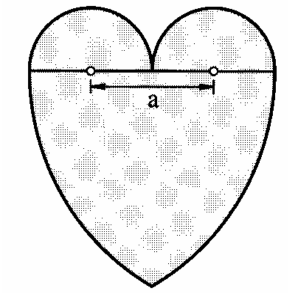
# 2.9. Prüfungsaufgaben zu Kreisberechnungen

**Aufgabe 1: Kreisabschnitte**
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:

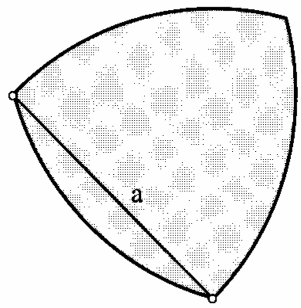



**Lösung**

$u = 2\pi\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2a = \frac{7}{3}\pi a \approx 7{,}33a$ (2)

$A = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(2a)^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(2a)^2 = \left(\frac{19}{12}\pi - \sqrt{3}\right)a^2 \approx 3{,}24a^2$ (3)

**Aufgabe 2: Kreisabschnitte**
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:

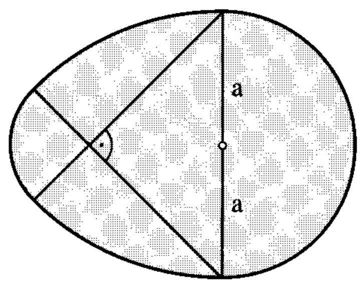



**Lösung**

$u = \frac{1}{2}\cdot 2\pi a = \pi a \approx 3{,}14a$ (2)

$A = \frac{1}{2}\cdot\pi a^2 - 2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2 = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\,a^2 \approx 0{,}70a^2$ (3)

**Aufgabe 3: Kreisabschnitte**
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der folgenden Figur in Abhängigkeit von der Länge a:



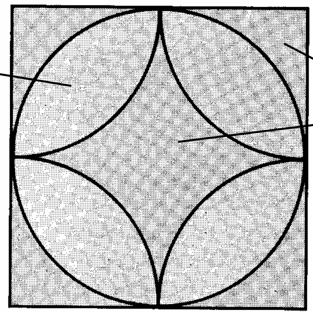

**Lösung**

$u = \pi a + \frac{1}{4}\cdot 2\pi(2a) + \frac{1}{4}\cdot 2\pi(2 - \sqrt{2})a = (3 - \frac{1}{2}\sqrt{2})\pi a \approx 7{,}20a$ (3)

$A = \pi a^2 + \frac{1}{4}\cdot\pi(2a)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,a)^2 + \frac{1}{4}\pi(2 - \sqrt{2})^2a^2 = \left(\frac{7\pi}{2} - \sqrt{2}\pi - 1\right)a^2 \approx 5{,}55a^2$ (4)

**Aufgabe 4: Kreisabschnitte (4)**

Berechne den Inhalt $A_1$ des hell schraffierten Flächenstückes und den Inhalt $A_2$ der dunkel schraffierten Flächenstücke in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des umliegenden Quadrates. Welches der beiden Flächenstücke ist größer?




**Lösung**

$A_1$ ist aus 8 <u>Kreisabschnitten</u> mit $r = \frac{1}{2}a$ und $\alpha = 90°$ zusammengesetzt.

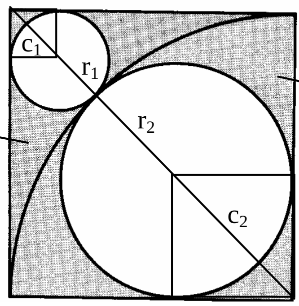
Sein Inhalt ist also $A_1 = 8\cdot(\frac{90°}{360°}\cdot\pi\cdot r^2 - \frac{1}{2}r^2) = 8\cdot(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})\cdot r^2 = (2\pi - 4)\cdot\frac{1}{4}a^2 = (\frac{\pi}{2} - 1)\cdot a^2 \approx \underline{0{,}57a^2}$ (2)

Die Fläche des Quadrates ist $A_1 + A_2 = a^2 \Rightarrow A_2 = a^2 - A_1 = (2 - \frac{\pi}{2})a^2 \approx \underline{0{,}43a^2} \Rightarrow A_2 < A_1$. (2)

**Aufgabe 5: Kreisabschnitte**

a) Zeige, dass für die Radien $r_1$ und $r_2$ der beiden Kreise in dem unten dargestellten Quadrat mit der Seitenlänge a gilt $r_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ und $r_2 = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$.

b) Berechne den Inhalt der dunkel schraffierten Flächenstücke $A_1$ und $A_2$ oberhalb und unterhalb des Kreisbogens in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des umliegenden Quadrates. Welches der beiden Flächenstücke ist größer?



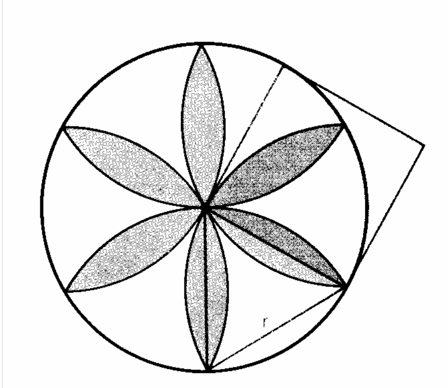

**Lösung**

a) Der Radius des Kreisbogens ist $a = r_2 + c_2$. Nach Pythagoras ist $c_2 = \sqrt{r_2^2 + r_2^2} = \sqrt{2}\,r_2$. Durch Einsetzen dieses Ergebnisses erhält man $a = r_2 + \sqrt{2}\,r_2 = (1 + \sqrt{2})r_2$ bzw. $r_2 = \frac{a}{1+\sqrt{2}}$. Ebenso erhält man mit Pythagoras für den kleinen Kreis $c_1 = \sqrt{2}\,r_1$ und für die Diagonale des Quadrates $c_1 + r_1 + r_2 + c_2 = \sqrt{2}\,a$. Durch Einsetzen ergibt sich $\sqrt{2}\,r_1 + r_1 + \frac{a}{1+\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\frac{a}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,a \Leftrightarrow (1 + \sqrt{2})r_1 + a = \sqrt{2}\,a \Leftrightarrow r_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}a$.

b) $A_2 = \frac{90°}{360°}\pi a^2 - \pi r_2^2 = \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{\pi}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}a^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{\left(2\sqrt{2}+2\right)^2}\pi a^2 \approx 0{,}246a^2$ und $A_1 = a^2 - \frac{90°}{360°}\pi a^2 - \pi r_1^2 = a^2 - \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}a^2 = (1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2})a^2 \approx 0{,}122a^2$.

**Aufgabe 6: Kreisabschnitte**

Berechne den Inhalt der gesamten dunkel gefärbten Fläche in Abhängigkeit vom Radius r des Umkreises und vergleiche ihn mit dem Inhalt des eingezeichneten Radiusquadrats.




**Lösung**

Die dunkel schraffierte Figur ist aus 12 Kreisabschnitten mit Radius r und $\alpha = 60°$ zusammengesetzt. (2)

Man erhält also $A = 12\cdot\left(\frac{60°}{360°}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2\right) = 12\cdot\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2 \approx 1{,}087 r^2 \Rightarrow A > r^2$ (2)