein dreiseitiges gerades Prisma ABCDEF hat die Form eines **Satteldachs** (siehe Zeichnung). Die beiden Grundflächen des Prismas heißen **Dachgiebel** und sind gleichschenklige Dreiecke mit der Basis  $b$  und der Höhe  $h$ . Die Seitenkante EF heißt **First** des Satteldachs. Wird der First eines Satteldachs beiderseits um eine gleichlange Strecke verkürzt, so entsteht ein so genanntes **Walmdach**. Wie ändert sich der überdachte Raum beim Übergang von Sattel- zum Walmdach für  $a = 10 \text{ m}$ ,  $b = 6 \text{ m}$  und  $h = 3 \text{ m}$ , wenn der First beiderseits um  $2 \text{ m}$  verkürzt wird?



#### Lösung

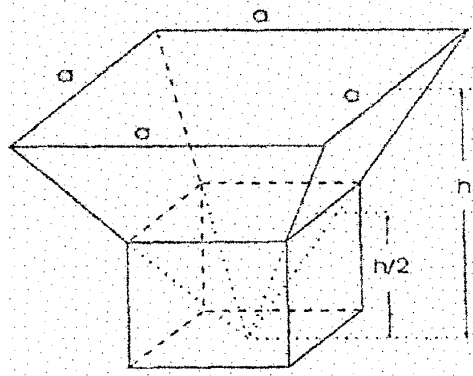
Die Grundfläche des Prismas ist  $G = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = 9 \text{ m}^2$  und sein Volumen demnach  $V_S = G \cdot h = 90 \text{ m}^3$ . (1)

Die beiden abgeschnittenen Pyramiden haben ebenfalls die Grundfläche  $G = 9 \text{ m}^2$  und die Höhe  $h = 2 \text{ m}$ , so dass ihr Volumen  $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 6 \text{ m}^3$  beträgt. (1)

Das umbaute Volumen des Walmdachs ist also  $V_S - 2 \cdot V_P = 78 \text{ m}^3$ . (1)

### Aufgabe 6: Pyramiden (12)

Das Schrägbild zeigt den Einfülltrichter einer Getreidemühle.



Der obere Teil gehört zu einer regelmäßigen senkrechten Pyramide mit der Grundseite  $a$  und der Höhe  $h$ . Diese geht ab der Mitte in einen Quader der Höhe  $2$  über.

- Es ist  $a = 5,0$  dm und  $h = 4,0$  dm. Wie groß ist der Rauminhalt des Trichters? (4)
- Der oben und unten offene Trichter wird aus dünnem Weißblech hergestellt. Wie viel  $\text{dm}^2$  Weißblech benötigt man? (5)
- Für einen Trichter mit 90 Litern Rauminhalt soll  $h = a$  gelten. Berechne die Länge der Grundseite  $a$ . (3)

#### Lösung:

$$\text{a) } V = V_p - V_{p'} + V_Q \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \cdot h - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{4} a^2 \cdot h \quad (1)$$

$$= 25 \text{ dm}^3. \quad (1)$$

$$\text{b) } h_s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4}} \text{ dm} = 4,5 \text{ dm} \quad (1)$$

$$M = M_p - M_{p'} + M_Q \quad (1)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_s - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_s}{2} + 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} \quad (1)$$

$$= 45 \text{ dm}^2 - 11,25 \text{ dm}^2 + 20 \text{ dm}^2 \quad (0,5)$$

$$= 53,75 \text{ dm}^2 \quad (0,5)$$

$$\text{c) } V = \frac{1}{4} a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{4V} = \sqrt[3]{360 \text{ dm}^3} \approx 7,1 \text{ dm} \quad (3)$$

### Aufgabe 7: Pyramiden (6)

Ein Steinmetz fertigt für eine Gartenausstellung aus einem Steinwürfel mit einer Grundfläche von  $1,44 \text{ m}^2$  eine senkrechte Pyramide. Würfel und Pyramide haben die gleiche Grundfläche. Die Pyramide ist  $1,2$  m hoch.

- Berechne die Kantenlänge des Würfels. (1)
- Welches Volumen hat die Pyramide? (1)
- Wieviel Prozent Abfall fallen bei der Bearbeitung des Steinwürfels an? (2)
- Berechne die Mantelfläche der Pyramide! (2)

#### Lösung

$$\text{a) } \text{Grundfläche } G = 1,44 \text{ m}^2 \Rightarrow \text{Kantenlänge } a = \sqrt{G} = 1,2 \text{ m} \quad (1)$$

$$\text{b) } \text{Die Pyramide hat das Volumen } V_p = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 0,576 \text{ m}^3 \quad (1)$$

$$\text{c) } V_w = G \cdot h \Rightarrow \text{Rest } V_w - V_p = \frac{2}{3} \cdot G \cdot h \text{ entspricht } 66,6 \% \quad (2)$$

$$\text{d) } \text{Die Pyramide hat die Höhe } h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a \approx 1,34 \text{ m} \quad (1)$$

$$\text{Ihre Mantelfläche ist also } M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \approx 3,22 \text{ m}^2. \quad (1)$$

### Aufgabe 8: Pyramiden

Ein 10 cm hoher Trichter wird halb **hoch** mit Wasser gefüllt.

- Wie viel Prozent der Mantelfläche wird vom Wasser bedeckt?
- Wie viel Prozent des Volumens nimmt das Wasser ein?
- Der Trichter wird verschlossen und auf den Deckel gestellt. Wie hoch steht das Wasser jetzt?

#### Lösungen

- $h' = k \cdot h = 0,5 \cdot h \Rightarrow k = 0,5$  und  $M' = k^2 \cdot M = 0,25 \cdot M \Rightarrow 25\%$  der Mantelfläche werden bedeckt. (1)
- $V' = k^3 \cdot V = 0,125 \cdot V \Rightarrow$  Das Wasser nimmt 12,5 % des Volumens ein. (1)
- $V''_{\text{Luft}} = k^3 \cdot V = 0,875 \cdot V \Rightarrow k = \sqrt[3]{0,875} \approx 0,965 \Rightarrow h''_{\text{Wasser}} \approx 0,035 h$   
 $\Rightarrow$  Das Wasser steht 3,5 mm hoch (2)

### Aufgabe 9: Pyramiden (3)

Ein 10 cm hoher Trichter wird halb **voll** mit Wasser gefüllt.

- Wie hoch steht das Wasser im Trichter?
- Wie viel Prozent der Mantelfläche wird vom Wasser bedeckt?
- Die Hälfte des Wassers wird ausgegossen. Dann wird der Trichter mit verschlossen und auf den Deckel gestellt. Wie hoch steht das Wasser jetzt?

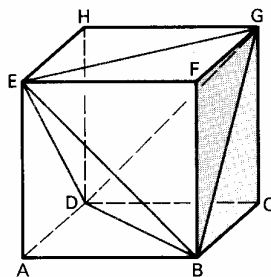
#### Lösungen

- $V' = k^3 \cdot V = 0,5 \cdot V \Rightarrow k = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,794 \Rightarrow h' \approx 0,794 h \Rightarrow$  Das Wasser steht ca. 7,94 cm hoch. (1)
- $M' = k^2 \cdot M \approx 0,794^2 \cdot M \approx 0,63 \cdot M \Rightarrow 63\%$  der Mantelfläche werden bedeckt. (1)
- $V''_{\text{Luft}} = k^3 \cdot V = 0,75 \cdot V \Rightarrow k = \sqrt[3]{0,75} \approx 0,909 \Rightarrow h''_{\text{Wasser}} \approx 0,091 h$   
 $\Rightarrow$  Das Wasser steht 9,1 mm hoch (1)

### Aufgabe 10: Pyramiden (8)

In einen Würfel mit der Kantenlänge  $a$  wird ein Tetraeder einbeschrieben (siehe Zeichnung).

- Berechne die Volumina des Würfels und des Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge  $a$  des Würfels. (3)
- Berechne die Oberflächen des Würfels und des Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge  $a$  des Würfels. (3)
- In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander? (1)
- In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächen zueinander? (1)



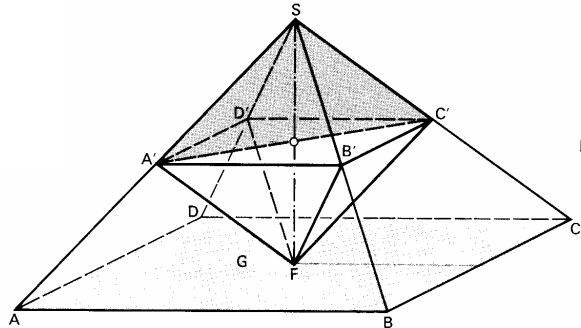
#### Lösung

- Der Würfel hat das Volumen  $V_w = a^3$  (1)  
Der Tetraeder hat nach Pythagoras die Kantenlänge  $s = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} a$ . (1)  
Der Tetraeder hat also das Volumen  $V_T = \frac{\sqrt{2}}{12} s^3 = \frac{1}{3} a^3$ . (1)
- Das Verhältnis der Volumina ist  $V_w : V_T = 3 : 1$  (1)
- Der Würfel hat die Oberfläche  $O_w = 6a^2$  (1)  
Die Seitenflächen des Tetraeders sind gleichseitig mit dem Flächeninhalt  $G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$ . (1)  
Der Tetraeder hat also die Oberfläche  $O_T = 4G = 2\sqrt{3} a^2$  (1)
- Das Verhältnis der Oberflächen ist  $O_w : O_T = 6 : 2\sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$  (1)

### Aufgabe 11: Pyramiden (8)

Eine gerade quadratische Pyramide wird von gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge  $a$  begrenzt. Sie wird auf halber Höhe parallel zur Grundfläche geschnitten, so dass die Schnittfigur zusammen mit der Spitze  $S$  und dem Höhenfußpunkt  $F$  ein Oktaeder bilden.

- Berechne das Volumen der Pyramide und des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge  $a$  (4)
- In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander? (1)
- Berechne die Oberfläche der Pyramide und des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge  $a$  (3)



### Lösung

- Die Seitenflächen der Pyramide sind gleichseitig mit den Höhen  $h_s = \frac{\sqrt{3}}{2} a$  (1)

Die Pyramide hat also nach Pythagoras die Höhe  $h = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} a$ . (1)

Ihr Volumen ist also  $V_P = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3\sqrt{2}} a^3$  (1)

Der Oktaeder hat die Kantenlänge  $s = \frac{1}{2} a$  und das Volumen  $V_O = \frac{\sqrt{2}}{3} s^3 = \frac{\sqrt{2}}{24} a^3$  (1)

- Das Verhältnis der Volumina ist  $V_O : V_P = \frac{\sqrt{2}}{24} : \frac{1}{3\sqrt{2}} = 1 : 4$  (1)

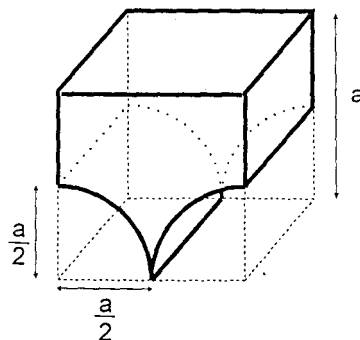
- Der Oktaeder hat die Oberfläche  $O_O = 2\sqrt{3} s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$  (1)

Die Seitenflächen der Pyramide sind gleichseitig mit dem Flächeninhalt  $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$  (1)

Ihre Oberfläche ist also  $O_P = G + 4S = a^2 + \sqrt{3} a^2$  (1)

### Aufgabe 12: Zylinder (9)

Der abgebildete Körper ist Teil eines Würfels mit der Kantenlänge  $a = 1$  m.



- Berechne seine Masse (Dichte  $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$ ) (3)
- Der Körper erhält einen Anstrich der Dicke  $d = 0,1$  mm. Reicht dafür eine Dose mit 450 ml Farbe aus? (6)

**Lösung:**

$$a) \quad V = V_W - V_{HZ} = a^3 - \frac{1}{2} \pi \frac{a^2}{4} \cdot a = \left(1 - \frac{\pi}{8}\right) a^3 \approx 0,607 a^3. \quad (2)$$

$$\text{Mit } a = 1 \text{ m ergibt sich die Masse } m = \hat{v} \cdot V = 1,51 \text{ t.} \quad (1)$$

$$b) \quad O = 4a^2 - \pi \frac{a^2}{4} + \pi \frac{a}{2} \cdot a = 4a^2 \left(4 + \frac{\pi}{4}\right) \approx 4,78 \text{ m}^2 \text{ für } a = 1 \quad (3)$$

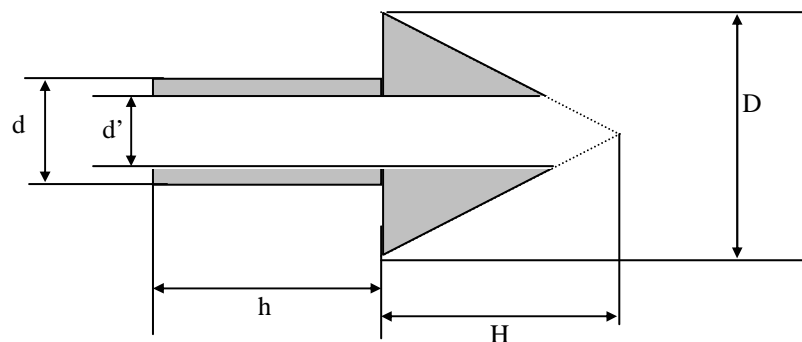
$$c) \quad \text{Farbvolumen } V = O \cdot d = 4,79 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 \cdot 0,1 \text{ mm} = 479 \,000 \text{ mm}^3 = 479 \text{ cm}^3 = 479 \text{ ml} > 450 \text{ ml} \quad (2)$$

⇒ die Dose reicht also nicht aus. (1)

**Aufgabe 13: Kegel und Zylinder (19)**

Das abgebildete massive Werkstück ist aus einem Zylinder (Durchmesser  $d = 4 \text{ cm}$ , Höhe  $h = 3 \text{ cm}$ ) und einem Kegel (Durchmesser  $D = 6 \text{ cm}$ , Höhe  $H = 4 \text{ cm}$ ) zusammengesetzt. Die Bohrung hat den Durchmesser  $d' = 2 \text{ cm}$ .

- Berechne das Volumen des Werkstücks. (6)
- Bei welchem Bohrlochdurchmesser  $d'$  verliert der Kegel gleich viel Material wie der Zylinder? (3)
- Berechne die Oberfläche des Werkstücks (8)
- Bei welchem Bohrlochdurchmesser  $d'$  hat die Kegelbohrung die gleiche Mantelfläche wie die Zylinderbohrung? (2)

**Lösung**

Man rechnet zweckmäßiger mit den Radien  $R = \frac{1}{2} D = 3 \text{ cm}$ ,  $r = \frac{1}{2} d = 2 \text{ cm}$  und  $r' = \frac{1}{2} d' = 1 \text{ cm}$ .

$$a) \quad \text{Der Zylinder hat das Volumen } V_Z = \pi r^2 h = 12\pi \text{ cm}^3 \quad (1)$$

$$\text{Der Kegel hat das Volumen } V_K = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H = 12\pi \text{ cm}^3. \quad (1)$$

$$\text{Das Volumen der Zylinderbohrung ist } V_{Zb} = \pi r'^2 \cdot h = 3\pi \text{ cm}^3 \quad (1)$$

Die Ausbohrung des Kegels setzt sich zusammen aus

$$\text{einem Kegel mit dem Volumen } V_{KbK} = \frac{1}{3} \pi r'^2 \cdot H \cdot \frac{r'}{R} = \frac{4}{9} \pi \text{ cm}^3 \quad (1)$$

$$\text{einem Zylinder mit dem Volumen } V_{KbZ} = \pi r'^2 \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \frac{8}{3} \pi \text{ cm}^3 \quad (1)$$

$$\text{Das Volumen des Werkstückes ist } V = V_Z + V_K - V_{Zb} - V_{KbK} - V_{KbZ} = 17 \frac{8}{9} \pi \text{ cm}^3 \quad (1)$$

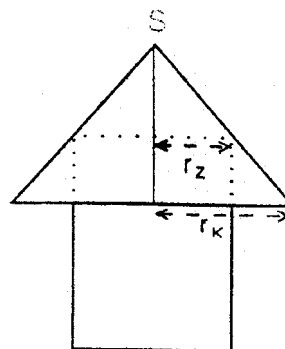
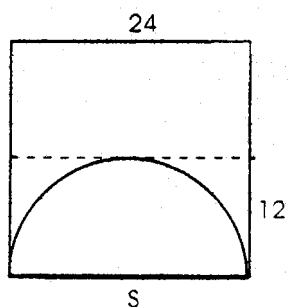
$$b) \quad V_{Zb} = V_{KbK} + V_{KbZ} \Leftrightarrow \pi r'^2 \cdot h = \pi r'^2 \cdot H \cdot \frac{r'}{R} + \pi r'^2 \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \pi r'^2 \cdot H \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r'}{R}\right) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow h = H \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r'}{R}\right) \Leftrightarrow r' = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{h}{H}\right) \cdot R = 1,125 \text{ cm} \Rightarrow d' = 2r' = 2,25 \text{ cm} \quad (1)$$

- c) Der Kegel hat die Seitenlänge  $S = \sqrt{H^2 + R^2} = 5 \text{ cm}$  (1)  
 Seine Mantelfläche ist  $M_K = \pi RS = 15\pi \text{ cm}^2$  (1)  
 Der Zylinder hat die Mantelfläche  $M_Z = 2\pi rh = 12\pi \text{ cm}^2$  (1)  
 Die Zylinderbohrung hat die Mantelfläche  $M_{Zb} = 2\pi r'h = 6\pi \text{ cm}^2$  (1)  
 Die Ausbohrung des Kegels setzt sich zusammen aus  
 einem Kegel mit der Mantelfläche  $M_{KbK} = \pi r' \cdot S \cdot \frac{r'}{R} = \frac{5}{3}\pi \text{ cm}^2$  (1)  
 einem Zylinder mit der Mantelfläche  $M_{KbZ} = 2\pi r' \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R}) = \frac{16}{3}\pi \text{ cm}^2$  (1)  
 Die Grundfläche des Werkstückes ist  $G = \pi R^2 - \pi r'^2 = 8\pi \text{ cm}^2$  (1)  
 Die Oberfläche des Werkstückes ist  $O = M_Z + M_K + M_{Zb} + M_{KbK} + M_{KbZ} + G = 48\pi \text{ cm}^2$  (1)
- d)  $M_{Zb} = M_{KbZ} \Leftrightarrow 2\pi r' \cdot h = 2\pi r' \cdot (H - H \cdot \frac{r'}{R})$  (1)  
 $\Leftrightarrow h = H \cdot (1 - \frac{r'}{R}) \Leftrightarrow r' = (1 - \frac{h}{H}) \cdot R = 0,75 \text{ cm} \Rightarrow d' = 1,5 \text{ cm}$  (1)

#### Aufgabe 14: Zylinder und Kegel

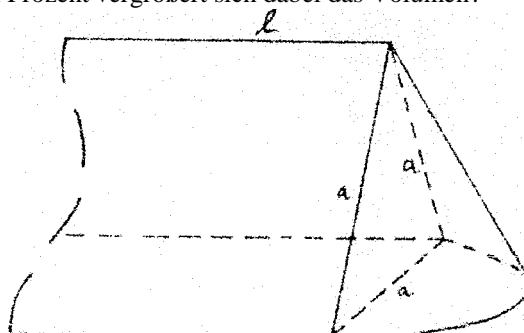
- a) Ein Bastler schneidet ein Quadrat der Seitenlänge 24 cm in zwei gleich große Rechtecke (siehe links). Das obere Rechteck biegt er zum Mantel eines 12 cm hohen Kreiszyllinders zusammen. Zeige, dass der Zylinderradius  $r_Z \approx 3,82 \text{ cm}$  ist. Berechne das Zylindervolumen.
- b) Aus dem unteren Rechteck schneidet er den abgebildeten Halbkreis aus und biegt ihn zum Mantel eines Kreiskegels zusammen. (siehe rechts) Zeige, dass sein Grundkreis den Radius  $r_K = 6 \text{ cm}$  hat. Berechne das Volumen des Kegels.
- c) Der Kegel wird nun mit der Spitze nach oben über den Zylinder gestülpt. Welche Gesamthöhe hat der entstandene Körper?



#### Aufgabe 15: Prismen und Kegel

Ein senkrecht Prisma P besitzt als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $a = 6,0 \text{ cm}$ . Die Höhe des Prismas ist  $l = 4a$ .

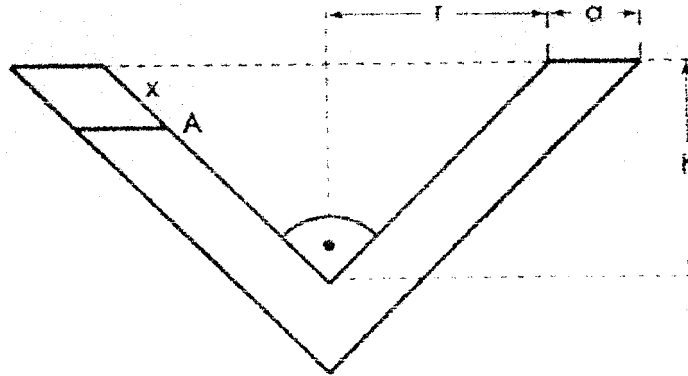
- a) Bestimme das Volumen und den Oberflächeninhalt des Prismas.
- b) An beiden Dreiecksflächen des Prismas werden Kegelhälften angesetzt. Dadurch entsteht ein neuer Körper (vgl. Skizze). Um wie viel Prozent vergrößert sich dabei das Volumen?



### Aufgabe 16: Kegel

Eine Brunnenschale aus Marmor besteht aus einem Hohlkegel. Dabei sind Radius  $r$  und Höhe  $h$  gleich groß (siehe den skizzierten Querschnitt). Der Rand hat überall die Breite  $a = 3$  cm.

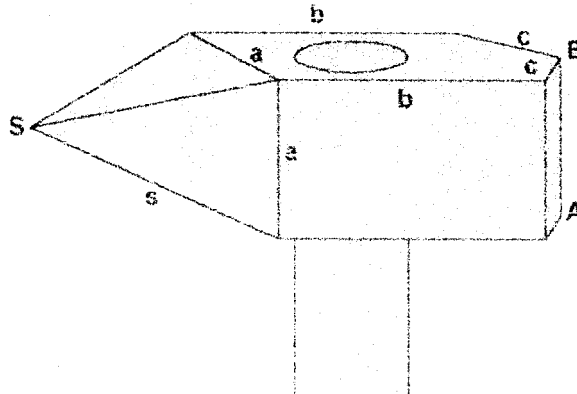
- Wie groß müsste der Radius  $r$  sein, damit das Fassungsvermögen der Schale bis zum oberen Rand 16 Liter beträgt?
- Es sei nun  $r = 25,0$  cm angenommen. Welche Masse hat die Brunnenschale, wenn  $1 \text{ cm}^3$  Marmor die Masse  $2,6$  g besitzt? Wie groß ist die gesamte Oberfläche der Schale?
- Es sei wieder  $r = 25,0$  cm. Wenn die Brunnenschale zu 80 % ihres Volumens gefüllt ist, soll das weiter zufließende Wasser durch ein im Rand angebrachtes (dünnes) Abflussrohr abfließen können? In welcher Entfernung  $x$  vom oberen Rand muss das Abflussrohr angebracht werden?



### Aufgabe 17: Pyramiden und Prismen

Das Schrägbild zeigt einen Steinmetzhammer. Der Hammerkopf hat die Form eines Quaders, bei dem auf der einen Seite eine regelmäßige senkrechte Pyramide, auf der anderen ein dreiseitiges Prisma angesetzt ist. Die zylindrische Bohrung im Quader für den Stiel hat den Durchmesser  $d = 2,5$  cm. Die in der Figur benannten Kanten haben die Längen  $a = 5,1$  cm,  $b = 8,3$  cm,  $c = 3,3$  cm und  $s = 7,2$  cm. Die Spitze der Pyramide ist S, die Mitte der Kante AB ist M.

- Berechne die Länge SM des Hammerkopfes.
- Berechne die Masse des Hammerkopfes, wenn er aus Stahl mit der Dichte  $\hat{\rho} = 7,8 \text{ g/cm}^3$  besteht.

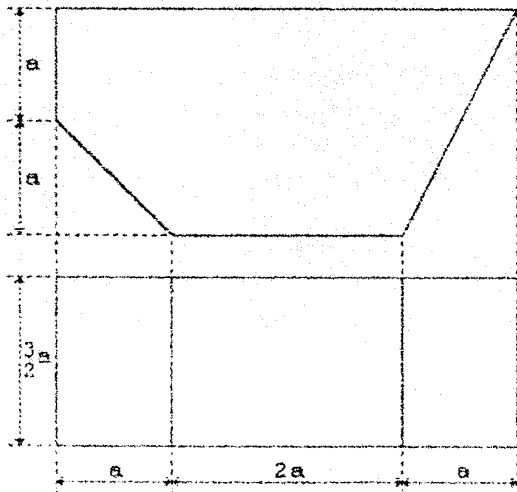


### Aufgabe 18: Zylinder und Kegel

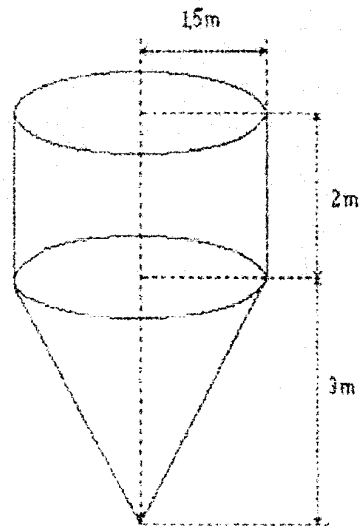
Die Skizze 1 zeigt den Aufriss und den Grundriss eines Transportcontainers, der oben offen ist.

- Berechne das Fassungsvermögen des beschriebenen Containers für  $a = 1,5$  m.
- In den Container werden  $10 \text{ m}^3$  Sand eingeladen und zu einer Baustelle gebracht. Dort wird der Sand in ein bereitstehendes leeres Silo (Skizze 2) eingefüllt. Das Silo besteht aus einem senkrechten Kreiskegel und einem daran. angesetzten Trichter in Form eines senkrechten Kreiskegels. Die Maße sind der Skizze 2 zu entnehmen. Bis zu welcher Höhe ist das Silo nun gefüllt?

Skizze 1



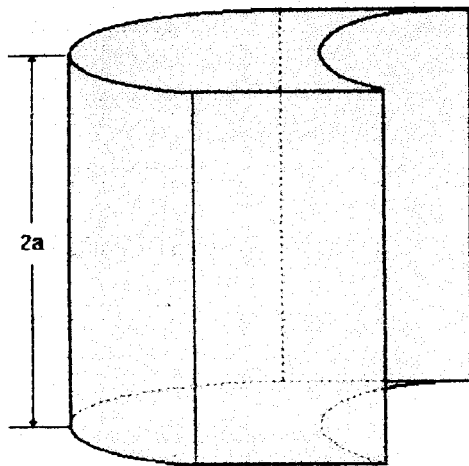
Skizze 2



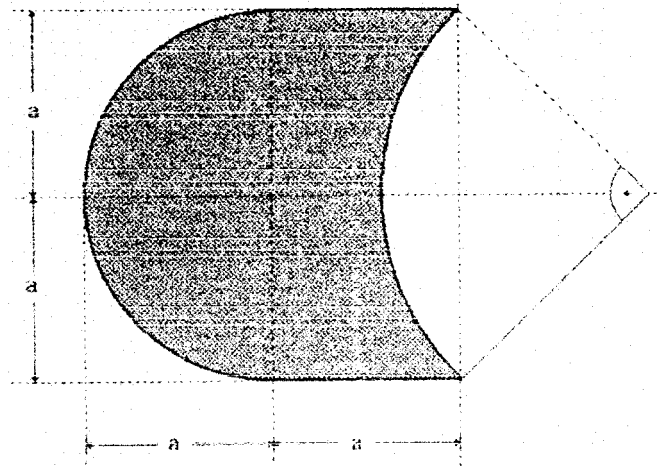
**Aufgabe 19: Zylinder**

Der Wasserbehälter einer Kaffeemaschine hat die Form einer geraden Säule wie in Figur 1. Ihre Grundfläche wird durch den schraffierten Bereich in Figur 2 wiedergegeben; sie wird von Strecken und Kreisbögen begrenzt.

- Zeige, dass die Grundfläche der Säule den Inhalt  $3a^2$  besitzt.
- Für welchen Wert von  $a$  fasst der Wasserbehälter einen Liter?
- Bei einem anderen Wasserbehälter dieser Form ist  $a = 6$  cm. Das Innere des oben offenen Behälters trägt eine Schutzschicht gegen das Verkalken. Ein Quadratdezimeter dieses Belags kostet 0,85 €. Welche Kosten entstehen durch diesen Schutzbelag?



Figur 1

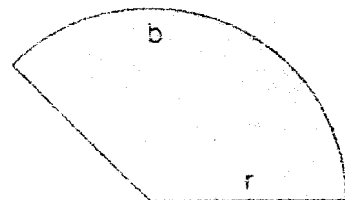


Figur 2

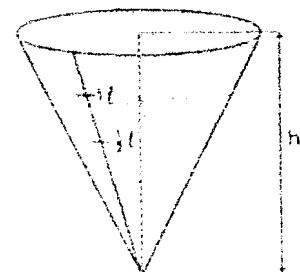
**Aufgabe 20: Kegel**

Der Kreisausschnitt aus Figur 1 hat den Radius  $r = 21,54$  cm und den Bogen  $b = 50,27$  cm.

- Berechne seinen Flächeninhalt und seinen Mittelpunktswinkel.
- Aus dem Kreisausschnitt in Figur 1 wird (ohne Überlappung) ein Messbecher wie in Figur 2 geformt. Zeige: Die Höhe  $h$  des Messbechers beträgt gerundet 20 cm.
- Welches Volumen hat dieser Messbecher?
- Der Messbecher soll längs einer Mantellinie mit Markierungen für die Füllmengen 1/2 Liter und 1 Liter versehen werden (siehe Figur 2). Welchen Abstand haben diese beiden Markierungen voneinander?



Figur 1



Figur 2

