

## 3.2. Mehrstufige Zufallsexperimente

### 3.2.1. Baumdiagramme und Zufallsvariablen für mehrstufige Experimente

Beispiel: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 1 (Asterix: der Seher)

#### Produktregel

Im Baumdiagramm erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses durch **Multiplikation aller Wahrscheinlichkeiten des Pfades**, der auf das gewünschte Ergebnis führt.

Übungen: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 2 - 15

### 3.2.2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit bei mehrstufigen Experimenten

Beispiel: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 16

#### Produktregel und bedingte Wahrscheinlichkeiten

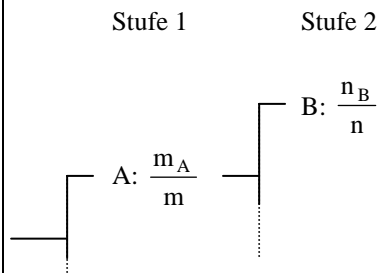
Gegeben sei ein zweistufiges Experiment, bei dem

$m$  = Zahl der möglichen Ergebnisse in Stufe 1

$m_A$  = Zahl der günstigen Ergebnisse für Ereignis A in Stufe 1

$n$  = Zahl der möglichen Ergebnisse in Stufe 2, falls A in Stufe 1 eingetreten ist

$n_B$  = Zahl der günstigen Ergebnisse für Ereignis B in Stufe 2, falls A in Stufe 1 eingetreten ist:

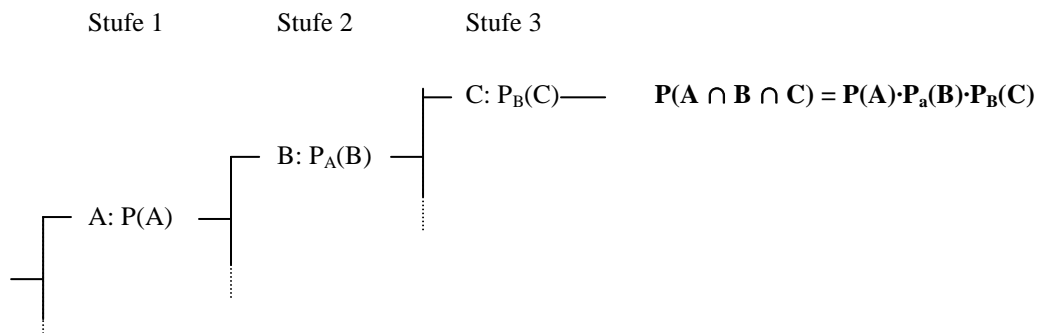


$$P(A) = P(\text{A in Stufe 1}) = \frac{m_A}{m}$$

$$P_A(B) = P(\text{B in Stufe 2, falls A in Stufe 1}) = \frac{n_B}{n}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{A in Stufe 1 und B in Stufe 2}) = \frac{m_A}{m} \cdot \frac{n_B}{n} = P(A) \cdot P_A(B)$$

#### Entsprechend gilt bei dreistufigen Experimenten:



#### Unabhängigkeit von Ereignissen

zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn

1.  $P_A(B) = P(B)$  (B ist unabhängig von A) oder

2.  $P_B(A) = P(A)$  (A ist unabhängig von B) oder

3.  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Die drei Bedingungen sind **äquivalent**, d.h. es genügt, eine der drei Bedingungen zu überprüfen!

Übungen: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 17 - 21

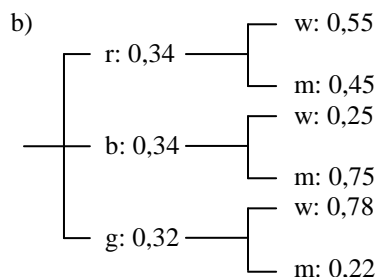
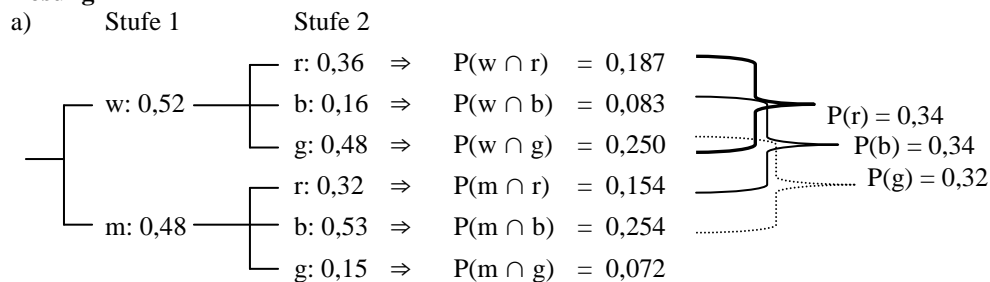
### 3.2.3. Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Experimenten

#### Beispiel: Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit (vgl. Aufgabe 17)

Eine Statistik hat folgende Ergebnisse zutage gebracht: 52 % der Bevölkerung sind weiblich. 36 % der Frauen und 32 % der Männer geben Rot als Lieblingsfarbe an; 16 % der Frauen und 53 % der Männer bevorzugen Blau und der jeweilige Rest entschied sich für Grün.

- Zeichne einen Ereignisbaum mit Stufe 1 = Geschlechtswahl und Stufe 2 = Farbwahl
- Zeichne einen Ereignisbaum mit Stufe 1 = Farbwahl und Stufe 2 = Geschlechtswahl
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person weiblich ist **und** ihre Lieblingsfarbe Grün ist?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die Lieblingsfarbe Grün angibt?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine weibliche Person die Lieblingsfarbe Grün hat?
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit Lieblingsfarbe Grün weiblich ist?

#### Lösung



c)  $P(w \cap g) = P(w) \cdot P_w(g) = 0,52 \cdot 0,48 = \underline{0,250}$

d)  $P(g) = P(w \cap g) + P(m \cap g) = 0,250 + 0,072 = \underline{0,32}$

e)  $P(g) \cdot P_g(w) = P(w \cap g) \Rightarrow P_g(w) = \frac{P(w \cap g)}{P(g)} = \frac{0,250}{0,32} = \underline{0,78}$

f)  $P_w(g) = \underline{0,48}$  (war gegeben!)

#### Summenregel und totale Wahrscheinlichkeit bei mehrstufigen Ereignissen

Um eine **totale Wahrscheinlichkeit**  $P(A)$  zu berechnen, addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse (Pfade), die auf das gewünschte Ereignis führen, z.B.

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(C) \cdot P_C(A)$$

Um eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**  $P_D(A)$  zu berechnen, löst man die entsprechende Gleichung der Produktregel auf, z.B.

$$P(D) \cdot P_D(A) = P(D \cap A) \quad | : P(D)$$

$$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

Übungen: Aufgaben zu mehrstufigen Zufallsexperimenten Nr. 22 - 24