2.6. Anwendungs- und Beweisaufgaben zu Kongruenzsätzen

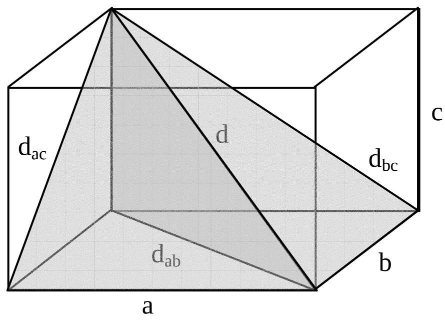
Aufgabe 1

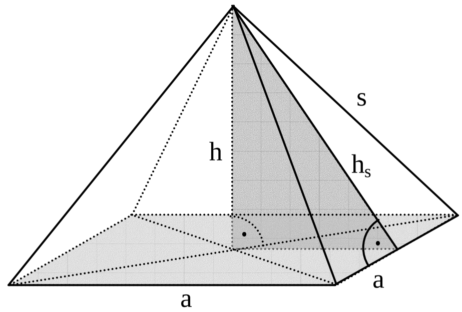
a) Ermittle zeichnerisch die Längen der drei Flächendiagonalen d_{ab}, d_{ac} und d_{bc} und der Raumdiagonalen d des abgebildeten Quaders mit den Abmessungen a = 4 cm, b = 3 cm und c = 2 cm.

b) Die abgebildeten Pyramide I hat eine quadratischer Grundfläche mit der Seitenlänge a = 6 cm. Die schrägen Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge s = 5 cm. Ermittle zeichnerisch die Seitenhöhe h_s und die Höhe h. Berechne dann den Inhalt ihrer Mantelfläche.

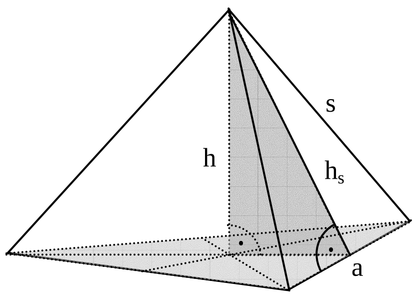
c) Die Grundfläche der abgebildeten Pyramide II ist ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a = 3 cm. Die schrägen Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge s = 4 cm. Ermittle zeichnerisch die Seitenhöhe h_s und die Höhe h. Berechne dann den Inhalt ihrer Mantelfläche.

d) Die Grundfläche der abgebildeten Pyramide III ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 6 cm. Die schrägen Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke mit der Schenkellänge s = 5 cm. Die Spitze befindet sich senkrecht über dem Schwerpunkt der Grundfläche. Ermittle zeichnerisch die Seitenhöhe h_s und die Höhe h. Berechne dann den Inhalt ihrer Mantelfläche.

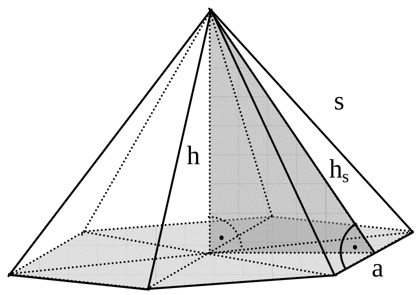




Pyramide I



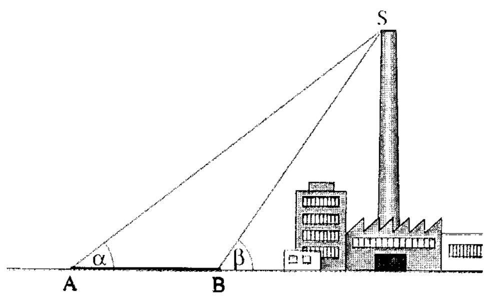
Pyramide III



Pyramide II

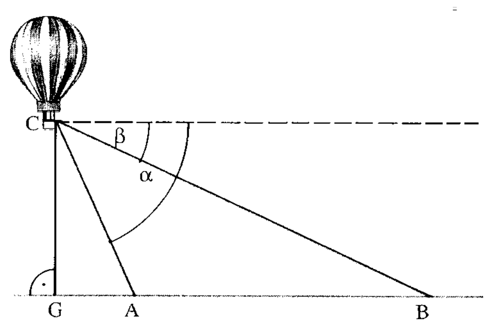
Aufgabe 2

Von zwei 40 m voneinander entfernten Punkten A und B wird die Spitze eines Fabrikschornsteins unter den Höhenwinkel α = 38° und β = 56° angepeilt. Zeichne das Dreieck ABS im passenden Maßstab. Wie hoch ist der Schornstein?

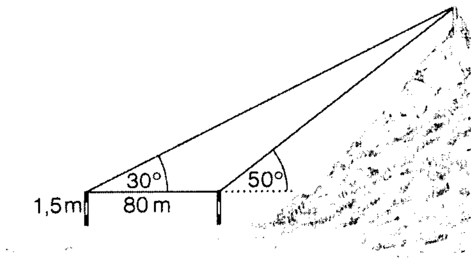


Aufgabe 3

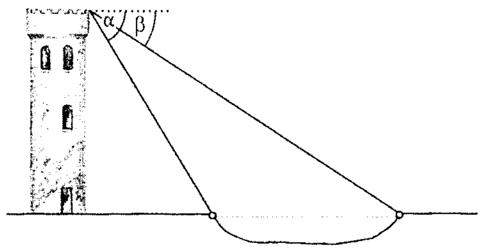
Von einem Freiballon aus werden die Punkte A und B unter den Tiefenwinkeln α = 66° und β = 24° angepeilt. Wie hoch schwebt der Ballon über dem Punkt G, wenn $\overline{AB}$ = 2700m ist? Berechne hierzu die Winkel bei B und C; zeichne im Maßstab 1 : 50 000 und miss dann die Höhe.



Aufgabe 4
Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen der Ebene und dem Berggipfel? Zeichne im Maßstab 1 : 2000.



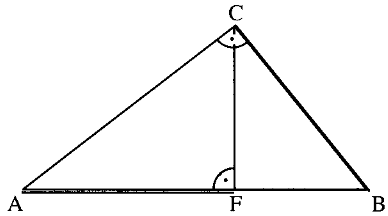
Aufgabe 5
Der rechts abgebildete Turm ist in Wirklichkeit 26 m hoch. Wie breit ist der an ihm vorbei fließende Fluss, wenn $\alpha = 65°$ und $\beta = 28°$ sind? Zeichne im Maßstab 1:100.



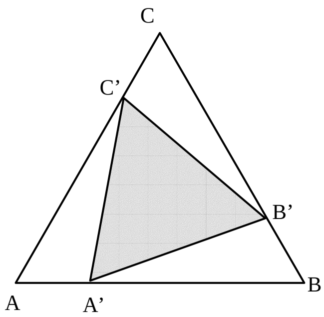
Aufgabe 6
Beweise: Rechtwinklige Dreiecke, die in der längsten und in einer weiteren Seite übereinstimmen, sind kongruent.

Aufgabe 7
Beweise: Wenn in einem Dreieck die Orthogonale zu einer Dreiecksseite durch die gegenüberliegende Ecke zugleich Winkelhalbierende ist, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

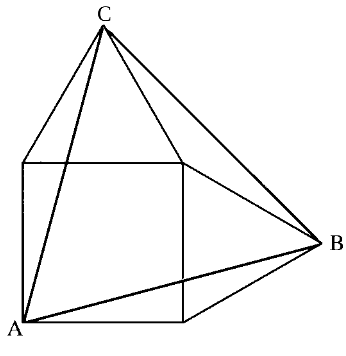
Aufgabe 8
In dem rechts abgebildeten rechtwinkligen Dreieck ABC sind die Strecken AF und BC gleich lang. Zeige: In einem solchen Dreieck stimmt der Abstand des Höhenfußpunktes F von AC mit der Länge der Strecke FB überein.



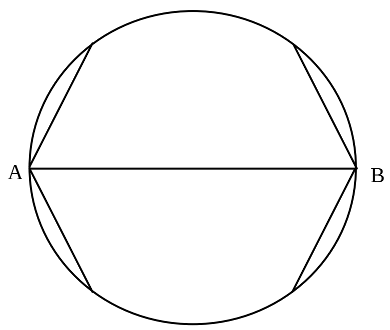
Aufgabe 9
In dem gleichseitigen Dreieck ABC werden drei gleich lange Strecken AA’, BB’ und CC’ abgetragen. Zeige, dass das Dreieck A’B’C’ ebenfalls gleichseitig ist.



Aufgabe 10
Über zwei benachbarten Seiten des rechts abgebildeten Quadrates wurden gleichseitige Dreiecke konstruiert. Beweise: Das Dreieck ABC ist gleichseitig.



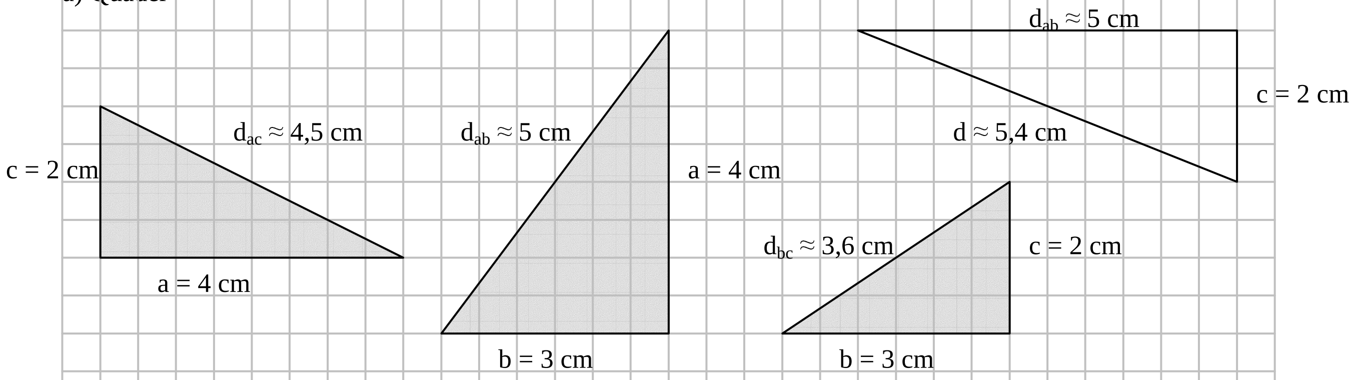
Aufgabe 11
In einen Kreis wird ein Durchmesser AB gezeichnet und von den Punkten A und B aus vier gleich lange Sehnen. Zeige, dass jeweils gegenüber liegende Sehnen parallel sind.



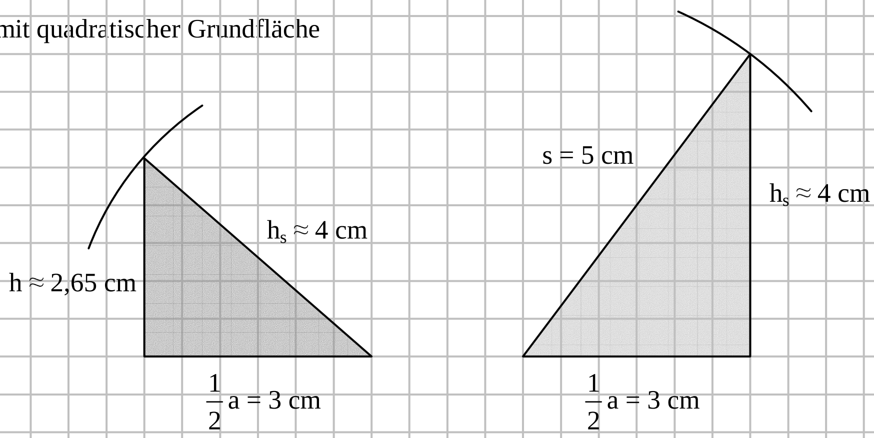
2.6. Lösungen zu den Anwendungs- und Beweisaufgaben zu Kongruenzsätzen

Aufgabe 1

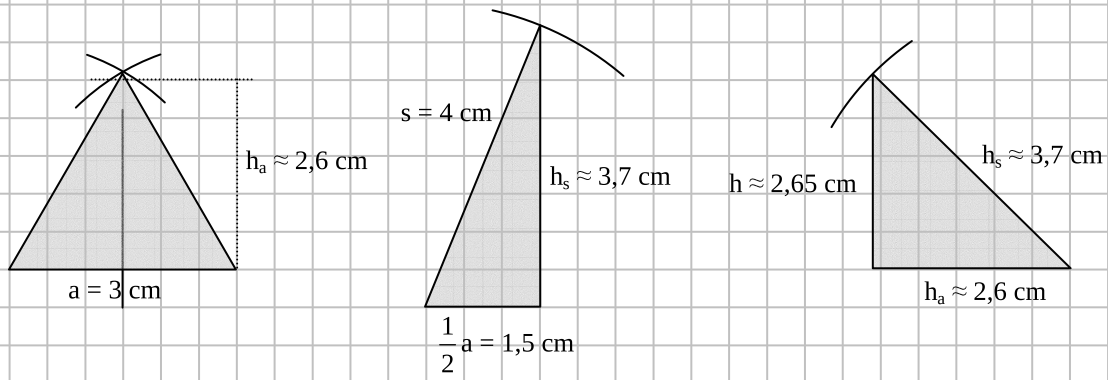
a) Quader



b) Pyramide I mit quadratischer Grundfläche

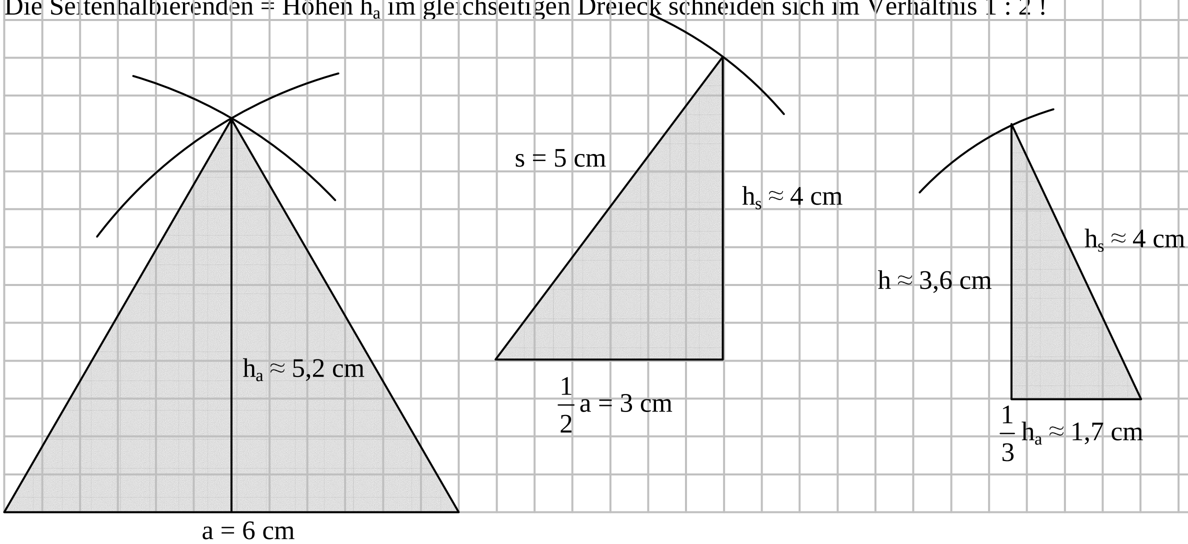


c) Pyramide II mit sechseckiger Grundfläche

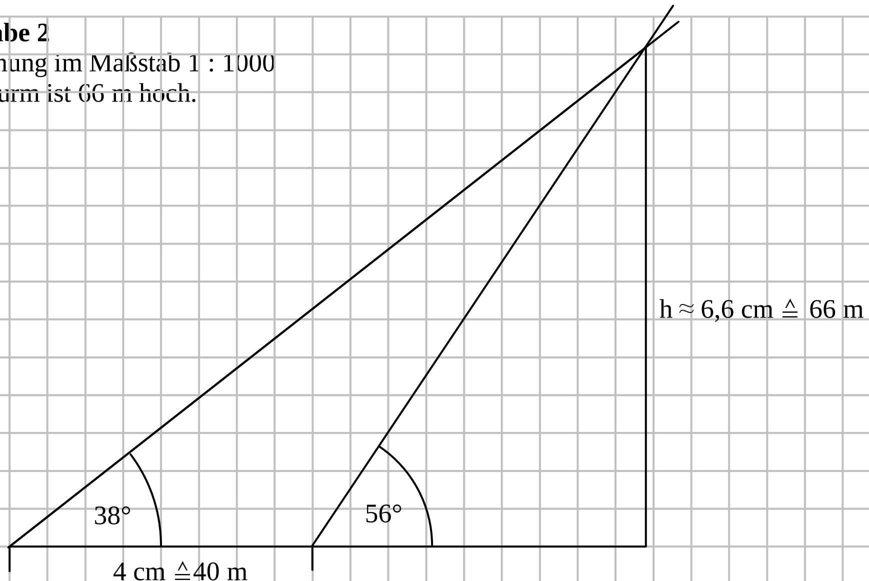


d) Pyramide III mit dreieckiger Grundfläche

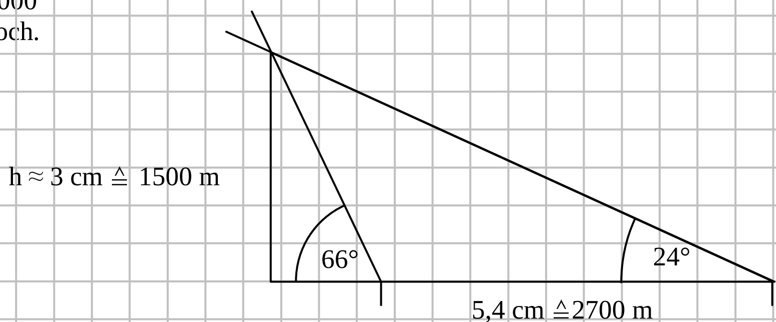
Die Seitenhalbierenden = Höhen h_a im gleichseitigen Dreieck schneiden sich im Verhältnis 1 : 2 !



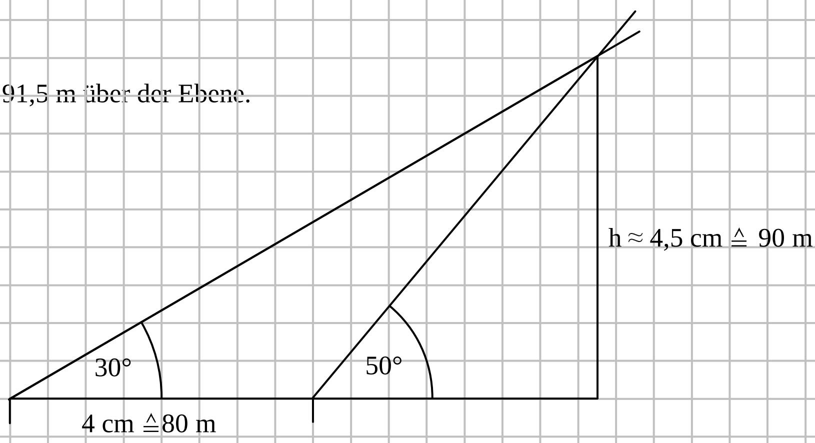
Aufgabe 2
Zeichnung im Maßstab 1 : 1000
Der Turm ist 66 m hoch.



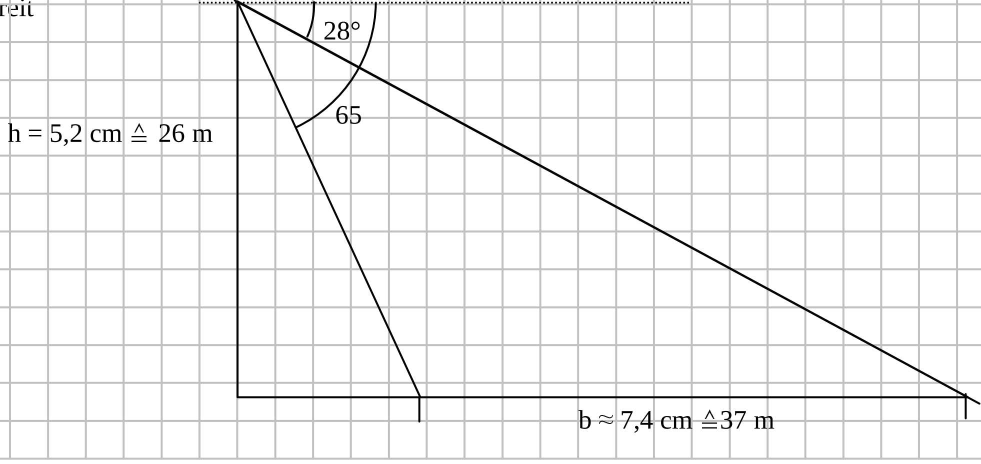
Aufgabe 3
Zeichnung im Maßstab 1 : 50 000
Der Ballon schwebt 1500 m hoch.



Aufgabe 4
Zeichnung im Maßstab 1 : 2000
Der Berggipfel ist 90 m + 1,5 m = 91,5 m über der Ebene.



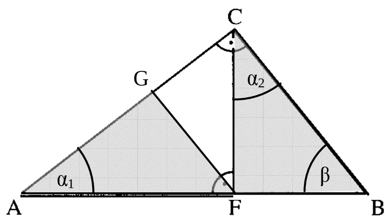
Aufgabe 5
Zeichnung im Maßstab 1 : 500
Der Fluss ist 37 m breit



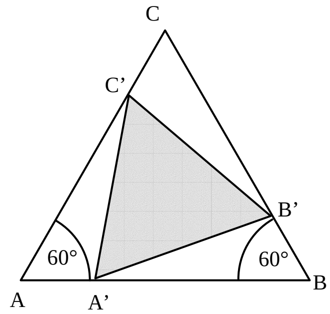
Aufgabe 6
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die längste Seite die dem rechten Winkel gegenüber liegende Hypotenuse. Nach dem Kongruenzsatz ssw ist das Dreieck durch die Hypotenuse, eine Kathete und den rechten Winkel bis auf Kongruenz eindeutig festgelegt.

Aufgabe 7
Die durch die Orthogonale = Winkelhalbierende gebildeten Teildreiecke stimmen in dem halbierten Winkel, in dem rechten Winkel und in der dazwischen liegenden Seite (der Orthogonalen) überein. Nach dem Kongruenzsatz wsw sind sie also kongruent und insbesondere die beiden Schenkel sind gleich lang

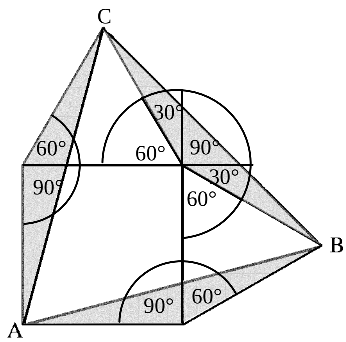
Aufgabe 8
In dem rechtwinkligen Dreieck ABC ist $\alpha_1 + \beta = 90°$ und in dem ebenfalls rechtwinkligen Dreieck CFB gilt $\alpha_2 + \beta = 90°$. Die beiden grauen Teildreiecke stimmen also in ihren rechten Winkeln sowie im Winkel $\alpha_1 = \alpha_2$, und den Seitenlängen $\overline{AF} = \overline{BC}$ überein und sind wegen des Kongruenzsatzes sww kongruent. Insbesondere folgt daraus $\overline{FG} = \overline{FB}$.



Aufgabe 9
Die beiden Dreiecke AA'C' und BB'A' stimmen in dem Winkel 60° und den beiden Seitenlängen $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ und $\overline{AC'} = \overline{BA'}$ überein und sind daher nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Insbesondere folgt daraus $\overline{A'C'} = \overline{A'B'}$. Aus dem gleichen Grund sind auch die Dreiecke BB'A' und CC'B' kongruent, so dass auch $\overline{B'C'} = \overline{A'B'}$ gilt.



Aufgabe 10
Die drei nach Konstruktion gleichschenkligen grauen Dreiecke stimmen in den beiden Schenkeln und dem jeweils eingeschlossenen Winkel 90° + 60° = 30° + 90° + 30° überein und sind nach dem Kongruenzsatz sws kongruent. Die Basislängen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ stimmen daher ebenfalls überein.



Aufgabe 11
Nach dem **Satz des Thales** sind die beiden grauen Dreiecke rechtwinklig. Nach Konstruktion stimmen sie außerdem in dern Länge der Hypotenuse und einer Kathete (=Sehne) überein und sind daher nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Insbesondere ist dann $\alpha_1 = \alpha_2$. Für die **Scheitelwinkel** an B gilt $\alpha_2 = \alpha_3$. Die **Stufenwinkel** α_1 und α_3 der Geraden (AB) durch die beiden Sehnen sind also gleiche, d.h., die Sehnen sind parallel.