4.2. Musteraufgaben zu quadratischen Funktionen

Aufgabe 1: Bestimmung von Scheitelpunkt und Achsenschnittpunkte
Bestimme den Scheitelpunkt und die Achsenschnittpunkte der Parabel p:

a) $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 11$.

b) $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 - x + 2$

c) $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x$

d) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$.

e) $p(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$.

Aufgabe 2: Bestimmung von Funktionsgleichungen
Bestimme die Gleichung der Parabel p durch die Punkte A, B und C:

a) $A(-5 \mid 4)$, $B(-2 \mid 1)$ und $C(1 \mid 4)$
b) $A(-8 \mid -16)$, $B(-6 \mid -15)$ und $C(-4 \mid -12)$
c) $A(-2 \mid 2)$, $B(3 \mid -3)$ und $C(4 \mid -2{,}8)$
d) $A(-9 \mid -2{,}5)$, $B(-6 \mid 2)$ und $C(3 \mid -2{,}5)$
e) $A(3 \mid 1)$, $B(4 \mid 1{,}75)$ und $C(5 \mid 2)$

4.1. Lösungen zu den Musteraufgaben zu quadratischen Funktionen

Aufgabe 1: Bestimmung von Scheitelpunkt und Achsenschnittpunkte

Teil a)
Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 11 && \Big|\ -\frac{1}{2} \text{ ausklammern} \\ &= -\frac{1}{2}[x^2 - 10x + 22] && \Big|\ \text{quadratische Ergänzung mit } 5^2 \\ &= -\frac{1}{2}[x^2 - 10x + 25 - 25 + 22] && \Big|\ \text{2. binomische Formel} \\ &= -\frac{1}{2}[(x-5)^2 - 3] && \Big|\ -\frac{1}{2} \text{ wieder einklammern} \\ &= -\frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(5 \mid -\frac{3}{2})$

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:
$y = -0{,}5\cdot 0^2 + 5\cdot 0 - 11 = -11 \Rightarrow S_y(0 \mid -11)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:
$y = -0{,}5x^2 + 5x - 11 = -0{,}5[x^2 - 10x + 22] \Rightarrow x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{3} \Rightarrow S_{x1/2}(5 \pm \sqrt{3} \mid 0)$

Teil b)
Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{6}x^2 - x + 2 && \Big|\ (-\frac{1}{6}) \text{ ausklammern} \\ &= -\frac{1}{6}[x^2 + 6x - 12] && \Big|\ \text{quadratische Ergänzung mit } 3^2 \\ &= -\frac{1}{6}[x^2 + 6x + 9 - 9 - 12] && \Big|\ \text{1. binomische Formel} \\ &= -\frac{1}{6}[(x+3)^2 - 21] && \Big|\ (-\frac{1}{6}) \text{ wieder einklammern} \\ &= -\frac{1}{6}(x+3)^2 + 3{,}5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(-3 \mid 3{,}5)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:
$y = -\frac{1}{6}\cdot 0^2 - 0 + 2 = 2 \Rightarrow S_y(0 \mid 2)$
Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:
$y = -\frac{1}{6}x^2 - x + 2 = -\frac{1}{6}[x^2 + 6x - 12] \Rightarrow x_{1/2} = -3 \pm \sqrt{21} \Rightarrow S_{x1/2}(-3 \pm \sqrt{21} \mid 0)$

Teil c)
Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}x^2 + 4x && \Big|\ \frac{1}{4} \text{ ausklammern} \\ &= \frac{1}{4}[x^2 + 16x] && \Big|\ \text{quadratische Ergänzung mit } 8^2 \\ &= \frac{1}{4}[x^2 + 16x + 64 - 64] && \Big|\ \text{1. binomische Formel} \\ &= \frac{1}{4}[(x+8)^2 - 64] && \Big|\ \frac{1}{4} \text{ wieder einklammern} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{4}(x + 8)^2 - 16$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(-8 \mid -16)$
Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:

$y = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow S_y(0 \mid 0)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$y = \frac{1}{4}x^2 + 4x = \frac{1}{4}[x^2 + 16x + 0] \Rightarrow x_{1/2} = -8 \pm 8 \Rightarrow S_{x1/2}(-8 \pm 8 \mid 0)$

Teil d)
Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}.$	$\mid \frac{1}{3}$ ausklammern
$= \frac{1}{3}[x^2 + 4x + 7]$	$\mid$ quadratische Ergänzung mit 2^2
$= \frac{1}{3}[x^2 + 4x + 4 - 4 + 7]$	$\mid$ 1. binomische Formel
$= \frac{1}{3}[(x + 2)^2 + 3]$	$\mid \frac{1}{3}$ wieder einklammern
$= \frac{1}{3}(x + 2)^2 + 1$	

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(-2 \mid 1)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:

$y = \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{4}{3} \cdot 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow S_y(0 \mid \frac{7}{3})$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} = \frac{1}{3}[x^2 + 4x + 7] \Rightarrow x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{-3} \Rightarrow$ ~~keine~~ Nullstellen, da negativer Radikand !

Teil e)
Scheitelpunkt: quadratische Ergänzung:

$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$	$\mid \frac{1}{5}$ ausklammern
$= \frac{1}{5}[x^2 - 6x - 6]$	$\mid$ quadratische Ergänzung mit 3^2
$= \frac{1}{5}[x^2 - 6x + 9 - 9 - 6]$	$\mid$ 2. binomische Formel
$= \frac{1}{5}[(x - 3)^2 - 15]$	$\mid \frac{1}{5}$ wieder einklammern
$= \frac{1}{5}(x - 3)^2 - 3$	

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(3 \mid -3)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: x = 0 einsetzen:

$y = \frac{1}{5} \cdot 0^2 - \frac{6}{5} \cdot 0 - \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow S_y(0 \mid -\frac{6}{5})$

Schnittpunkt mit der x-Achse: y = 0 setzen und Gleichung mit p-q-Formel lösen:

$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{6}{5} = \frac{1}{3}[x^2 - 6x - 6] \Rightarrow x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{15} \Rightarrow S_{x1/2}(3 \pm \sqrt{15} \mid 0)$

Aufgabe 2: Bestimmung von Funktionsgleichungen
Teil a)
Punkte A, B und C in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{ll} A(-5 \mid 4): & 4 = a\cdot(-5)^2 + b\cdot(-5) + c \\ B(-2 \mid 1): & 1 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \\ C(1 \mid 4): & 4 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \end{array}$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{aligned} 25a - 5b + 1c &= 4 \\ 4a - 2b + 1c &= 1 \\ 1a + 1b + 1c &= 4 \end{aligned}$$

als Matrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & -5 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$.

Teil b)
Punkte A, B und C in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{ll} A(-8 \mid -16): & -16 = a\cdot(-8)^2 + b\cdot(-8) + c \\ B(-6 \mid -15): & -15 = a\cdot(-6)^2 + b\cdot(-6) + c \\ C(-4 \mid -12): & -12 = a\cdot(-4)^2 + b\cdot(-4) + c \end{array}$$

Seiten vertauschen:

$$\begin{aligned} 64a - 8b + 1c &= -16 \\ 36a - 6b + 1c &= -15 \\ 16a - 4b + 1c &= -12 \end{aligned}$$

als Matrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 64 & -8 & 1 & -16 \\ 36 & -6 & 1 & -15 \\ 16 & -4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x$.

Teil c)
Punkte A, B und C in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einsetzen und LGS lösen:

$$\begin{array}{ll} A(-2 \mid 2): & 2 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \\ B(3 \mid -3): & -3 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \\ C(4 \mid -2{,}8): & -2{,}8 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \end{array}$$

Seiten vertauschen:

$4a - 2b + 1c = 2$
$9a + 3b + 1c = -3$
$16a + 4b + 1c = -2{,}8$

als Matrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & -3 \\ 16 & 4 & 1 & -2{,}8 \end{array}\right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0 & -1{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & -1{,}2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung $y = 0{,}2x^2 - 1{,}2x - 1{,}2$.

Teil d)
Punkte A, B und C in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einsetzen und LGS lösen:

A(−9 | −2,5): $-2{,}5 = a\cdot(-9)^2 + b\cdot(-9) + c$
B(−6 | 2): $2 = a\cdot(-6)^2 + b\cdot(-6) + c$
C(3 | −2,5): $-2{,}5 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$

Seiten vertauschen:

$81a - 9b + 1c = -2{,}5$
$36a - 6b + 1c = 2$
$9a + 3b + 1c = -2{,}5$

als Matrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 81 & -9 & 1 & -2{,}5 \\ 36 & -6 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & 1 & -2{,}5 \end{array}\right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref, Brüche anzeigen mit MATH/1:frac

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{6}x^2 - x + 2$.

Teil e)
Punkte A, B und C in die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einsetzen und LGS lösen:

A(3 | 1): $1 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$
B(4 | 1,75): $1{,}75 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c$
C(5 | 2): $2 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c$

Seiten vertauschen:

$9a + 3b + 1c = 1$
$16a + 4b + 1c = 1{,}75$
$25a + 5b + 1c = 2$

als Matrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 1,75 \\ 25 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

in GTR eingeben, Matrix/B:rref

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 2,5 \\ 0 & 0 & 1 & -4,25 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{17}{4}$