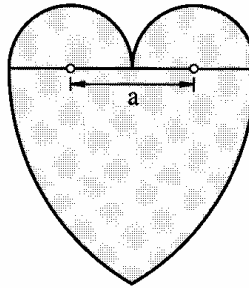


2.9. Prüfungsaufgaben zu Kreisberechnungen

Aufgabe 1: Kreisabschnitte

Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:



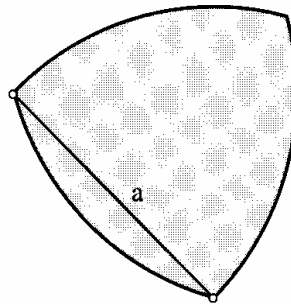
Lösung

$$u = 2\pi \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2a = \frac{7}{3}\pi a \approx 7,33a \quad (2)$$

$$A = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2a)^2 - \frac{1}{4} \sqrt{3} (2a)^2 = \left(\frac{19}{12}\pi - \sqrt{3}\right) a^2 \approx 3,24a^2 \quad (3)$$

Aufgabe 2: Kreisabschnitte

Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:



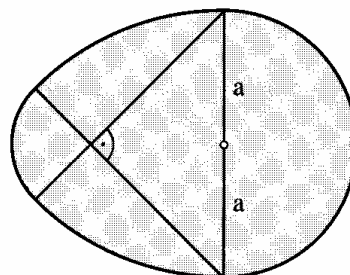
Lösung

$$u = \frac{1}{2} \cdot 2\pi a = \pi a \approx 3,14a \quad (2)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi a^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{3} a^2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2} a^2 \approx 0,70a^2 \quad (3)$$

Aufgabe 3: Kreisabschnitte

Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:



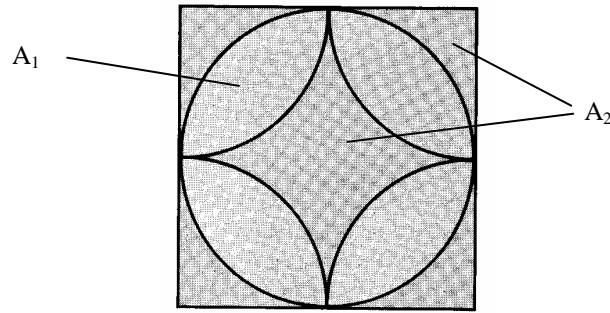
Lösung

$$u = \pi a + \frac{1}{4} \cdot 2\pi(2a) + \frac{1}{4} \cdot 2\pi(2 - \sqrt{2})a = \left(3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\pi a \approx 7,20a \quad (3)$$

$$A = \pi a^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi(2a)^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{2} a)^2 + \frac{1}{4} \pi(2 - \sqrt{2})^2 a^2 = \left(\frac{7\pi}{2} - \sqrt{2}\pi - 1\right) a^2 \approx 5,55a^2 \quad (4)$$

Aufgabe 4: Kreisabschnitte (4)

Berechne den Inhalt A_1 des hell schraffierten Flächenstückes und den Inhalt A_2 der dunkel schraffierten Flächenstücke in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des umliegenden Quadrates. Welches der beiden Flächenstücke ist größer?



Lösung

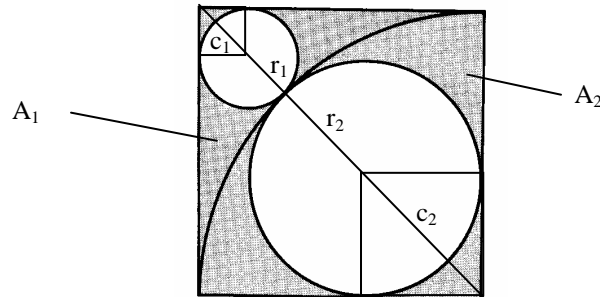
A_1 ist aus 8 Kreisabschnitten mit $r = \frac{1}{2}a$ und $\alpha = 90^\circ$ zusammengesetzt.

$$\text{Sein Inhalt ist also } A_1 = 8 \cdot \left(\frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) = 8 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot r^2 = (2\pi - 4) \cdot \frac{1}{4} a^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot a^2 \approx \underline{0,57a^2} \quad (2)$$

$$\text{Die Fläche des Quadrates ist } A_1 + A_2 = a^2 \Rightarrow A_2 = a^2 - A_1 = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) a^2 \approx \underline{0,43a^2} \Rightarrow A_2 < A_1. \quad (2)$$

Aufgabe 5: Kreisabschnitte

- a) Zeige, dass für die Radien r_1 und r_2 der beiden Kreise in dem unten dargestellten Quadrat mit der Seitenlänge a gilt $r_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ und $r_2 = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$.
- b) Berechne den Inhalt der dunkel schraffierten Flächenstücke A_1 und A_2 oberhalb und unterhalb des Kreisbogens in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des umliegenden Quadrates. Welches der beiden Flächenstücke ist größer?



Lösung

a) Der Radius des Kreisbogens ist $a = r_2 + c_2$. Nach Pythagoras ist $c_2 = \sqrt{r_2^2 + r_2^2} = \sqrt{2} r_2$. Durch Einsetzen dieses Ergebnisses erhält man $a = r_2 + \sqrt{2} r_2 = (1 + \sqrt{2}) r_2$ bzw. $r_2 = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$. Ebenso erhält man mit

Pythagoras für den kleinen Kreis $c_1 = \sqrt{2} r_1$ und für die Diagonale des Quadrates $c_1 + r_1 + r_2 + c_2 = \sqrt{2} a$.

Durch Einsetzen ergibt sich $\sqrt{2} r_1 + r_1 + \frac{a}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2} \frac{a}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} a \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2}) r_1 + a = \sqrt{2} a \Leftrightarrow r_1 =$

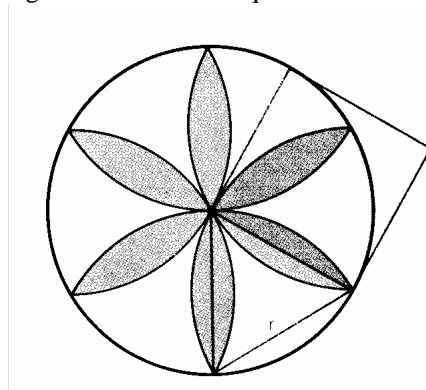
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} a.$$

b) $A_2 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \pi a^2 - \pi r_2^2 = \frac{\pi}{4} a^2 - \frac{\pi}{(1+\sqrt{2})^2} a^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{(2\sqrt{2}+2)^2} \pi a^2 \approx 0,246a^2$ und $A_1 = a^2 - \frac{90^\circ}{360^\circ} \pi a^2 - \pi r_1^2 = a^2 -$

$$-\frac{\pi}{4} a^2 - \frac{\pi(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2} a^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2} \right) a^2 \approx 0,122a^2.$$

Aufgabe 6: Kreisabschnitte

Berechne den Inhalt der gesamten dunkel gefärbten Fläche in Abhängigkeit vom Radius r des Umkreises und vergleiche ihn mit dem Inhalt des eingezeichneten Radiusquadrats.

**Lösung**

Die dunkel schraffierte Figur ist aus 12 Kreisabschnitten mit Radius r und $\alpha = 60^\circ$ zusammengesetzt. (2)

$$\text{Man erhält also } A = 12 \cdot \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \right) = 12 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 \approx 1,087 r^2 \Rightarrow A > r^2 \quad (2)$$