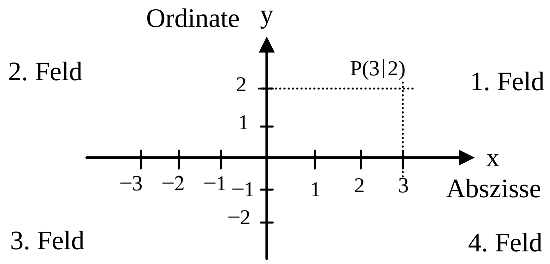
4.1. lineare Funktionen

4.1.1. Das kartesische Koordinatensystem

Definition:
Zahlenpaare (x|y) werden häufig in einem **kartesischen** (nach René Descartes 1637) Koordinatensystem veranschaulicht. Dabei gelten die folgenden Bezeichnungen:
Ursprung (Origo (lat) = Ursprung) = O(0|0)
Abszisse (abscindere (lat) = abtrennen) = x-Wert
Ordinate (ordinare (lat) = ordnen) = y-Wert



Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 1

4.1.2. Funktionen

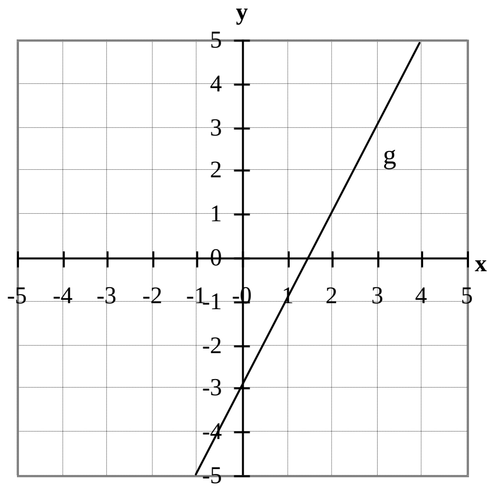
Einführung: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 2

Funktionen
Eine Funktion ist eine **eindeutige** Vorschrift, die jedem Element x der **Definitionsmenge** D genau ein Element y = f(x) der **Wertemenge** W zuordnet. Die Vorschrift y = f(x) wird auch **Funktionsgleichung** genannt. Trägt man alle **Argumente** x mit ihren zugehörigen **Werten** y = f(x) in eine **Tabelle** ein, so erhält man die **Wertetabelle**. Trägt man alle Paare (x|y) = (x|f(x)) als Punkte in ein rechtwinkliges **Koordinatensystem** ein, so erhält man das **Schaubild** der Funktion.

Beispiel:
Jeder rationalen Zahl x zwischen −5 und 5 wird eine Zahl g(x) zugeordnet. Die Zahl g(x) erhält man, indem man x verdoppelt und anschließend um 3 vermindert. Diese Zuordnung (**Funktion**) lässt sich beschreiben durch
Funktionsgleichung: $g(x) = 2x - 3$
Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{Q}: -5 \le x \le 5\}$
Wertemenge: $W = \{y \in \mathbb{Q}: -13 \le y \le 7\}$

Wertetabelle:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
g(x)	−13	−11	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7



Schaubild

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 3 - 5

4.1.3. lineare Funktionen

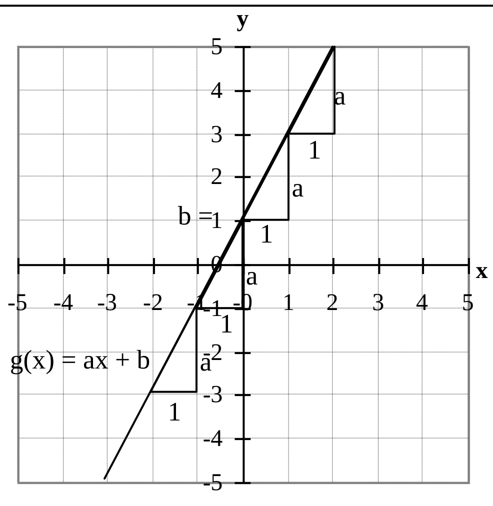
Definition und Satz über lineare Funktionen
Eine Funktion g mit der Funktionsgleichung g(x) = ax + b und **Koeffizienten** a, b ∈ ℝ heißt **lineare Funktion**. Ihr Schaubild ist eine **Gerade** mit der **Steigung oder Wachstumsrate** a und dem **y-Achsenabschnitt** b, die die y-Achse im Punkt $S_y(0|b)$ schneidet.

Wertetabelle:

+1 +1 +1

x	−2	−1	0	1	2
g(x)	−2a+b	−a+b	b	a + b	2a + b

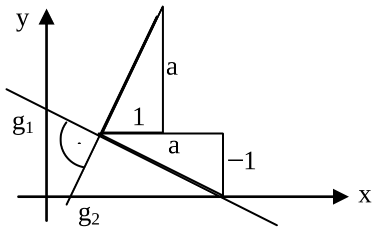
+a +a +a



4.1.4. Parallele und orthogonale Geraden

Satz über parallele und orthogonale Geraden
Zwei Geraden $g_1(x) = a_1x + b_1$ und $g_2(x) = a_2x + b_2$ verlaufen

- **parallel** zueinander, falls $a_1 = a_2$
- **orthogonal** zueinander, falls $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.



Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 6

4.1.5. Bestimmung einer Geradengleichung aus gegebenem Punkt und Steigung

Bestimmung einer Geradengleichung aus gegebenem Punkt und Steigung
Ist die Gleichung einer Geraden y = ax + b mit der Steigung a durch den Punkt $P(x_0|y_0)$ gesucht, so bestimmt man den y-Achsenabschnitt b durch **Einsetzen** der Koordinaten x_0 und y_0 und Auflösen nach b:

Beispiel:
Bestimme die Gleichung der Geraden g mit der Steigung 3 durch den Punkt P(−2|1)
Lösung:
Einsetzen von a = 3, $x_0 = -2$ und $y_0 = 1$ in die Geradengleichung y = ax + b ergibt $1 = 3\cdot(-2) + b \Leftrightarrow 1 = -6 + b \Leftrightarrow b = 7$. Die gesuchte Gleichung ist also g(x) = 3x + 7

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 7

4.1.6. Bestimmung einer Geradengleichung aus zwei gegebenen Punkten

Bestimmung einer Geradengleichung aus zwei gegebene Punkten
Ist die Gleichung einer Geraden y = ax + b gesucht, die durch zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ verläuft, so setzt man die Koordinaten der beiden Punkte in die Geradengleichung ein: $y_1 = ax_1 + b$ und $y_2 = ax_2 + b$. Man erhält damit **zwei Gleichungen mit zwei Variablen** a und b, die sich mit Hilfe des **Einsetzungs**-, **Gleichsetzungs**- oder **Additionsverfahrens** (siehe 3.0.2. - 3.0.4.) lösen lassen

Beispiel:
Bestimme die Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte P(2|3) uns Q(−1|4) geht.
Lösung:
Man setzt die Koordinaten der beiden Punkte ein und löst die beiden Gleichungen z.B. mit dem **Additionsverfahren** (siehe 3.0.4.)

:

$$
\begin{array}{l|rcl|l}
P(2|3): & 3 &=& 2a + b & \\
Q(-1|4): & 4 &=& -a + b & \cdot 2 \\
\hline
 & 3 &=& 2a + b & \cdot(-3) \\
 & 11 &=& 3b & \\
\hline
 & 2 &=& -6a & :(-6) \\
 & 11 &=& 3b & :3 \\
\hline
 & -\frac{1}{3} &=& a & \\
 & \frac{11}{3} &=& b &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ die gesuchte Gerade hat die Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 8

4.1.7. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Schnittpunkt mit der y-Achse
Am Schnittpunkt mit der y-Achse ist $x = 0$.
Die y-Koordinate berechnet sich durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsgleichung.

Beispiel:
Gib den Punkt an, in dem die Gerade $g(x) = 3x + 2$ die y-Achse schneidet.
Lösung:
$y = 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow S_y(0|2)$

Schnittpunkt mit der x-Achse
Am Schnittpunkt mit der x-Achse ist $y = 0$.
Die x-Koordinate berechnet sich daher durch Nullsetzen der Funktionsgleichung und Auflösen nach x.

Beispiel:
Gib den Punkt an, in dem die Gerade $g(x) = 3x + 2$ die x-Achse schneidet.
Lösung:
$0 = 3x + 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = x \Rightarrow S_x(-\frac{2}{3}|0)$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 9 und 10

Gemeinsame Punkte von Geraden
Ein gemeinsamer Punkt $S(x|y)$ zweier Geraden $g(x)$ und $h(x)$ liegt vor, wenn beide Geraden den gleichen y-Wert $g(x) = h(x)$ an der Stelle x aufweisen. Man erhält die Koordinaten des Punktes also durch
1. **Gleichsetzen** $g(x) = h(x)$ und Auflösen nach x
2. **Einsetzen** $y = g(x)$ oder $y = h(x) \Rightarrow$ **Probe**

Beispiel:
Gib den Schnittpunkt der beiden Geraden $g(x) = 3x + 2$ und $h(x) = -x - 6$ an.
Lösung:
1. Berechnung von x_0 durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen
:
$$\begin{aligned} 3x + 2 &= -x - 6 && |\ +x; -2 \\ 4x &= -8 && |:4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$
2. Berechnung von y durch Einsetzen von x
$$\begin{aligned} y &= g(-2) = 3\cdot(-2) + 2 = -4 \text{ oder} \\ y &= h(-2) = -(-2) - 6 = -4 \text{ (Probe)} \end{aligned}$$
$$\Rightarrow S_{fg}(-2|-4)$$

Übungen: Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 11 - 13