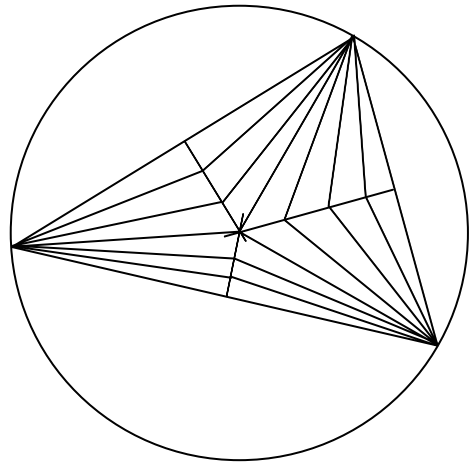
2.5. Dreieckskonstruktionen

2.5.1. Der Umkreis eines Dreiecks

Satz:
Die **Mittelsenkrechten** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der den gleichen Abstand zu allen drei Seiten hat.
Er ist der Mittelpunkt des **Umkreises**, d.h., des kleinsten Kreises, der außerhalb des Dreiecks gezeichnet werden kann.

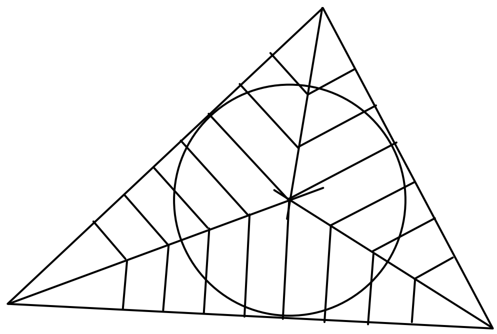


Beweis:
Jeder Punkt einer Mittelsenkrechten hat den gleichen Abstand zu den beiden benachbarten Eckpunkten. Der gemeinsame Punkt zweier Mittelsenkrechten hat daher den gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten. Daher muss er auch auf der dritten Mittelsenkrechten liegen. Außerdem ist er der Mittelpunkt eines Kreises, der durch alle drei Eckpunkte geht. Jede Verschiebung des Kreises führt zum Schnitt mit dem Dreieck. Er ist also der kleinste mögliche Kreis außerhalb des Dreiecks.

Übungen: Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen Nr. 1 und 2

2.5.2. Der Inkreis eines Dreiecks

Satz:
Die **Winkelhalbierenden** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der den gleichen Abstand zu allen drei Seiten hat.
Er ist der Mittelpunkt des **Inkreises**, d.h., des größten Kreises, der innerhalb des Dreiecks gezeichnet werden kann.

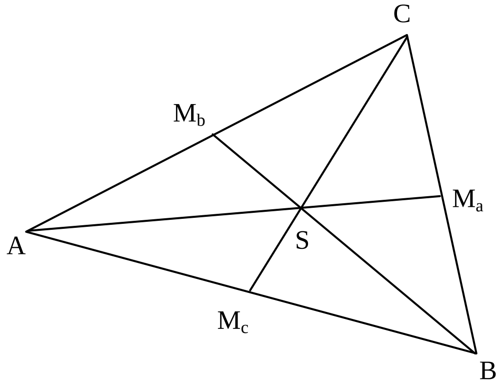


Beweis:
Jeder Punkt einer Winkelhalbierenden hat den gleichen Abstand zu den beiden Schenkeln. Der gemeinsame Punkt zweier Winkelhalbierenden hat daher den gleichen Abstand zu allen drei Seiten. Daher muss er auch auf der dritten Winkelhalbierenden liegen. Außerdem ist er der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Seiten berührt. Jede Verschiebung des Kreises führt zum Schnitt mit einer der Seiten. Er ist also der größte mögliche Kreis innerhalb des Dreiecks.

Übungen: Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen Nr. 3 - 6

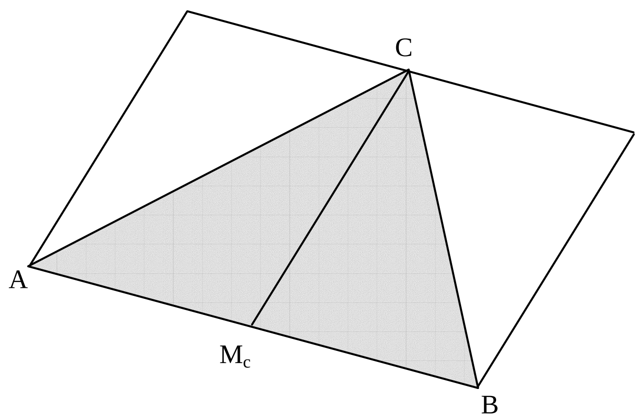
2.5.3. Der Schwerpunkt eines Dreiecks

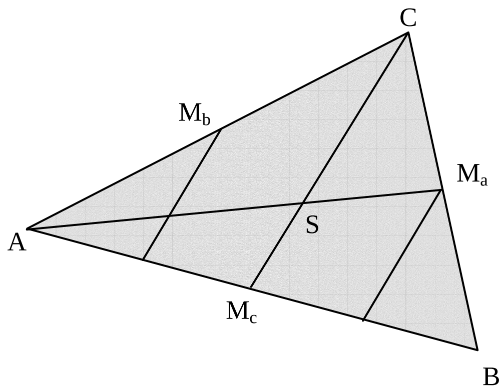
Satz:
Die **Seitenhalbierenden** eines Dreiecks sind **Flächenhalbierenden**.
Sie schneiden sich im Verhältnis 2 : 1 in einem Punkt S. Alle möglichen Flächen-halbierenden gehen ebenfalls durch diesen Punkt. Er ist der **Schwerpunkt** des Dreieckes



Beweis:

1. **Die Seitenhalbierenden sind auch Flächenhalbierenden**, da die beiden Dreieckshälften als Hälften des gleichen Parallelogramms betrachtet werden können
2. Die beiden Parallelen durch die Seitenmitten M_b und M_a zur Seitenhalbierenden CM_c teilen die beiden Hälften AM_c und BM_c wieder in zwei gleich große Abschnitte. Die Strecke AB wird also durch die drei Parllelen in vier gleich große Abschnitte geteilt. Dann sind aber auch die drei Abschnitte auf der Seitenhalbierenden AM_a gleichgroß, d.h., **die Seitenhalbierenden AM_a und CM_c schneiden sich im Verhältnis 2: 1**.
3. Dann müssen sich auch die Seitenhalbierenden CM_c und BM_b im gleichen Verhältnis schneiden, d.h., **alle Seitenhalbierenden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt S.**
4. Da die Seitenhalbierenden auch Flächenhalbierenden sind, lässt sich das Dreieck von zwei beliebigen Punkten lagern, die auf einer Seitenhalbierenden auf verschiedenen Seiten des Schnittpunktes S liegen. Lässt man die beiden Unterstützungspunkte von beiden Seiten auf S zulaufen, bleibt das Dreieck weiter in Ruhe, bis beide Unterstützungspunkte im Punkt S liegen. Es lässt sich also im Punkt S und insbesondere auf jeder Gerade durch S lagern, d.h. **jede Gerade durch S ist ebenfalls Flächenhalbierende.**



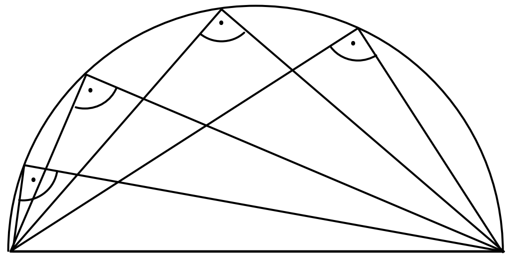


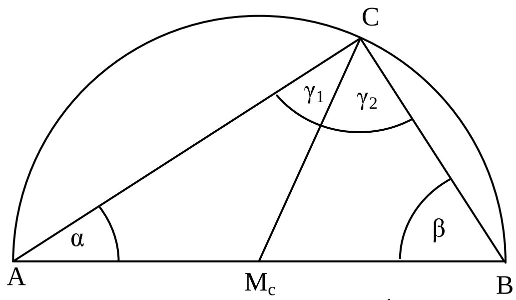
Übungen: Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen Nr. 7 - 9

2.5.4. Der Satz des Thales

Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen Nr. 10

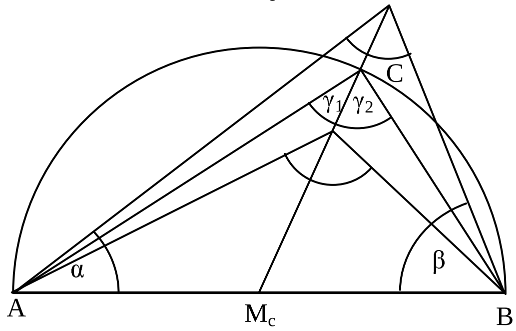
Satz des Thales:
Wenn der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Seite liegt, dann hat das Dreieck einen rechten Winkel.
Beweis:
Wegen $\overline{CM_c} = \frac{1}{2}c$ sind die Dreiecke AM_cC und M_cBC gleichschenklig mit $\gamma_1 = \alpha$ und $\gamma_2 = \beta$. Aus der Winkelsumme im Dreieck folgt dann $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 = 2\gamma_1 + 2\,\gamma_2 \Leftrightarrow 90° = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$.





Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen Nr. 11

Umkehrung des Satzes des Thales
Wenn das Dreieck einen rechten Winkel hat, dann liegt der Mittelpunkt des Umkreises auf einer Seite.
Beweis:
Betrachte die Schenkel der Dreiecke AM_cC und M_cBC: Im Fall von $\overline{CM_c} < \overline{AM_c} = \overline{BM_c}$ ist $\alpha > \gamma_1$ und $\beta > \gamma_2$, also $\alpha + \beta > \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = 90°$. Das ist nicht möglich, weil nach Voraussetzung $\alpha + \beta = 90°$ sein muss. Im umgekehrten Fall von $\overline{CM_c} > \overline{AM_c} = \overline{BM_c}$ ist $\alpha < \gamma_1$ und $\beta < \gamma_2$, also $\alpha + \beta < \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma = 90°$ was ebenfalls nicht möglich ist. Also muss $\overline{CM_c} = \overline{AM_c} = \overline{BM_c}$ sein.



Übungen: Aufgaben zu Dreieckskonstruktionen Nr. 12 - 15