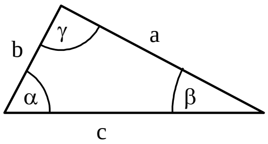
2.11. Prüfungsaufgaben zur Trigonometrie

Rechtwinklige Dreiecke
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit der Hypotenuse c sind die Kathete b = 45 m und der Winkel β = 61° gegeben. Berechne die beiden fehlenden Seiten a und c sowie den Winkel α.
Lösung

$c = \dfrac{b}{\sin\beta}$ = 51,45 cm, α = 90° – 61° = 29°, a = c·sin(α) = 45 cm

Rechtwinklige Dreiecke
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Hypotenuse c = 100 m und die Kathete b = 45 m gegeben. Berechne die fehlende Seite a sowie die Winkel α und β.



Lösung

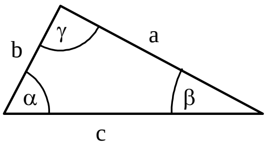
$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(100\text{ m})^2 - (45\text{ m})^2} \approx 89{,}30\text{ m}$

$\beta = \sin^{-1}\left(\dfrac{b}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{45\text{ m}}{100\text{ m}}\right) \approx 26{,}74°$

$\alpha = 90° - \beta \approx 63{,}26°$

Rechtwinklige Dreiecke
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind der Winkel α = 41,4° und die Kathete b = 17,3 m gegeben. Berechne die fehlenden Seiten a und c sowie den Winkel β.
Lösung

$\beta = 90° - \alpha \approx 48{,}6°$



$c = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{17{,}3\text{ m}}{\sin(41{,}4°)} \approx 23{,}06\text{ m}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(23{,}06\text{ m})^2 - (17{,}3\text{ m})^2} \approx 15{,}21\text{ m}$

Rechtwinklige Dreiecke
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten a = 6,2 m und b = 2,5 m gegeben. Berechne die fehlende Hypotenuse c sowie die Winkel α und β.
Lösung

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(6{,}2\text{ m})^2 - (2{,}5\text{ m})^2} \approx 6{,}68\text{ m}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{6{,}2\text{ m}}{2{,}5\text{ m}}\right) \approx 68{,}04°$

$\beta = 90° - \alpha \approx 21{,}96°$

Rechtwinklige Dreiecke
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Katheten a = 6,2 m und der Winkel α = 52° gegeben. Berechne die fehlenden Seiten b und c sowie den Winkel β.
Lösung

$\beta = 90° - \alpha = 38°$

$c = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{6{,}2\text{ m}}{\sin(52°)} \approx 7{,}87\text{ m}$

$b = c\cdot\sin(\beta) \approx 8{,}87\text{ m}\cdot\sin(38°) \approx 4{,}84\text{ m}$

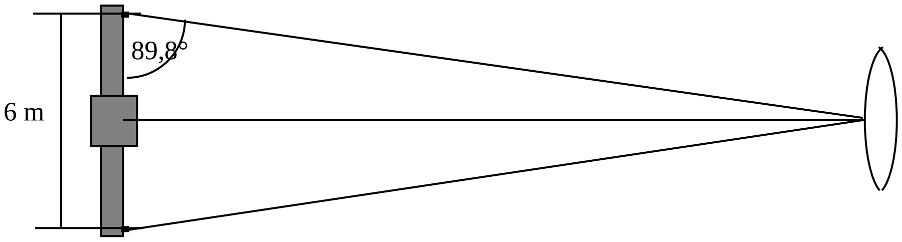
Rechtwinklige Dreiecke
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Kathete a = 6,2 m und der Winkel β = 49° gegeben. Berechne die fehlenden Seiten b und c sowie den Winkel α.
Lösung

$\alpha = 90° - \beta \approx 41°$

$c = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{6{,}2\text{ m}}{\sin(41°)} \approx 9{,}45\text{ m}$

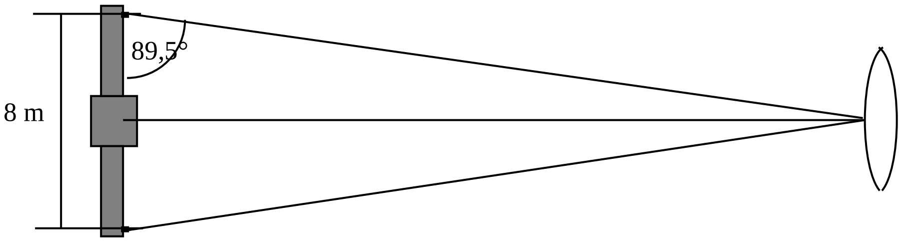
$b = c\cdot\sin(\beta) \approx 9{,}45\text{ m}\cdot\sin(49°) \approx 7{,}13\text{ m}$

Entfernungen (2)
Vor der Erfindung des Radars bestimmte man Entfernungen auf See ähnlich wie Menschen und andere Tiere mit zusammenhängendem Sehfeld durch Winkelmessung an einem Paar „Augen“ in teilweise sehr großen optischen Entfernungsmessern. Wie weit ist das Schiff unten vom Entfernungsmesser entfernt?



Lösung
d = 3 m·tan(89,8°) ≈ 859,43 m

Entfernungen (2)
Vor der Erfindung des Radars bestimmte man Entfernungen auf See ähnlich wie Menschen und Vögel durch Winkelmessung an einem Paar „Augen“ in teilweise sehr großen optischen Entfernungsmessern. Wie weit ist das Schiff unten vom Entfernungsmesser entfernt?

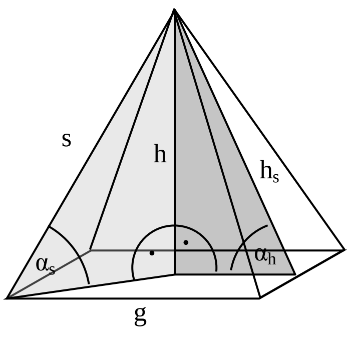


Lösung
d = 4 m·tan 89,5° = 458,35 m

Steigungswinkel
Wie groß ist der Steigungswinkel einer Rampe, die auf einer Strecke von 20 m eine Höhe von 3 m erreicht ?
Lösung
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{20}\right) \approx 8{,}53°$.

Steigungswinkel
Wie groß ist der Steigungswinkel einer Rampe, die auf einer Strecke von 100 m eine Höhe von 5 m erreicht?
Lösung
$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{100}\right) \approx 2{,}86°$.

Pyramiden
Berechne die übrigen Größen s, h, h_s und α_h einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Seitenkanten einen Neigungswinkel von $\alpha_s = 50°$ zur Grundfläche besitzen und deren Grundseite g = 10 cm lang ist.
Lösung



Diagonale d = $\sqrt{2}\,g \approx 14{,}14$ cm

Höhe h = $\frac{\frac{1}{2}d}{\tan(\alpha_s)} \approx \frac{7{,}07\text{ cm}}{\tan(50°)} \approx 8{,}42$ cm

Seitenlänge s = $\frac{\frac{1}{2}d}{\cos(\alpha_s)} \approx \frac{7{,}07\text{ cm}}{\cos(50°)} \approx 11{,}06$ cm

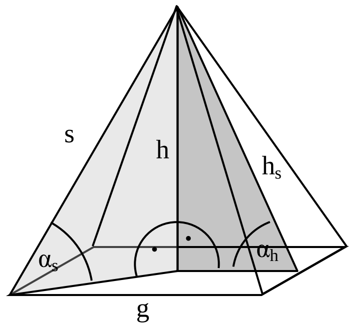
Seitenhöhe h_s = $\sqrt{h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2} \approx \sqrt{(8{,}42\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} \approx 9{,}79$ cm

Seitenwinkel $\alpha_h \approx \sin^{-1}\left(\frac{h}{h_s}\right) \approx \sin^{-1}\left(\frac{8{,}42\text{ cm}}{9{,}79\text{ cm}}\right) \approx 59{,}20°$

Pyramiden

Berechne die übrigen Größen s, g, h_s und α_s einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Seitenflächen einen Neigungswinkel von $\alpha_h = 50°$ zur Grundfläche besitzen und deren Höhe h = 5 cm beträgt.

Lösung



Grundseite $g = \dfrac{2h}{\tan(\alpha_h)} = \dfrac{10\text{ cm}}{\tan(50°)} \approx 8{,}39$ cm

Diagonale $d = \sqrt{2}\,g \approx 11{,}87$ cm

Seitenlänge $s = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2} \approx \sqrt{(5\text{ cm}^2 + (5{,}93\text{ cm})^2} \approx 7{,}76$ cm

Seitenhöhe $h_s = \dfrac{h}{\sin(\alpha_h)} = \dfrac{5\text{ cm}}{\sin(50°)} \approx 6{,}53$ cm

Kantenwinkel $\alpha_s \approx \sin^{-1}(\dfrac{h}{s}) \approx \sin^{-1}(\dfrac{5\text{ cm}}{7{,}76\text{ cm}}) \approx 40{,}12°$

Würfel (6)

Die Oberfläche eines Würfels beträgt 384 cm.

a) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante a! (2)
b) Berechnen Sie die Länge einer Raumdiagonalen! (2)
c) Wie groß ist der Winkel α, den die Raumdiagonale mit einer Flächendiagonalen einschließt? (2)

Lösung

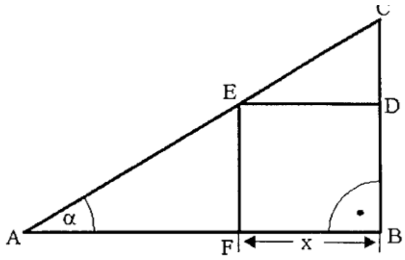
Oberfläche $O = 6a^2 \Leftrightarrow$ Seitenkante $a = \sqrt{\dfrac{O}{6}} = \sqrt{64} = 8$ cm

Flächendiagonale $d_f = \sqrt{(8\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2} \approx 11{,}31$ cm

Raumdiagonale $d = \sqrt{(11{,}31\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2} \approx 13{,}86$ cm

Winkel $\alpha = \sin^{-1}(\dfrac{8\text{ cm}}{13{,}86\text{ cm}}) \approx 35{,}25°$

Rechtwinklige Dreiecke mit Strahlensatz (6)



Von dem rechtwinkligen Dreieck ABC (vgl. Skizze) sind gegeben:
AB = 7,5 cm und BC = 4 cm

a) Berechne den Winkel α (2)
b) In das Dreieck ABC wird das Quadrat BDEF eingezeichnet (siehe Skizze). Berechne die Seitenlänge x. (4)

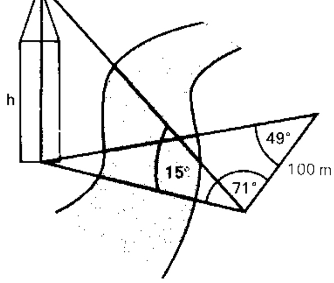
Lösung

$\alpha = \tan^{-1}(\dfrac{4\text{ cm}}{7{,}5\text{ cm}}) \approx 28{,}07°$

$\dfrac{4\text{ cm}}{7{,}5\text{ cm}} = \dfrac{x}{7{,}5\text{ cm} - x} \Leftrightarrow 4\cdot(7{,}5\text{ cm} - x) = 7{,}5\cdot x \Leftrightarrow 30\text{ cm} = 11{,}5\,x \Leftrightarrow x \approx 2{,}61$ cm

Sinussatz (4)

Um die Höhe eines Turmes, der jenseits eines Flusses liegt, zu bestimmen, werden eine Reihe von Messungen vorgenommen, die aus der nebenstehenden Skizze hervorgehen. Berechne die Höhe des Turms.



Lösung

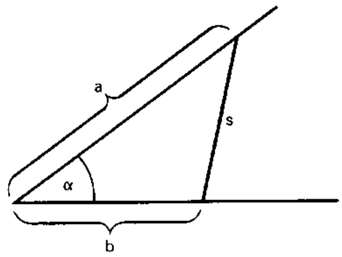
$\gamma = 180° - 49° - 71° = 60°$

$\Rightarrow c = a\cdot\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 100\text{ m}\cdot\dfrac{\sin 49°}{\sin 60°} = 87{,}15$ m

$\Rightarrow h = c\cdot\tan 15° = 23{,}36$ m

Kosinussatz (4)

Zwischen zwei Balken, die den Winkel $\alpha = 60°$ bilden, soll zur Stabilisierung ein weiterer Balken der Länge $s = 7$ m eingezogen werden (siehe Skizze). Aus ästhetischen Gründen sollen dabei die beiden Strecken a und b im Verhältnis a:b = 3:2 zueinander stehen.



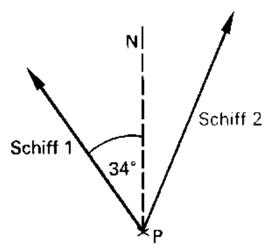
Lösung

$7^2 = a^2 + (1{,}5a)^2 - 2\cdot a\cdot 1{,}5a\cdot\cos 60° \Leftrightarrow 49 = 1{,}75a^2 \Leftrightarrow a = \pm 2\sqrt{7} \Rightarrow a \approx 5{,}3$ m

$\Rightarrow b = 1{,}5\cdot a = 3\sqrt{7} \approx 7{,}94$ m

Kosinussatz (5)

Vom Punkt P fährt ein Schiff den Kurs N 34° W mit einer Geschwindigkeit von 35 km/h . Ein zweites Schiff verlässt P eine Stunde später unter dem Kurs N 26° O mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h (siehe Skizze). Nach welcher Zeit t (von der Abfahrt des ersten Schiffes an gerechnet) sind die beiden Schiffe 77,5 km voneinander entfernt?

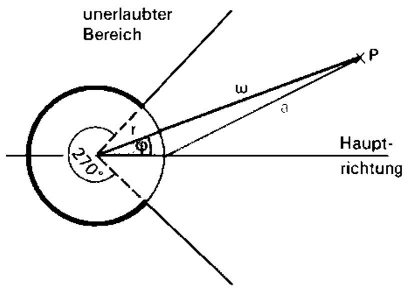


Lösung

$77{,}5^2 = (35(t+1))^2 + (40t)^2 - 2\cdot 35(t+1)\cdot 40t\cdot\cos 60° \Leftrightarrow 0 = 1425t^2 - 175t - 4737{,}25 \Rightarrow t_1 = 1{,}89b$ h und $t_2 < 0$

Kosinussatz (5)

In der Leichtathletik wird der Diskus s aus einem Kreis mit Radius r geworfen und soll dann in einem Sektor mit dem Mittelpunktswinkel 90° (Viertelkreis) auftreffen. Landet der Diskus im Punkt P neben der Hauptrichtung, so wird nicht die Strecke a gemessen, sondern nur die Länge w.



a) Bestimme die Wurfweite w in Abhängigkeit von a, r und φ.

Ergebnis: $w = \sqrt{a^2 - (\sin\varphi)^2 r^2} - r(1 - \cos\varphi)$

b) Begründe mit Hilfe des Ergebnisses von a), dass $w \neq a$ ist!

Lösung

$a^2 = (w+r)^2 + r^2 - 2\cdot(w+r)\cdot r\cdot\cos\varphi \Rightarrow 0 = w^2 + 2r(1-\cos\varphi)w + 2r^2(1-\cos\varphi) - a^2 \Rightarrow w_{1/2} = -r(1-\cos\varphi) \pm r\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 - 2 + 2\cos\varphi + a^2} = \sqrt{a^2 - (\sin\varphi)^2 r^2} - r(1-\cos\varphi)$

Kosinussatz (8)

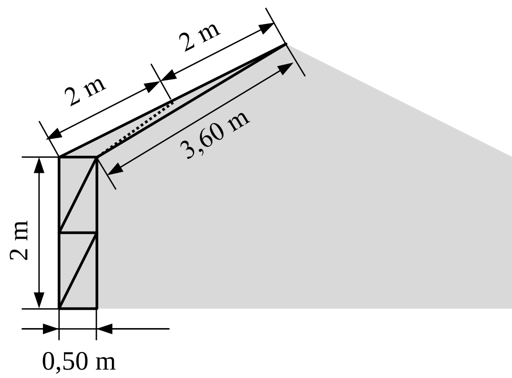
Ein Zelt wird durch kreisförmig aufgestellte Gerüstelemente mit den rechts angegebenen Maßen gestützt.

a) Berechnen Sie die Länge der punktiert gezeichneten Querstrebe. (2)

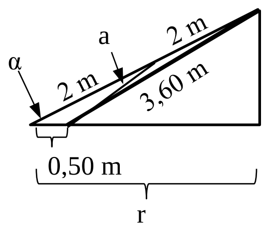
b) Berechnen Sie die Breite und die Höhe des Zeltes. (3)

c) Ein Quadratmeter Zeltplane wiegt 2 kg. Wie schwer ist die gesamte Plane ohne Überlappungen und ohne Bodenfläche? (2)

d) Zum Heizen rechnet man mit jeweils einem Heizlüfter für zwanzig Kubikmeter Rauminhalt. Wie viele Heizlüfter müssen mindestens gemietet werden? 2



Lösungen:



a) $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{4^2 + 0{,}5^2 - 3{,}6^2}{2\cdot 4\cdot 0{,}5}\right) = \cos^{-1}(0{,}8225) \approx 34{,}66°.$ (1)

$a = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2 - 2\cdot 2\cdot 0{,}5\cdot\cos(34{,}66°)}$ m $\approx 2{,}43$ m. (1)

b) $r \approx \cos(34{,}66°)\cdot 4$ m $\approx 0{,}8225\cdot 4$ m $\approx 3{,}29$ m. (1)

$h \approx \sin(34{,}66°)\cdot 4$ m $\approx 2{,}26$ m. (1)

Das Zelt ist also h + 2 m = 4,26 m hoch und 2r = 6,58 m breit (1)

c) $M = M_Z + M_K = 2\pi r\cdot 2$ m $+ \pi\cdot r\cdot 4$ m $\approx 2\cdot 41{,}34$ m^2 (!) $= 82{,}68$ m^2 (1)

Die Zeltplane wiegt also 2 kg/m$^2\cdot 82{,}68$ m^2 = 165,34 kg (1)

d) $V = V_Z + V_K = \pi r^2\cdot 2$ m $+ \dfrac{1}{3}\pi r^2\cdot h \approx 68{,}01$ m^3 + 25,62 m^3 = 93,63 m^3 (1)

Man benötigt also 93,63 : 20 ≈ 5 Heizlüfter. (1)