

3.2. Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten

Aufgabe 1: Baumdiagramm mit Erwartungswert beim zweimaligen Würfeln

Ein ungezinkter sechsseitiger Würfel wird zweimal geworfen.

- Zeichne einen **repräsentativen Ausschnitt** des Baumdiagramms. Wie groß ist die Ergebnismenge S ?
- Die Zufallsvariable X gibt die Augensumme an. Berechne $P(X = 2)$ und $P(X = 7)$
- Berechne die mittlere zu erwartende Augensumme
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme größer als 9 ist.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme größer als 2 ist.

Aufgabe 2: Baumdiagramm mit Erwartungswert beim zweimaligen Würfeln

Der ungezinkte sechsseitige Würfel aus Aufgabe 1 wird auf vier Seiten mit einer 1 und auf zwei Seiten mit einer 2 übermalt. Er wird wieder zweimal geworfen.

- Zeichne das Baumdiagramm.
- Die Zufallsvariable X gibt die Augensumme an. Gib alle möglichen Werte von X und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an.
- Berechne die mittlere zu erwartende Augensumme
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme größer als 2 ist.

Aufgabe 3: Dreimaliges Ziehen mit und ohne Zurücklegen mit Reihenfolge

In einer Urne befinden sich 6 rote, 4 weiße und 5 blaue Kugeln. Es werden drei Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Kugeln in der Reihenfolge „rot, weiß, blau“ zu ziehen, wenn die Kugeln nach der Ziehung

- zurückgelegt werden?
- nicht zurückgelegt werden?

Aufgabe 4: Dreimaliges Ziehen mit und ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge

Eine Urne enthält eine rote, vier schwarze und fünf weiße Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit der drei Ereignisse A, B und C jeweils für die Spielvariante a) und b).

A: Alle Kugeln sind weiß.

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

C: Die Kugeln haben drei verschiedene Farben.

- Es wird dreimal eine Kugel **mit** Zurücklegen gezogen.
- Es wird dreimal eine Kugel **ohne** Zurücklegen gezogen.

Aufgabe 5: Dreimaliges Ziehen mit einem Griff

Ein Urne enthält drei schwarze, zwei weiße und eine rote Kugel. Berechne die Wahrscheinlichkeit, je eine schwarze, eine rote und eine weiße Kugel zu erhalten, wenn drei Kugeln

- mit** Zurücklegen gezogen werden
- ohne** Zurücklegen gezogen werden
- mit **einem Griff** gezogen werden

Aufgabe 6: Gegenereignisse beim dreimaligen Reißnagelwurf

Gehe beim Reißnagelwurf die Wahrscheinlichkeit von $P(\text{Kopf}) = 0,43$ aus und berechne die Wahrscheinlichkeit, daß beim dreimaligen Wurf

- das Ergebnis „Kopf-Spitze-Kopf“ lautet,
- genau einmal „Spitze“ geworfen wird,
- genau zweimal „Kopf“ geworfen wird,
- mindestens einmal „Spitze“ geworfen wird,
- keinmal „Spitze“ geworfen wird.
- Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten von a), b) und c) und erkläre.
- Addiere die Wahrscheinlichkeiten von d) und e) und erkläre das Ergebnis.
- Wie oft muss man werfen, damit mit 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal „Kopf“ fällt?

Aufgabe 7: Gegenereignisse beim fünfmaligen Würfeln

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt beim fünfmaligen Würfeln

- keinmal die 6?
- beim 1. Wurf die 6?
- beim 2. Wurf die 6?
- genau einmal die 6?
- mindestens einmal die 6?
- fünfmal die 6?
- genau viermal die 6?
- Wie oft muss man werfen, damit mit 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die 6 fällt?

Aufgabe 8: Zweimal Ziehen mit Zurücklegen

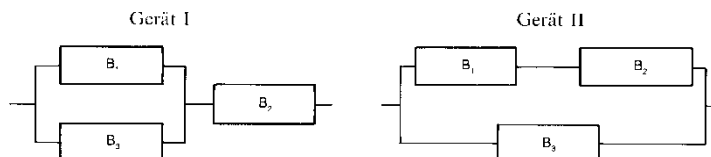
Zwei Jäger schießen gleichzeitig und ohne sich zu beeinflussen auf denselben Hasen. Welche Überlebenschance hat der Hase, wenn der eine Jäger mit der Wahrscheinlichkeit von 60 % und der andere mit 40 % trifft?

Aufgabe 9: Dreimal Ziehen mit Zurücklegen

Die drei Triebwerke einer älteren Passagiermaschine haben Ausfallwahrscheinlichkeiten von 1, 2 und 3 %. Wie hoch ist das Absturzrisiko, wenn die Maschine auch mit zwei Triebwerken noch in der Luft bleibt?

Aufgabe 10: Ausfallwahrscheinlichkeit bei elektrischer Reihen- und Parallelschaltung

Für die Herstellung zweier Geräte benötigt man drei verschiedene Bauteile, die jeweils unabhängig voneinander arbeiten. Von den Bauteilen B_1 , B_2 , bzw. B_3 sind durchschnittlich 25 %, 10 % bzw. 8 % defekt. Die Geräte setzen sich wie folgt zusammen:



Berechne jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit der die Geräte funktionieren.

Aufgabe 11: Spielabbruch beim Ziehen ohne Zurücklegen

In einer Urne liegen vier Kugeln: eine blaue, eine rote, eine gelbe und eine grüne. Es werden die vier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen. Zeige: Die Wahrscheinlichkeit, eine grüne Kugel zu ziehen, ist beim ersten Zug genauso groß wie beim zweiten, dritten oder vierten Zug!

Aufgabe 12: Spielabbruch beim Ziehen ohne Zurücklegen

Im Hause der Familie Duck halten sich elf Enten auf. Eine muss trotz des scheußlichen Regens hinaus und den Erbonkel Dagobert mit dem Schirm abholen. Donald Duck hält elf Streichhölzer in der Hand, eins ist gekürzt. Wer das zieht, muss hinaus in den Regen. Soll Trick als erster ziehen, als letzter oder mehr so in der Mitte? Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der erste, der zweite, ..., der letzte das kurze Streichholz zieht!

Aufgabe 13: Erwartungswert beim Schachspiel

Bei einer Schachpartie gewinnt Spieler A in jedem Spiel mit 60 % Wahrscheinlichkeit gegen Spieler B. Der Spieler, der als erster 3 Spiele gewonnen hat, hat auch die Partie gewonnen.

- Berechne die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die Spieler A und B
- Die Zufallsvariable X gebe die Zahl der Spiele an. Berechne $P(X = 4)$
- Wieviele Spiele sind durchschnittlich bei einer solchen Partie zu erwarten?

Aufgabe 14: Erwartungswert bei Schere, Stein, Papier

Julia knobelt gegen Ben. Es gilt: Schere schlägt Papier, Stein schlägt Schere, Papier schlägt Stein. Gleiche Ergebnisse zählen nicht. Wer zuerst seinen Gegner dreimal schlägt, hat gewonnen.

- Bestimme die Gewinnwahrscheinlichkeit für Julia bei **einem Spiel**.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Julia **als erste** gewinnt?
- Nach dem ersten Spiel liegt Julia in Führung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie nun auch die **gesamte Partie** gewinnt?
- Die Zufallsvariable X gebe die Zahl der Spiele an. Berechne $P(X = 4)$.
- Wie viele Spiele sind im Mittel zu erwarten, bis der Sieger feststeht?

Aufgabe 15: Erwartungswert beim Brettspiel

Ein Spielstein ist nur noch drei Felder vom Ziel entfernt. Würfelt man eine 5 oder 6, so wandert der Stein ein Feld weiter, ansonsten ein Feld zurück. Das Spiel ist beendet, wenn der Stein das Ziel erreicht hat oder man fünfmal gewürfelt hat.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man das Ziel?
- Nach wie viel Zügen ist das Spiel im Mittel beendet?

Aufgabe 16: Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit beim Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit 2 roten und 3 weißen Kugeln werden zwei Kugeln 1. **ohne** und 2. **mit** Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit

- $P(r, \cdot)$, dass die 1. Kugel rot ist,
- $P_r(\cdot, w)$, dass die 2. Kugel weiß ist, **falls** schon die 1. Kugel rot war,
- $P(\cdot, w)$, dass die 2. Kugel weiß ist,
- $P(r, w)$, dass die 2. Kugel weiß **und** die 1. Kugel rot ist.
- Entscheide mit Hilfe von a) - d), ob die Farbe der 2. Kugel **unabhängig** von der Farbe der 1. Kugel ist.

Aufgabe 17: Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit bei Wahlverhalten und Alter

Die nebenstehende Mehrfeldertafel gibt die Ergebnisse der Bundestagswahl 2002 wieder. Eine Person werde zufällig aus den Wählern ausgewählt.

		gewählte Partei			gesamt
		CDU/CSU	SPD	Sonstige	
Alter	unter 25	3,05%	3,66%	2,79%	9,5%
	25 und mehr	35,39%	34,78%	20,33%	90,5%
gesamt		38,44%	38,44%	23,12%	100%

- a) Stelle dieses Zufallsexperiment mithilfe von zwei Baumdiagrammen dar:
 (1) 1. Stufe: Alter, 2. Stufe: Partei
 (2) 1. Stufe: Partei, 2. Stufe: Alter
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die ausgewählte Person
 A: SPD-Wähler(in)
 B: unter 25 Jahren;
 C: SPD-Wähler(in) und unter 25 Jahre alt;
 D: SPD-Wähler(in), wenn bekannt ist, dass die ausgewählte Person unter 25 Jahre alt ist;
 E: unter 25 Jahre, wenn bekannt ist, dass die ausgewählte Person SPD gewählt hat?
- c) Untersuche die Ereignisse A und B auf **Unabhängigkeit**.

Aufgabe 18: Unabhängigkeit bei Rauchverhalten und Geschlecht

Die Angehörigen eines Betriebes sind nach zwei Merkmalen eingeteilt: ihrem Geschlecht und ihrer Eigenschaft als Raucher bzw. Nichtraucher. Untersuche auf Abhängigkeit!

	Frauen	Männer
Raucher	200	800
Nichtraucher	300	200

Aufgabe 19: Unabhängigkeit bei Rauchverhalten und Krebsrisiko

Statistische Erhebungen zeigen, dass 40 % einer Bevölkerung über 15 Jahre Raucher (R) sind. 0,2 % dieser Bevölkerung sind an Lungenkrebs (L) erkrankt. 90 % aller an Lungenkrebs erkrankten Personen sind Raucher.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person Lungenkrebs hat, wenn bekannt ist, dass sie Raucher ist?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person an Lungenkrebs erkrankt ist, wenn bekannt ist, dass sie nicht raucht?
- c) Untersuche, ob die Erkrankung an Lungenkrebs und die Rauchgewohnheiten abhängig sind!

Aufgabe 20: Unabhängigkeit beim einmaligen Würfeln

Beim Werfen eines idealen Würfels betrachte man die Ereignisse

- A: Die Augenzahl ist gerade;
- B: Die Augenzahl ist durch 3 teilbar;
- C: Die Augenzahl ist eine Primzahl.

Untersuche, ob die folgenden Paare abhängig oder unabhängig sind!

- a) A und B b) B und C c) A und C

Aufgabe 21: Unabhängigkeit beim mehrmaligen Münzwurf

Eine Laplace-Münze mit den Seiten Zahl und Wappen wird zweimal geworfen. A sei das Ereignis „Höchstens einmal Zahl“, B sei das Ereignis „Jede Seite der Münze fällt wenigstens einmal“.

- a) Untersuche auf Abhängigkeit.
- b) Untersuche auf Abhängigkeit, wenn die Laplace-Münze dreimal geworfen wird.

Aufgabe 22: totale Wahrscheinlichkeit bei ein/zweieiigen Zwillingen und Geschlecht

Zwillinge sind in Europa etwa mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 eineiig. Eineiige Zwillinge haben dieselben erblichen Merkmale, z. B. gleiches Geschlecht. Zweieiige Zwillinge können mit gewisser Wahrscheinlichkeit ebenfalls in gewissen Merkmalen übereinstimmen. Für Übereinstimmung im Geschlecht ist die Wahrscheinlichkeit ziemlich genau 1/2. Eveline und Jacqueline sind Zwillinge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind sie eineiige Zwillinge?

Aufgabe 23: totale Wahrscheinlichkeit bei Masern und Ausschlag

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Mensch Masern hat, ist 0,01 %. Masernkranke haben mit der Wahrscheinlichkeit von 80 % einen roten Hautausschlag, eine zufällig ausgewählte Person hat nur mit der Wahrscheinlichkeit von 0,2 % einen roten Hautausschlag. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Anke, die zur Zeit einen roten Hautausschlag hat, masernkrank ist!

Aufgabe 24: totale Wahrscheinlichkeit bei Autobenutzung und Pünktlichkeit

Uli Schwarz fährt an 70 % aller Schultage mit dem Auto in die Schule. In 80 % dieser Fälle kommt der Schüler pünktlich an. Durchschnittlich ist er an 6 von 10 Schultagen pünktlich. Heute war Uli pünktlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er mit dem Auto gefahren?

Problem 25: Monty Hall Problem

The Monty Hall problem is a puzzle in probability that is loosely based on the American game show Let's make a deal. The name comes from the show's host Monty Hall.

In this puzzle a player is shown three closed doors; behind one is a car, and behind each of the other two is a goat. The player is allowed to open one door, and will win whatever is behind the door. However, after the player selects a door but before opening it, the game host opens another door revealing a goat. The host then offers the player an option to switch to the other closed door. Does switching improve the player's chance of winning the car? The answer is yes - switching results in a $\frac{2}{3}$ chance of winning the car. Draw an event tree and explain.

3.2. Lösungen zu den Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten

Aufgabe 1: Baumdiagramm mit Erwartungswert beim zweimaligen Würfeln

a) klar

$$b) P(X = 2) = P(1,1) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(1,2) + P(2,1) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P(1,3) + P(2,2) + P(3,1) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(1,4) + P(2,3) + P(3,2) + P(4,1) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(1,5) + P(2,4) + P(3,3) + P(4,2) + P(5,1) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(1,6) + P(2,5) + P(3,4) + P(4,3) + P(5,2) + P(6,1) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(2,6) + P(3,5) + P(4,4) + P(5,3) + P(6,2) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 9) = P(3,6) + P(4,5) + P(5,4) + P(6,3) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = P(4,6) + P(5,5) + P(6,4) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = P(5,6) + P(6,5) = \frac{2}{36}$$

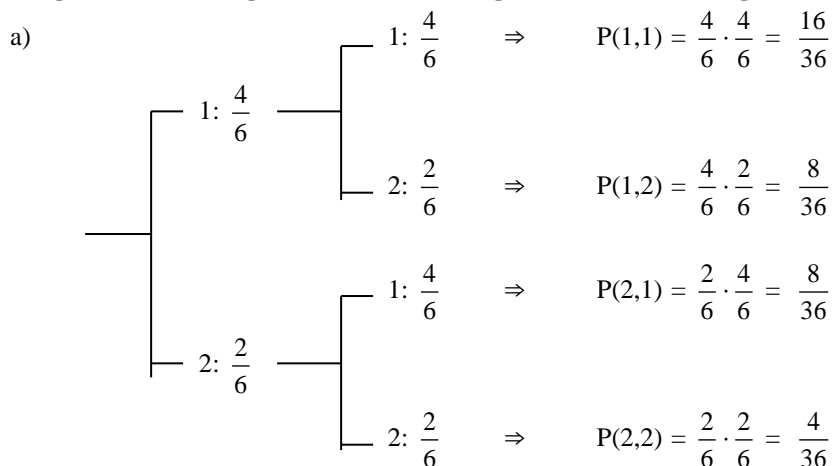
$$P(X = 12) = P(6,6) = \frac{1}{36}$$

$$c) \Rightarrow E(X) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 11 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{36} = 7$$

$$d) P(X > 9) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} \approx 0,167 = 16,7 \%$$

$$e) P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 2) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36} \approx 0,972 = 97,2 \%$$

Aufgabe 2: Baumdiagramm mit Erwartungswert beim zweimaligen Würfeln



$$b) P(X = 2) = P(1,1) = \frac{16}{36}, P(X = 3) = P(1,2) + P(2,1) = \frac{16}{36} \text{ und } P(X = 4) = P(2,2) = \frac{4}{36}$$

$$c) E(X) = \frac{8}{3}$$

$$d) P(X > 2) = 1 - P(X = 2) = 1 - P(1;1) = 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$$

Aufgabe 3: Dreimaliges Ziehen mit und ohne Zurücklegen mit Reihenfolge

$$a) P(r, w, b) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15} \approx 3,56 \% \quad b) P(r, w, b) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} \approx 4,40 \%$$

Aufgabe 4: Dreimaliges Ziehen mit und ohne Zurücklegen

$$a) P(A) = P(w, w, w) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = 12,5 \%$$

$$P(B) = P(r, r, r) + P(\bar{r}, r, r) + P(r, \bar{r}, r) + P(r, r, \bar{r}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = 2,8 \%$$

$$P(C) = P(r, s, w) + P(r, w, s) + P(s, r, w) + P(s, w, r) + P(w, r, s) + P(w, s, r) = 6 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = 12 \%$$

$$b) P(A) = P(w, w, w) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 8,3 \%$$

$$P(B) = 0$$

$$P(C) = P(r, s, w) + P(r, w, s) + P(s, r, w) + P(s, w, r) + P(w, r, s) + P(w, s, r) = 6 \cdot \frac{1 \cdot 4 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 16,6 \%$$

Aufgabe 5: Dreimaliges Ziehen mit einem Griff

$$a) P(s \cap r \cap w) = P(r,s,w) + P(r,w,s) + P(w,s,r) + P(w,r,s) + P(s,w,r) + P(s,r,w) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$b) P(s \cap r \cap w) = P(r,s,w) + P(r,w,s) + P(w,s,r) + P(w,r,s) + P(s,w,r) + P(s,r,w) = 6 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$$

c) siehe b)

Aufgabe 6: Gegenereignisse beim dreimaligen Reißnagelwurf

$$a) P(k,s,k) = 0,43 \cdot 0,57 \cdot 0,43 \approx 10,53 \%$$

$$b) P(s \cap k \cap k) = 3 \cdot P(k,s,k) \approx 31,6 \%$$

c) siehe b)

$$d) P(\text{mind. einmal } s) = 1 - P(k,k,k) = 1 - 0,43^3 \approx 92,05 \%$$

$$e) P(\text{keinmal } s) = P(k,k,k) = 0,43^3 = 7,95 \%$$

f) bei a) wird die Reihenfolge vorgegeben, bei b) nicht; B) und c) beschreiben das gleiche Ereignis

g) und e) beschreiben Gegenereignisse

$$h) P(\text{mind. einmal } s) = 1 - P(n \text{ mal } k) = 1 - 0,43^n = 0,99 \Rightarrow n = \frac{\ln 0,01}{\ln 0,43} \approx 5,46 \Rightarrow \text{mindestens 6 mal}$$

Aufgabe 7: Gegenereignisse beim fünfmaligen Würfeln

$$a) P(\bar{6}, \bar{6}, \bar{6}, \bar{6}, \bar{6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 40,19 \%$$

$$b) P(6, , , ,) = \frac{1}{6}$$

$$c) P(, 6, , ,) = \frac{1}{6}$$

$$d) P(6 \cap \bar{6} \cap \bar{6} \cap \bar{6} \cap \bar{6}) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 40,19 \%$$

$$e) P(\text{mind. einmal } 6) = 1 - P(\bar{6}, \bar{6}, \bar{6}, \bar{6}, \bar{6}) = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 59,81 \%$$

$$f) P(6, 6, 6, 6, 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0,012 \%$$

$$g) P(6 \cap 6 \cap 6 \cap 6 \cap \bar{6}) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0,32 \%$$

$$h) P(\text{mind. einmal } 6) = 1 - P(n \text{ mal } \bar{6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0,95 \Rightarrow n = \frac{\ln 0,05}{\ln(5/6)} \approx 16,43 \Rightarrow \text{mindestens 17 mal}$$

Aufgabe 8: Zweimal Ziehen mit Zurücklegen

$$t = \text{Treffer} \Rightarrow P(\text{Überleben}) = P(\bar{t}, \bar{t}) = 0,4 \cdot 0,6 = 24 \%$$

Aufgabe 9: Dreimal Ziehen mit Zurücklegen

$$a = \text{Ausfall} \Rightarrow P(\text{Absturz}) = P(a,a,a) + P(\bar{a}, a,a) + P(a, \bar{a}, a) + P(a,a, \bar{a}) \\ = 0,01 \cdot 0,02 \cdot 0,03 + 0,99 \cdot 0,02 \cdot 0,03 + 0,01 \cdot 0,98 \cdot 0,03 + 0,01 \cdot 0,02 \cdot 0,97 = 0,1088 \%$$

Aufgabe 10: Ausfallwahrscheinlichkeiten bei elektrischer Parallel- und Reihenschaltung

$$P(I) = P(B_1, B_2, B_3) + P(\overline{B_1}, B_2, B_3) + P(B_1, B_2, \overline{B_3}) = 0,75 \cdot 0,90 \cdot 0,92 + 0,25 \cdot 0,90 \cdot 0,92 + 0,75 \cdot 0,90 \cdot 0,08 = 88,2 \%$$

$$P(II) = P(\dots, \dots, B_3) + P(B_1, B_2, \overline{B_3}) = 0,92 + 0,92 \cdot 0,25 \cdot 0,08 = 60 \%$$

Aufgabe 11: Spielabbruch beim Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(g) = \frac{1}{4}, P(\overline{g}, g) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, P(\overline{g}, \overline{g}, g) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ und } P(\overline{g}, \overline{g}, \overline{g}, g) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 12: Spielabbruch beim Ziehen ohne Zurücklegen

$$P(k) = \frac{1}{11}, P(l, k) = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{11}, \dots, P(l, l, k) = \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{11}, \text{ u.s.w.}$$

Aufgabe 13: Erwartungswert beim Schachspiel

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A \text{ gewinnt}) &= P(A, A, A) + P(B, A, A, A) + P(A, B, A, A) + P(A, A, B, A) + \\ &= P(B, B, A, A, A) + P(B, A, B, A, A) + P(B, A, A, B, A) + P(A, B, B, A, A) + P(A, B, A, B, A) + P(A, A, B, B, A) \\ &= 0,6^3 + 3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 \\ &\approx 68,25 \%. \end{aligned}$$

Allgemeine Begründung: Es gibt $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten, zwei Siege von B in 5 Spielen anzuordnen.

b) Die Zufallsvariable X gebe Die Zahl der Spiele an. Dann ist

$$P(X = 3) = P(B \text{ gewinnt keinmal}) + P(A \text{ gewinnt keinmal}) = 0,6^3 + 0,4^3 \approx 0,28,$$

$$P(X = 4) = 3 \cdot P(B \text{ gewinnt genau einmal}) + 3 \cdot P(A \text{ gewinnt genau einmal}) = 3 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3 = 0,3744$$

$$P(X = 5) = 6 \cdot P(B \text{ gewinnt genau einmal}) + 3 \cdot P(A \text{ gewinnt genau einmal}) = 6 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 + 6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,3456$$

$$\text{c) } \Rightarrow E(X) = 3 \cdot 0,28 + 4 \cdot 0,3744 + 5 \cdot 0,3456 = 4,06$$

Aufgabe 14: Erwartungswert bei Schere, Stein, Papier

a) Von den 9 möglichen Kombinationen bei Schere, Stein, Papier führen jeweils drei auf Julia, Ben und unentschieden. Also ist $P(\text{Julia}) = P(\text{Ben}) = P(\text{unentschieden}) = \frac{1}{3}$.

b) Da die unentschiedenen Spiele nicht gezählt werden, ist $P(\text{Julia gewinnt ein Spiel}) = 50 \%$.

(Allgemeine Begründung: Da bei unentschieden weitergespielt wird, bis eine Entscheidung erreicht ist, gilt

$$P(\text{Julia gewinnt ein Spiel}) = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = 50 \%$$

$$\text{c) } P(\text{Julia gewinnt die Partie}) = P(J, J) + P(J, B, J) + P(B, J, J) + P(J, B, B, J) + P(B, J, B, J) + P(B, B, J, J) = 0,5^2 + 2 \cdot 0,5^3 + 3 \cdot 0,5^4 = 68,75 \%$$

(Allgemeine Begründung: Es gibt $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, zwei Siege von B in 4 Spielen anzuordnen)

$$\text{d) } P(X = 3) = P(J, J) = 0,5^2 = 25 \%$$

$$P(X = 4) = P(J, B, J) + P(B, J, J) + P(B, B, B) = 3 \cdot 0,5^3 = 37,5 \%$$

$$P(X = 5) = P(J, B, B, J) + P(B, J, B, J) + P(B, B, J, J) + P(J, B, B, B) + P(B, J, B, B) + P(B, B, J, B) = 6 \cdot 0,5^4 = 37,5 \%$$

$$\text{e) } E(X) = 3 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,375 + 5 \cdot 0,375 = 4,125$$

Aufgabe 15: Erwartungswert beim Brettspiel

$$\text{a) } P(\text{Ziel}) = P(56, 56, 56) + P(\overline{56}, 56, 56, 56, 56) + P(56, \overline{56}, 56, 56, 56) + P(56, 56, \overline{56}, 56, 56)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 6,17 \%$$

b) $X = \text{Zahl der Züge} \Rightarrow$

$$P(X = 3) = P(56, 56, 56) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3,7 \%,$$

$$P(X = 4) = 0,$$

$$P(X = 5) = P(\overline{56}, \dots) + P(56, \overline{56}, \dots) + P(56, 56, \overline{56}, \dots) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = 96,3 \%$$

$$\Rightarrow E(X) = 3 \cdot 0,037 + 5 \cdot 0,963 = 4,92$$

Aufgabe 16: Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit beim Ziehen mit und ohne Zurücklegen

- ohne Zurücklegen: $P(r,) = \frac{2}{5}, P_r(,w) = \frac{3}{4}, P(,w) = P(w, w) + P(r, w) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, P(r, w) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$
- mit Zurücklegen: $P(r,) = \frac{2}{5}, P_r(,w) = \frac{3}{5}, P(,w) = P(w, w) + P(r, w) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}, P(r, w) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

Aufgabe 17: Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit beim Wahlverhalten

- klar
- $P(A) = 38,44 \%, P(B) = 9,5 \%, P(C) = 3,66 \%, P(D) = 38,53 \%, P(E) = 9,52 \%$
- $3,66 \% = P(A \cap B) \approx P(A) \cdot P(B) = 3,65 \% \Rightarrow A$ und B sind **nahezu** unabhängig !

Aufgabe 18: Unabhängigkeit beim Rauchverhalten

$$13,33 \% = \frac{200}{1500} = P(\text{Raucher} \cap \text{Frau}) = P(\text{Raucher}) \cdot P(\text{Frau}) = \frac{1000}{1500} \cdot \frac{500}{1500} = 22,22 \% \Rightarrow \text{Abhängigkeit}$$

Aufgabe 19: Unabhängigkeit beim Rauchverhalten und Krebs

$$0,18 \% = 0,9 \cdot 0,002 = P(\text{Raucher} \cap \text{Krebs}) = P(\text{Raucher}) \cdot P(\text{Krebs}) = 0,4 \cdot 0,002 = 0,08 \% \Rightarrow \text{Abhängigkeit}$$

Aufgabe 20: Unabhängigkeit beim einmaligen Würfeln

- $\frac{1}{6} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Unabhängigkeit
- $0 = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Abhängigkeit
- $0 = P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Abhängigkeit

Aufgabe 21: Unabhängigkeit beim mehrmaligen Münzwurf

- $\frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} \Rightarrow$ Abhängigkeit
- $\frac{3}{8} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow$ Abhängigkeit

Aufgabe 22: totale Wahrscheinlichkeit bei ein/zweieiigen Zwillingen und Geschlecht

$$e = \text{eineiig}, g = \text{gleiches Geschlecht} \Rightarrow P(g) = P(e \cap g) + P(\bar{e} \cap g) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P_g(e) = \frac{P(e \cap g)}{P(g)} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 50 \%$$

Aufgabe 23: totale Wahrscheinlichkeit bei Masern und Ausschlag

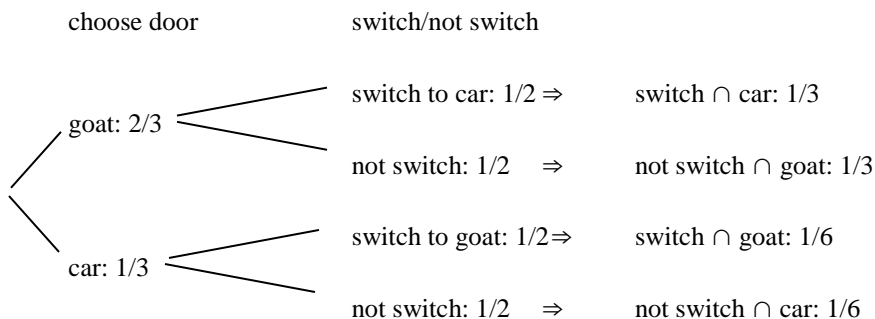
$$m = \text{Masern}, a = \text{Ausschlag} \Rightarrow P(m \cap a) = 0,0001 \cdot 0,8 = 0,00008 \Rightarrow P_a(m) = \frac{P(a \cap m)}{P(a)} = \frac{0,00008}{0,002} = 4 \%$$

Aufgabe 24: totale Wahrscheinlichkeit bei Autobenutzung und Pünktlichkeit

$$a = \text{Auto}, p = \text{pünktlich} \Rightarrow P(a \cap p) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56 \Rightarrow P_p(a) = \frac{P(a \cap p)}{P(p)} = \frac{0,56}{0,6} = 93,3 \%$$

Problem 25: Monty Hall Problem

tree with two stages:



$$\text{conditional probabilities } P_{\text{switch}}(\text{car}) = \frac{P(\text{switch} \cap \text{car})}{P(\text{switch})} = \frac{2}{3} \text{ and } P_{\text{not switch}}(\text{car}) = \frac{P(\text{not switch} \cap \text{car})}{P(\text{not switch})} = \frac{1}{3}$$