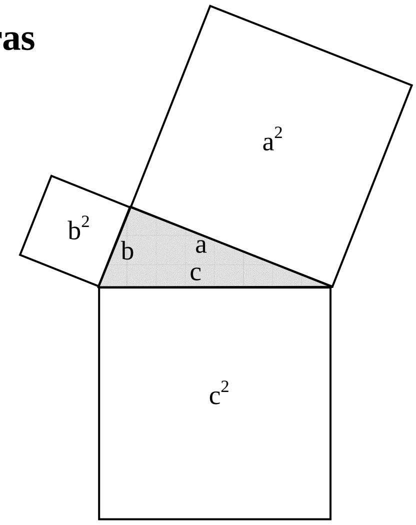
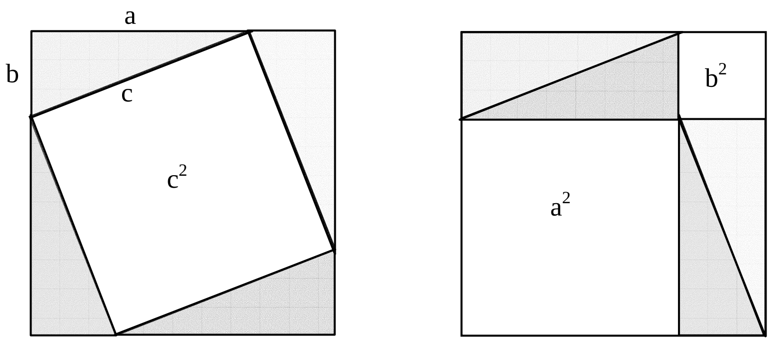
2.8. Der Satz des Pythagoras



2.8.1. Der Satz des Pythagoras

Satz des Pythagoras:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, **dann** ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat: $c^2 = a^2 + b^2$.

Beweis:
Wenn man an den Ecken eines Quadrates vier gleiche (**kongruente**) rechtwinklige Dreiecke abschneidet, hat das restliche Quadrat den Flächeninhalt c^2. Durch Umordnen der Dreiecke erhält man zwei Restquadrate mit den Flächen a^2 und b^2, die die gleiche Fläche einnehmen wie das ursprüngliche Quadrat: $c^2 = a^2 + b^2$.

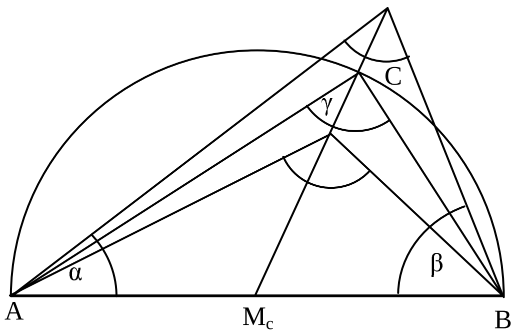


Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 1 - 3

2.8.2. Umkehrung des Satzes des Pythagoras:

Satz:
Wenn in einem Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, **dann** ist es rechtwinklig.

Beweis:
Betrachte wieder die Figur für den Beweis der Umkehrung des Satzes des Thales: Falls $\gamma < 90°$ ist, liegt C **außerhalb** des Thaleskreises. Die Seiten a und b sind **länger** als beim rechtwinkligen Dreieck, d.h. $a^2 + b^2 > c^2$. Falls $\gamma > 90°$ ist, liegt C **innerhalb** des Thaleskreises. und die Seiten a und b sind **kürzer** als beim rechtwinkligen Dreieck, d.h. $a^2 + b^2 < c^2$. Da nach Voraussetzung aber $a^2 + b^2 = c^2$ gelten soll, muss C genau auf dem Thaleskreis liegen, d.h. $\gamma = 90°$.

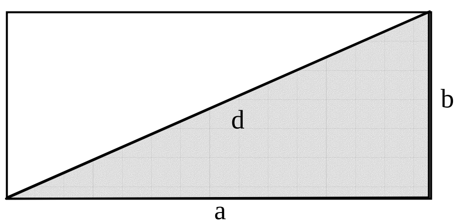


Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 4 - 5

2.8.3. Diagonale eines Rechtecks

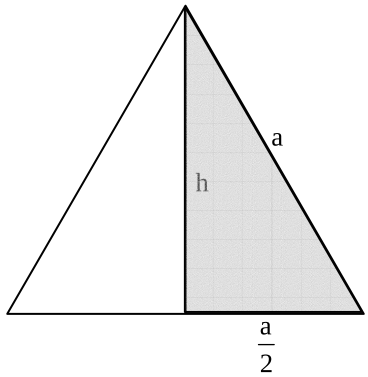
Satz:
Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat die Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Beweis:
Nach Pythaogoras ist $d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 6 - 7

2.8.4. Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks

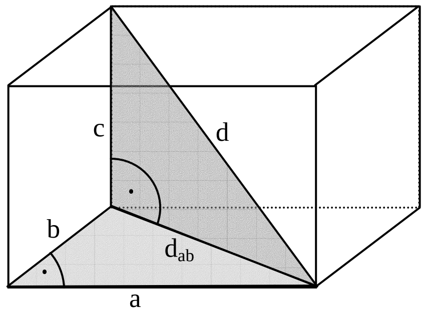


Satz:
Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a hat die Höhe $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$ und den Flächeninhalt $A = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$.

Beweis:
Nach Pythagoras ist $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$ und $A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$.

Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 8 - 18

2.8.5. Raumdiagonale eines Quaders



Satz:
Ein Quader mit den Kantenlängen a, b, und c hat die Raumdiagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Beweis:
Nach Pythagoras ist
die Flächendiagonale (Hypotenuse des hellen Dreiecks) $d_{ab}^2 = a^2 + b^2$ und die Raumdiagonale (Hypotenuse des dunklen Dreiecks) $d^2 = d_{ab}^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Übungen: Aufgaben zum Satz des Pythagoras Nr. 19 - 25