

3.1. Aufgaben zu einstufigen Zufallsexperimenten

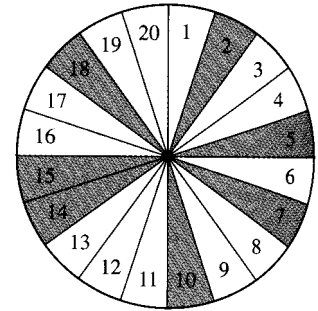
Aufgabe 1: Zufallsexperimente und Ergebnismengen

Entscheide, ob es sich bei den folgenden Fragestellungen um Zufallsexperimente handelt und gib gegebenenfalls die Ergebnismenge S an:

- An jedem dritten Haus der Mozartstraße steht eine Laterne.
- Durchschnittlich jeder dritte Haushalt in der Mozartstraße hat kein Auto.
- Durchschnittlich jeder vierte Zitronenfalter ist dunkler als die anderen.
- Eine Fertigungsmaschine für Spielzeugkampfroter spritzt jeden fünften Roboter schwarz; die schwarzen Roboter werden zum doppelten Preis verkauft.
- Erfahrungsgemäß fällt bei 2 % aller Roboter nach mehrmaligem Gebrauch der Arm ab.
- An einem radioaktiv belasteten Standort haben durchschnittlich 10 % aller Kleepflanzen 4 Blätter und 5 % rote Blüten.

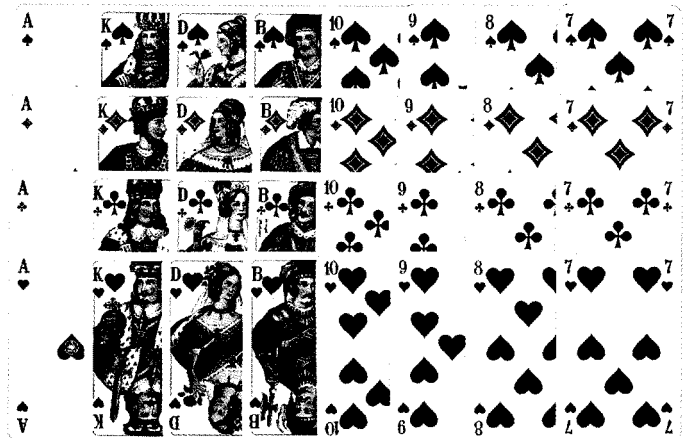
Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Glücksrad

- Gib zwei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Drehen des abgebildeten Glücksrades an.
- Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
 A: Die Zahl ist durch 3 teilbar
 B: Die Zahl ist einstellig und durch 4 teilbar
 C: Die Farbe ist rot



Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Kartenspiel

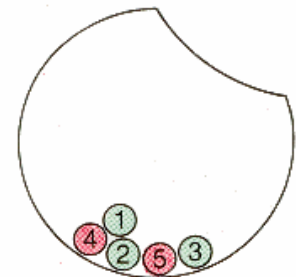
- Gib drei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Ziehen aus dem abgebildete Kartenspiel an.
- Welche Annahme muß man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
 A: Die Karte ist ein As
 B: Die Karte ist eine schwarze Zahl
 C: Die Karte ist eine Bild



Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung bei der Urne

In einer Urne liegen drei grüne Kugeln mit den Aufschriften 1, 2 und 3 sowie zwei rote Kugeln mit den Aufschriften 4 und 5.

- Gib zwei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Ziehen aus der Urne an.
- Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
 A: Die Zahl ist gerade
 B: Die Farbe ist rot und die Zahl ist ungerade
 C: Die Farbe ist grün und die Zahl ist größer als 3



Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

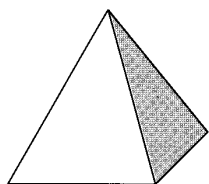
Bei einem Würfel sind die Seiten mit den Augenzahlen 1 und 3 rot gefärbt, die restlichen Seiten sind grün.

- Gib zwei mögliche Ergebnismengen und die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen für das einmalige Würfeln an.
- Welche Annahme muss man für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen voraussetzen?
- Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
 A: Die Zahl ist gerade
 B: Die Farbe ist grün und die Zahl ist ungerade
 C: Die Farbe ist rot und die Zahl ist mindestens eine 3

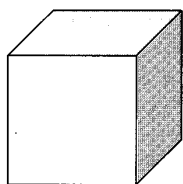
Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Fallen einer Primzahl beim einmaligen Werfen der folgenden regelmäßigen Polyeder:

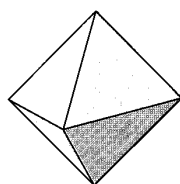
- Tetraeder: 4 gleichseitige Dreiecke 1 - 4
- Hexaeder: 6 Quadrate 1 - 6
- Oktaeder: 8 gleichseitige Dreiecke 1 - 8
- Dodekaeder: 12 gleichseitige Fünfecke 1 - 12
- Iksaeder: 20 gleichseitige Dreiecke 1 - 20



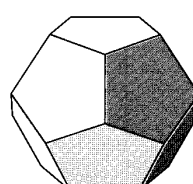
Tetraeder



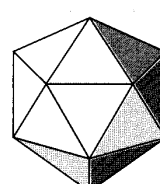
Hexaeder (Würfel)



Oktaeder



Dodekaeder



Iksaeder

Aufgabe 7: Zinken

Beschreibe jeweils eine technisch machbare und optisch unauffällige Maßnahme, um die Erfolgchancen einer nicht eingeweihten Person bei den folgenden Glücksspielen zu verändern.

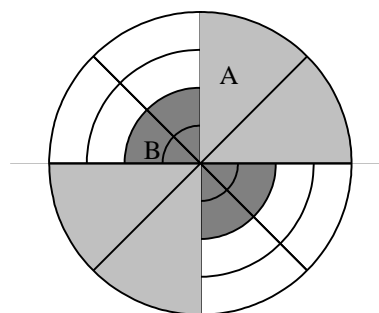
- Drehen an einem Glücksrad
- Werfen eines (äußerlich) gleichmäßigen Würfels
- Ziehen aus einem Kartenspiel
- Ziehen aus einer Urne

Aufgabe 8: Summenregel und Gegenereignis bei der Zielscheibe

Ein Wurfpeil wird auf die folgende Zielscheibe mit $r = 1\text{m}$ geworfen. Welche Annahmen müssen getroffen werden, um die Trefferwahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Bereiche berechnen zu können?

Berechne die Trefferwahrscheinlichkeiten der folgenden Bereiche. Formuliere dazu die Bereiche für g) und h) in Mengenschreibweise mit Hilfe der Bereiche A und B.

- A
- B
- \bar{A} = alle Punkte, die **nicht** in A liegen
- \bar{B} = alle Punkte, die **nicht** in B liegen
- $A \cap B$ = alle Punkte, die in **A und B** liegen
- $A \cup B$ = alle Punkte, die in **A oder B** liegen
- ? = alle Punkte, die in **weder** in A **noch** in B liegen
- ? = alle Punkte, die **nicht** in A **oder nicht** in B liegen



Aufgabe 9: Summenregel und Gegenereignis beim Glücksrad

Ein Glücksrad mit 100 gleich großen von 1 bis 100 nummerierten Sektoren mit wird einmal gedreht. Formuliere die Ereignisse in b) - e) in Mengenschreibweise mit Hilfe der Ereignisse A und B und berechne ihre Wahrscheinlichkeiten:

- A: Die Zahl ist durch 12 teilbar
- B: Die Zahl ist durch 15 teilbar
- ?: Die Zahl ist **nicht** durch 12 teilbar
- ?: Die Zahl ist **nicht** durch 15 teilbar
- ?: Die Zahl ist durch 12 **und** durch 15 teilbar
- ?: Die Zahl ist durch 12 **oder** durch 15 teilbar
- ?: Die Zahl ist **weder** durch 12 **noch** durch 15 teilbar
- ?: Die Zahl ist **nicht** durch 12 **oder nicht** durch 15 teilbar

Aufgabe 10: Summenregel und Gegenereignis bei Vierfeldertafel

In der nebenstehenden Vierfeldertafel ist festgehalten, wie viel Prozent der Schülerinnen und Schüler einer Schule mit dem Schulbus zur Schule kommen. Eine Person wird für eine Befragung zufällig ausgewählt. Betrachte die folgenden Ereignisse:

A: Die Person ist ein Mädchen

B: Die Person fährt mit dem Schulbus

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \cap \bar{B}$
- $A \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A \cup B}$

	Mädchen	Junge	gesamt
Schulbus	20%	15%	35%
anderes Verkehrsmittel	35%	30%	65%
gesamt	55%	45%	100%

3.1. Lösungen zu den Aufgaben zu einstufigen Zufallsexperimenten

Aufgabe 1: Zufallsexperimente und Ergebnismengen

- kein Zufallsexperiment, da man für ein beliebig herausgegriffenes Haus durch abzählen **berechnen** kann, ob eine Laterne davor stehen muss.
- Zufallsexperiment, da man für ein beliebig herausgegriffenes Haus **nicht berechnen** kann, ob ein Auto vorhanden ist oder nicht.
- kein Zufallsexperiment, da die **Ergebnismenge** nicht klar definiert ist.
- kein Zufallsexperiment, da man für einen beliebig herausgegriffenen Roboter durch abzählen **berechnen** kann, ob er schwarz gespritzt wird.
- Zufallsexperiment, da man für einen beliebig herausgegriffenen Roboter **nicht berechnen** kann, ob der Arm abfällt oder nicht.
- Zufallsexperiment, da man für eine beliebig herausgegriffene Pflanze **nicht berechnen** kann, ob sie vier Blätter oder rote Blüten hat.

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Glücksrad

- $S = \{1; 2; \dots; 20\}$ oder $S = \{\text{weiß; rot}\}$
- alle Felder werden mit der gleichen Wahrscheinlichkeit erreicht.
- $P(A) = P(3; 6; \dots; 18) = \frac{6}{20}$, $P(B) = P(4; 8) = \frac{2}{20}$ und $P(C) = P(2; 5; 7; 10; 14; 15; 18) = \frac{7}{20}$

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen beim Kartenspiel

- $S = \{p7; p8; \dots; pA, k7; \dots; kA, kr7; \dots, krA, h7; \dots; hA\}$ mit $P(p7) = \dots = P(hA) = \frac{1}{32}$ oder
 $S = \{\text{pik; karo; kreuz; herz}\}$ mit $P(\text{pik}) = \dots = P(\text{herz}) = \frac{1}{4}$ oder
 $S = \{7; 8; \dots; A\}$ mit $P(7) = \dots = P(A) = \frac{1}{8}$
- die Karten sind nicht gezinkt und werden mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten gezogen.
- $P(A) = \frac{4}{32}$, $P(B) = \frac{16}{32}$ und $P(C) = \frac{12}{32}$

Aufgabe 4: Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei der Urne

- $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ mit $P(1) = \dots = P(5) = \frac{1}{5}$ oder
 $S = \{\text{grün; rot}\}$ mit $P(\text{grün}) = \frac{3}{5}$ und $P(\text{rot}) = \frac{2}{5}$
- die Kugeln sind für die Hand ununterscheidbar gezinkt und werden mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten gezogen.
- $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ und $P(C) = 0$

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

- $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ mit $P(1) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$ oder
 $S = \{\text{grün; rot}\}$ mit $P(\text{grün}) = \frac{4}{6}$ und $P(\text{rot}) = \frac{2}{6}$
- der Würfel ist gleichmäßig und fällt auf alle Seiten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit..
- $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ und $P(C) = \frac{1}{6}$

Aufgabe 6: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln

- $P(p) = \frac{2}{4}$ b) $P(p) = \frac{3}{6}$ c) $P(p) = \frac{4}{8}$ d) $P(p) = \frac{5}{12}$ e) $P(p) = \frac{8}{20}$

Aufgabe 7: Zinken

- kleines Gewicht (Papierstreifen) hinten innen befestigen)
- kleinen Nagel ohne Kopf (Reißzwecke) in die Zahl schlagen und vorsichtig neu lackieren
- geschickt mischen?
- Kugel mit eingeschlagenem Nagel beschweren (siehe b))

Aufgabe 8: Gegenereignis und Summenregel bei der Zielscheibe

Notwendige Annahmen:

- Es werden nur die Würfe gezählt, bei denen die Scheibe überhaupt getroffen wurde: $P(S) = 1$
- Jeder Punkt auf der Scheibe wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen: $P(e_1) = P(e_2) \Rightarrow A(e_1) = A(e_2)$ (Laplace-Bedingung)

$$a) P(A) = \frac{A}{S} = \frac{1}{2}$$

$$b) P(B) = \frac{B}{S} = \frac{\pi \cdot 0,5^2}{\pi \cdot 1^2} = \frac{1}{4}$$

$$c) P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$$

$$d) P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$$

$$e) P(A \cap B) = \frac{A \cap B}{S} = \frac{1}{8}$$

$$f) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$$

$$g) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{8}$$

$$h) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{7}{8}$$

Aufgabe 9: Summenregel und Gegenereignis beim Glücksrad

- $P(A) = P(12, 24, \dots, 96) = 8 \%$
- $P(B) = P(15, 30, \dots, 90) = 6 \%$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 72 \%$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 94 \%$
- $P(A \cap B) = P(60) = 1 \%$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 13 \%$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 99 \%$

Aufgabe 10: Summenregel und Gegenereignis bei der Viefeldertafel

- $P(A \cap B) = 20 \%$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 70 \%$
- $P(A \cap \bar{B}) = 35 \%$
- $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 85 \%$
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 80 \%$
- $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 30 \%$

Aufgabe 11: Summenregel und Gegenereignis bei Umfrage

- $P(F \cup S) = P(F) + P(S) - P(F \cap S) = 62 \%$
- $P(\bar{F} \cap \bar{S}) = P(\overline{F \cup S}) = 1 - P(F \cup S) = 48 \%$

Aufgabe 12: Summenregel und Gegenereignis bei Umfrage

$$P(G \cup M) = P(G) + P(M) - P(G \cap M) = 90 \%$$

$$\Rightarrow P(\bar{G} \cap \bar{M}) = P(\overline{G \cup M}) = 1 - P(G \cup M) = 10 \%$$

Aufgabe 13: Zufallsvariablen beim einmaligen Würfeln

a) $P(X = 5) = P(5) = \frac{1}{6}$ b) $P(X = -5) = 0$ c) $P(X > 0) = P(1; 3; 5) = \frac{3}{6}$ d) $P(X \leq -3) = P(4; 6) = \frac{2}{6}$

Aufgabe 14: Zufallsvariablen beim Glücksrad

a) $P(X = -1) = 1 - P(X \oplus -1) = 1 - P(\text{rot}) = \frac{13}{20}$

b) $P(X = 0) = P(\text{rot}) = \frac{7}{20}$

c) $P(X = 4) = P(\text{rote Primzahl}) = \frac{2}{20}$

Aufgabe 15: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X(e)	1	2	3	-4	5	-6	7	-8	-9	-10	11	-12
X'(e)	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1

$X = \text{Gewinn von Markus} \Rightarrow E(X) = -1,67 \text{ €}$

$X' = \text{Gewinn von Markus} \Rightarrow E(X') = 0$

Aufgabe 16: Erwartungswert beim Würfeln und beim Glücksrad

a) $X = \text{Gewinn des Spielers} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6) \text{ €} = -0,50 \text{ €} \Leftrightarrow \text{Der Spieler ist benachteiligt}$

\Rightarrow wähle z.B. Gewinn = Augenzahl + 1 € für den Spieler bei ungerader Zahl.

b) $X = \text{Gewinn des Spielers} \Rightarrow E(X) = \frac{5}{20} \cdot 1 \text{ €} + \frac{2}{20} \cdot 5 \text{ €} - 1 \text{ €} = -0,25 \text{ €} \Leftrightarrow \text{Der Spieler ist benachteiligt}$

\Rightarrow wähle z.B. Gewinn = 2 € bei rotem Feld und 5 € bei roter Primzahl

Aufgabe 17: Erwartungswert bei der Kälbermast

$E(X) = 0,9 \cdot 200 \text{ €} - 0,1 \cdot 500 \text{ €} = 130 \text{ €}$ zu erwartender Gewinn pro Kalb $\Rightarrow 130 \cdot 1000 = 130 \cdot 000 \text{ €}$ zu erwartender Gesamtgewinn

Aufgabe 18: Erwartungswert bei Lebensversicherung

Da die meisten Kunden nicht genau am Ende sondern irgendwann im Laufe der gegebenen Fünfjahresabschnitte sterben werden, muß man für die Berechnung der zu erwartenden Auszahlungen ein mittleres Sterbedatum willkürlich festsetzen. Hier wird einfach jeweils die Mitte des Fünfjahresabschnittes gewählt. X sei die insgesamt ausbezahlte Rente

t in Monaten	$0 \leq t \leq 30$	$31 \leq t \leq 90$	$91 \leq t \leq 150$	$151 \leq t \leq 210$	$211 \leq t \leq 270$	$271 \leq t \leq 330$
X(t) (€)	30 000	90 000	150 000	210 000	270 000	330 000
P(t)	0,1	0,3	0,2	0,13	0,04	0,03

$\Rightarrow E(X) = 108 \cdot 000 \text{ €}$. Da noch 10 % Gewinn abfallen sollen, müsste die Prämie $P = \frac{E(X)}{0,9} = 120 \cdot 000 \text{ €}$

betragen.

Aufgabe 19: Statistik des Legowürfels

a) Angenommen, $P(o) = 38,3 \%$, $P(u) = 41,2 \%$ und $P(s) = 20,5 \%$

b) $0,1 \text{ €} = E(X) = 0,205X(s) - 1 \text{ €} \Leftrightarrow X(s) = 5,36 \text{ €}$