3.3. Aufgaben zur Binomialverteilung

Aufgabe 1: Ziehen mit Zurücklegen und Binomialverteilung
Ein sechsseitiger Würfel wird zehnmal geworfen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, **nur beim ersten Mal** die 6 zu würfeln?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, **genau ein Mal** die 6 zu würfeln? („1 Treffer“)
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, **genau zwei Mal** die 6 zu würfeln? („2 Treffer“)
d) Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X, die die Zahl der gewürfelten Sechsen unter der 10 Würfen angibt („X Treffer“)
e) Wie viele Sechsen lassen sich im Mittel erwarten, wenn man zehnmal würfelt?

Aufgabe 2: Ziehen mit Zurücklegen und Binomialverteilung
Eine ideale Münze wird zehnmal geworfen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3 mal „Kopf“ zu werfen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 3 mal „Kopf“ zu werfen?
c) Wie viele Male wird „Kopf“ im Mittel zu erwarten sein, wenn man zehnmal wirft?

Aufgabe 3: Binomialverteilung
Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

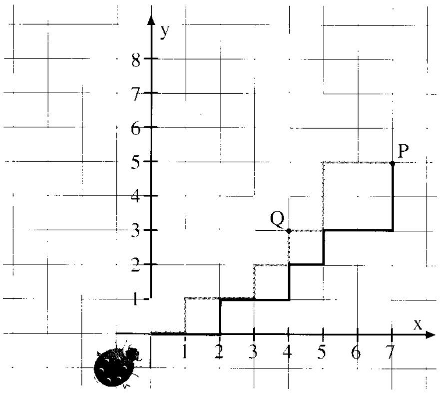
a) $B_{11\ 0,3}(7)$	d) $B_{10\ 0,3}(X \leq 6)$	g) $B_{15\ 0,3}(2 \leq X \leq 6)$
b) $B_{19\ 0,6}(8)$	e) $B_{10\ 0,9}(X \leq 3)$	h) $B_{20\ 0,4}(6 \leq X \leq 9)$
c) $B_{14\ 0,4}(9)$	f) $B_{20\ 0,6}(X \leq 11)$	i) $B_{10\ 0,7}(6 \leq X \leq 8)$

Aufgabe 4: Mädchen und Jungen
Die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt ist 52 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit 7 Kindern
a) genau 4 Jungen b) höchstens 4 Jungen?

Aufgabe 5: Nebenwirkungen
Ein Arzneimittelhersteller bietet zur Behandlung einer Tierkrankheit ein Mittel an, das normalerweise bei höchstens 10 % der behandelten Tiere Nebenwirkungen zeigen soll. Da einige Tiere erkrankt sind, behandelt Bauer Reidlin vorsorglich alle seine 200 Kühe, 30 zeigen deutliche Nebenwirkungen.
Wir gehen davon aus, daß die Aussage der Arzneimittelfirma stimmt. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sich dieses schlechte Resultat
a) zufällig ergibt? b) ein noch schlechteres Resultat zufällig ergibt?

Aufgabe 6: Qualitätskontrolle
Ein Computerhersteller will eine neue Bestückungsmaschine für Platinen kaufen. Die Ausschußrate soll höchstens 5 % sein. Zur Kontrolle wird ein Probelauf mit 20 Platinen durchgeführt. Sind mehr als k Platinen fehlerhaft bestückt, so muss die Produktion gestoppt und kostenfrei nachgebessert werden.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer tatsächlichen Ausschussrate von 5 % höchstens 3 fehlerhafte Platinen?
b) Wie muss die Zahl k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Produktionsstopp trotz ausreichender Ausschussrate kleiner als 10 % ist?

Aufgabe 7: Irrfahrt
Ein Käfer beginnt zur Zeit 0 im Ursprung eines Koordinatensystems eine Wanderung, bei der er in jeder Minute seine Position um eine Einheit nach rechts oder oben zufällig ändert.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Käfer nach 12 Minuten im Punkt $P(7|5)$?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt der Käfer dabei über den Punkt $Q(4|3)$ zum Punkt P?
c) Welche Strecke wird der Käfer im Mittel nach 12 Minuten in x-Richtung zurückgelebt haben?



Aufgabe 8: de Méré-Problem

Der Chevalier de Méré befragte um 1650 in Paris den Mathematiker Blaise Pascal nach den Gewinnchancen der beiden folgenden Ereignisse:

a) Beim 4-maligen Würfeln mindestens eine Sechs
b) Beim 24-maligen Würfeln mit jeweils 2 Würfeln mindestens eine Doppelsechs.

Er war der Meinung, dass die Gewinnchancen gleich seien, denn bei a) ist zwar die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Einzelwurf 6 mal so klein, dafür wird der Versuch aber 6 mal so oft wiederholt. Wie ist deine Meinung?

Aufgabe 9: de Medici-Problem

Der Herzog Ferdinando de Medici fragte den Mathematikprofessor Galileo Galilei um 1600 in Florenz, warum beim Werfen dreier Würfel die Augensumme 10 öfter erscheine als die Augensumme 9, obwohl man beide Summen auf jeweils gleich viele Arten als Summe von drei Zahlen schreiben könne. Wie ist deine Meinung?

Aufgabe 10: Lotto mit Zusatzzahl

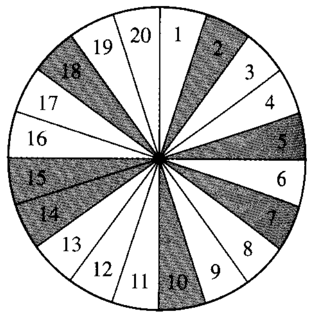
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit für 5 Richtige mit Zusatzzahl. Die Zusatzzahl wird im Anschluß an die die 6 Gewinnzahlen aus der gleichen Urne gezogen.
b) Beim Lotto mit Zusatzzahl werden insgesamt 7 Zahlen gezogen, von denen 6 richtig sein müssen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige beim Lotto „7 aus 49“ und vergleiche mit a).

Aufgabe 11: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim einmaligen Würfeln

Ein Spieler zahlt 2 €, um an dem folgenden Spiel teilzunehmen. Würfelt er eine gerade Augenzahl, so muss er den Betrag der Augenzahl in € an die Bank zahlen. Würfelt er ein ungerade Augenzahl, so erhält er das Doppelte der Augenzahl von der Bank als Gewinn. Die Zufallsvariable X(e) gibt den Gewinn bzw. Verlust des Spielesr bei der Augenzahl e an.

a) Stelle eine Wertetabelle für X(e) auf.
b) Berechne den Erwartungswert E(X).
c) Korrigiere den Einsatz so, dass das Spiel fair wird.

Aufgabe 12: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Glücksrad



Ein Spieler zahlt 1 €, um einmal an dem Glücksrad drehen zu dürfen. Er gewinnt den doppelten Betrag der roten Zahlen und verliert den einfachen Betrag der weißen Zahlen in €.

a) Stelle eine Wertetabelle für X(e) auf.
b) Berechne den Erwartungswert E(X).
c) Korrigiere den Einsatz so, dass das Spiel fair wird.

Aufgabe 13: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln

Oliver und Markus spielen mit einem regelmäßigen Dodekaeder (Zwölfflächner) mit den Zahlen 1 bis 12. Wenn eine Primzahl fällt, zahlt Oliver den Betrag der Zahl in € an Markus, andernfalls bekommt er den Betrag der gewürfelten Zahl in € von Markus.

a) Ist das Spiel fair?
b) Nach ein paar Tagen verlangen Markus’ Eltern die Festlegung aller Gewinnsätze auf genau 1 €. Ist das Spiel jetzt fair?

Aufgabe 14: Varianzen und Standardabweichung beim Würfeln und beim Glücksrad

a) Berechne die Varianzen und Standardabweichungen bei den Aufgaben 1 - 3.
b) Wie unterscheiden sich die Standardabweichungen bei fairen und unfairen Spielversionen?
c) Welches der drei Spiele hat das höchste Risiko?

Aufgabe 15: Erwartungswert und Standardabweichung bei einer Bernoulli-Kette

Eine zwölfte Klasse veranstaltet am letzten Schultag das folgende Glückspiel. Gegen einen Einsatz von 1 € darf jeder einmal würfeln. Fällt eine 6, so erhält er 6 € von der Bank, bei allen anderen Zahlen erhält er nichts. Die Schulleitung genehmigt das Spiel, aber im nachhinein melden die Eltern heulender Fünftklässler ethische Bedenken an.

a) Zeige, dass das Spiel auch bei 5 Durchgängen fair bleibt.
b) Berechne die Standardabweichung nach 5 Spielen.
c) Gib das Pleiterisiko in den ersten 5 Spielen für einen Fünftklässler an, der sein gesamtes Taschengeld von 5 € einsetzt.

Aufgabe 16: Erwartungswert und Standardabweichung bei Lebensversicherung
Die folgenden Tabelle gibt die Überlebenswahrscheinlichkeiten einer bestimmten Berufs- bzw. Risikogruppe an:

Überlebenswahrscheinlichkeit	90 %	70 %	40 %	20 %	10 %	7 %	3 %
bis zum Alter	70	75	80	85	90	95	100

Eine Versicherung möchte für diese Risikogruppe einen Vertrag anbieten, der dem Versicherungsnehmer vom 65. Lebensjahr an eine monatliche Rente von 1000 € garantiert.

a) Berechne die Versicherungsprämie so, dass im Mittel ein Gewinn von 10 % der Prämie für die Versicherung erzielt wird.
b) Die Versicherung legt für den Fall unerwarteter Langlebigkeit für jeden Versicherungsnehmer eine Rücklage in Höhe der Standardabweichung vom zu erwartenden Gewinn zurück. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Rücklage für einen sehr langlebigen Versicherungsnehmer nicht ausreicht (Pleiterisiko!).

Aufgabe 17: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung
Das Glücksrad aus Aufgabe 2 wird 20 mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft eine rote Zahl erscheint

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.
b) Skizzieren Sie mit Hilfe von μ und σ das Histogramm von X
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um weniger als σ von ihrem Erwartungswert μ ab?
d) Wie oft muss man drehen, um mit 99 %-iger Sicherheit mindestens eine rote Zahl zu erreichen?

Aufgabe 18: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung
Ein idealer Würfel wird 200 mal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei die 6 gewürfelt wurde.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.
b) Skizzieren Sie mit Hilfe von μ und σ das Histogramm von X
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um weniger als σ von ihrem Erwartungswert μ ab?
d) Wie oft muss man würfeln, um mit 99 %-iger Sicherheit mindestens eine 6 zu werfen?

3.3. Lösungen zu den Aufgaben zur Binomialverteilung

Aufgabe 1: Ziehen mit Zurücklegen und Binomialverteilung

$P(X = k) = B_{n,\ 1/6}(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k} \quad \Rightarrow$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X=k)	16,1%	32,3%	29,1%	15,5%	5,4%	1,3%	0,2%	0,002%	$1{,}9\cdot 10^{-3}$%	$8{,}3\cdot 10^{5}$%	$1{,}7\cdot 10^{-6}$%

$\Rightarrow$ E(X) = 1,67

Aufgabe 2: Ziehen mit Zurücklegen und Binomialverteilung

$P(X = 3) = B_{10;0,5}(3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} \approx 11{,}7\ \%$

$P(X \le 3) = B_{10;0,5}(0) + ... + B_{10;0,5}(3) = (1 + 10 + 45 + 120)\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-3} \approx 17{,}2\ \%$

$\Rightarrow$ E(X) = 5

Aufgabe 3: Binomialverteilung

a) $B_{11\ 0,3}(7) = 0{,}0173$
b) $B_{19\ 0,6}(8) = 0{,}0532$
c) $B_{14\ 0,4}(9) = 0{,}0408$
d) $B_{10\ 0,3}(X \le 6) = 0{,}98941$
e) $B_{10\ 0,9}(X \le 3) = 0{,}00001$
f) $B_{20\ 0,6}(X \le 11) = 0{,}40440$
g) $B_{15\ 0,3}(2 \le X \le 6) = 0{,}83358$
h) $B_{20\ 0,4}(6 \le X \le 9) = 0{,}62974$
i) $B_{10\ 0,7}(6 \le X \le 8) = 0{,}70042$

Aufgabe 4: Mädchen und Jungen

a) $B_{7\ 0,52}(4) = 28{,}3\ \%$
b) $B_{7\ 0,52}(X \le 4) = 73{,}93\ \%$

Aufgabe 5: Nebenwirkungen

a) $B_{200\ 0,1}(30) = 0{,}68\ \%$
b) $B_{200\ 0,1}(X > 30) = 1 - B_{200\ 0,1}(X \le 30) = 0{,}95\ \%$

Aufgabe 6: Qualitätskontrolle

a) $B_{20\ 0,05}(X \le 3) = 98{,}41\ \%$

b) $B_{20\ 0,05}(X \le 2) = 92{,}45\ \% \Rightarrow B_{20\ 0,05}(X > 2) = 7{,}55\ \% < 10\ \%$

Aufgabe 7: Irrfahrt

a) $P(P(7|5)) = B_{12;0,5}(7) = \binom{12}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} \approx 19{,}4\ \%$

b) P(Erst Q(4|3) und dann P(7|5)) = $B_{7;0,5}(4)\cdot B_{5;\ 0,5}(3) = \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} \approx 8{,}6\ \%$

c) E(X) = 6

Aufgabe 8: de Méré-Problem

a) P(mindestens eine Sechs) = 1 − P(keine Sechs) = $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 51{,}8\ \%$

b) P(mindestens eine Doppelsechs) = 1 − P(keine Doppelsechs) = $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49{,}1\ \%$

Aufgabe 9: de Medici-Problem

P(Augensumme 9) = P(1,2,6) + P(1,3,5) + P(1,4,4) + P(2,2,5) + P(2,3,4) + P(3,3,3)

$= (3\cdot 3! + 2\cdot 3 + 1)\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{216} \approx 11{,}6\ \%$

P(Augensumme 10) = P(1,3,6) + P(1,4,5) + P(2,2,6) + P(2,3,5) + P(2,4,4) + P(3,4,3)

$= (3\cdot 3! + 3\cdot 3)\cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{27}{216} = 12{,}5\ \%$

Aufgabe 10: Lotto mit Zusatzzahl

a) P(5 Richtige und Zusatzzahl) = $\binom{6}{5} \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{43}{44} \cdot \frac{1}{43}$ = 6·P(6 Richtige) = 2 330 636^{-1}.

b) P(6 Richtige von 7) = $\binom{7}{6} \cdot \frac{7}{49} \cdot \frac{6}{48} \cdot \frac{5}{47} \cdot \frac{4}{46} \cdot \frac{3}{45} \cdot \frac{2}{44} \cdot \frac{42}{43}$ = 36 $522{,}35^{-1}$ ≈ 36,8·P(5 Richtige und Zusatzzahl).

Die Gewinnchance ist hier höher als bei a), weil man 7 Versuche anstelle von 6 hat und die Niete an 7 Stellen stehen darf anstelle von 6.

Aufgabe 11: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim einmaligen Würfeln

e	1	2	3	4	5	6
X(e)	0	−2	4	−6	8	−8

⇒ E(X) = −0,67 € ⇒ korrigierter Einsatz 1,33 €

Aufgabe 12: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Glücksrad

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X(e)	−2	3	−4	−5	9	−7	13	−9	−10	19	−12	−13	−14	27	29	−17	−18	35	−20	−21

⇒ E(X) = −0,85 € ⇒ korrigierter Einsatz 0,15 €

Aufgabe 13: Zufallsvariablen und Erwartungswert beim Würfeln

e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X(e)	1	2	3	−4	5	−6	7	−8	−9	−10	11	−12
X'(e)	1	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1	−1	1	−1

X = Gewinn von Markus ⇒ E(X) = −1,67 €

X' = Gewinn von Markus ⇒ E(X') = 0

Aufgabe 14: Varianzen und Standardabweichung beim Würfeln und beim Glücksrad
Aufgabe 1: V(X) = 30,22 $€^2$ und σ ≈ 5,50 €
Aufgabe 2: V(X) = 281,93 $€^2$ und σ ≈ 16,79 €
Aufgabe 3: V(X) = 61,66 $€^2$ und σ ≈ 7,85 €
Aufgabe 3: V(X') = 1 $€^2$ und σ' ≈ 1 €

Aufgabe 15: Erwartungswert und Standardabweichung bei einer Bernoulli-Kette

k	0	1	2	3	4	5
X(k)	−5	1	7	11	17	23
P(k) = $B_{5\ 1/6}(k)$	0,402	0,402	0,161	0,032	0,003	0,0001

E(X) = 0, V(X) = 23,08 $€^2$ und σ = 4,80 €; Pleiterisiko = $B_{5\ 1/6}(5)$ = 40,2 %

Aufgabe 16: Erwartungswert bei Lebensversicherung
Da die meisten Kunden nicht genau am Ende sondern irgendwann im Laufe der gegebenen Fünfjahresabschnitte sterben werden, muss man für die Berechnung der zu erwartenden Auszahlungen ein mittleres Sterbedatum willkürlich festsetzen. Hier wird einfach jeweils die Mitte der Fünfjahresabschnitte gewählt. X sei die insgesamt ausbezahlte Rente

t in Monaten	0 ≤ t ≤ 30	31 ≤ t ≤ 90	91 ≤ t ≤ 150	151 ≤ t ≤ 210	211 ≤ t ≤ 270	271 ≤ t ≤ 330
X(t)(	30 000	90 000	150 000	210 000	270 000	330 000
P(t)	0,1	0,3	0,2	0,13	0,04	0,03

⇒ E(X) = 108 000 €. Da noch 10 % Gewinn abfallen sollen, müsste die Prämie P = $\frac{E(X)}{0{,}9}$ = 120 000 € betragen.
V(X) = 4 939 200 000 $€^2$, σ = 70 279 €, P(X > P + σ) = P(X > 190 279 €) = P(t > 151 Monate) = 20 % (!)

Aufgabe 17: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

a) $\mu = 7$ und $\sigma = 2{,}13$

b) Histogramm mit Maximum bei $P(X = 7) = 18{,}4\ \%$ (Skalierung der y-Achse!) und Wendepunkten bei $P(X = 5) = 12{,}7\ \%$ und $P(X = 9) = 11{,}6\ \%$

c) $P(|X - \mu| < \sigma) = P(5 \leq X \leq 9) = 76{,}00\ \%$

d) $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0{,}01 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{20}\right)^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \ln(100) - \ln(\frac{20}{7}) = 3{,}55 \Rightarrow$ mind. 4 mal drehen

Aufgabe 18: Erwartungswert und Standardabweichung bei der Binomialverteilung

a) $\mu = 33{,}3$ und $\sigma = 5{,}27$

b) Histogramm mit Maximum bei $P(X = 33) = 7{,}56\ \%$ (Skalierung der y-Achse!) und Wendepunkten bei $P(X = 29) = 5{,}6\ \%$ und $P(X = 38) = 4{,}91\ \%$

c) $P(|X - \mu| < \sigma) = P(29 \leq X \leq 38) = 65{,}65\ \%$

d) $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0{,}01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \ln(100) - \ln(1{,}2) = 4{,}42 \Rightarrow$ mindestens 5 mal würfeln