

4.2. Fragen zur Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Aufgabe 1: Achsenschnittpunkte und gemeinsame Punkte einer Parabel mit einer Geraden

Untersuche die Funktionen f und g auf Achsenschnittpunkte sowie gemeinsame Punkte. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel und zeichne die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$ und $g(x) = 2x + 2$
 $S_f(0|\frac{9}{2}), S_{f_{x1/2}}(\pm 3|0), S_{g_y}(0|2), S_{g_x}(-1|0), S_{fg1}(1|4)$ und $S_{fg2}(-5|-8)$ (9)

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ und $g(x) = x$
 $S_f(0|\frac{1}{2}), S_{f_{x1/2}}(\pm 1|0), S_{g_x}(0|0) = S_{g_y}, S_{fg1}(1|1)$ und $S_{fg2}(-1|-1)$ (8)

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ und $g(x) = -2x + 4$
 $S_f(1|-1), S_{f_{x1/2}}(1 \pm 1|0)$ (zugleich Schnittpunkt mit y-Achse), $S_{fg}(2|0)$ (Berührungspunkt) (8)

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
 $S_f(\frac{10}{3}), S_{f_y}(0|\frac{1}{3})$ und $S_{f_{x1/2}}(3 \pm \sqrt{10}|0)$ sowie $S_{g_y}(0|\frac{7}{3})$ und $S_{g_x}(7|0)$ mit $S_{fg1}(1|2)$ und $S_{fg2}(6|\frac{1}{3})$. (9)

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{1}{3}$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
 $S_f(3|\frac{3}{10}), S_{f_y}(0|\frac{1}{3})$ und $S_{f_{x1/2}}(3 \pm \sqrt{10}|0)$ sowie $S_{g_y}(0|\frac{7}{3})$ und $S_{g_x}(7|0)$ mit $S_{fg1}(1|2)$ und $S_{fg2}(6|\frac{1}{3})$. (9)

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{1}{3}$ und $g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$
 $S_f(3|-\frac{10}{3}), S_{f_y}(0|-\frac{1}{3})$ und $S_{f_{x1/2}}(3 \pm \sqrt{10}|0)$ sowie $S_{g_y}(0|-\frac{7}{3})$ und $S_{g_x}(-7|0)$ mit $S_{fg1}(2|-3)$ und $S_{fg2}(3|-\frac{10}{3})$. (9)

Aufgabe 2: Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte und gemeinsame Punkte zweier Parabeln

Untersuche die Funktionen f und g auf Achsenschnittpunkte, Scheitelpunkte sowie gemeinsame Punkte. Zeichne die beiden Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 4$
 $S_f(0|0), S_g(0|4), S_{g_{x1/2}}(\pm 2|0), S_{fg1}(-\sqrt{2}|2), S_{fg2}(\sqrt{2}|2)$ (8)

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 6$
 $f(x) = (x-2)^2 - 2 \Rightarrow S_f(2|-2), S_{f_y}(0|2)$ und $S_{f_{x1/2}}(2 \pm \sqrt{2}|0)$ (5)

$g(x) = -(x+3)^2 + 3 \Rightarrow S_g(3|3), S_{g_y}(0|-6)$ und $S_{g_{x1/2}}(3 \pm \sqrt{3}|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|-1)$ und $S_{fg2}(4|2)$. (5)

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 - 6x + 6$
 $f(x) = -(x-2)^2 + 2 \Rightarrow S_f(2|2), S_{f_y}(0|-2)$ und $S_{f_{x1/2}}(2 \pm \sqrt{2}|0)$ (5)

$g(x) = (x-3)^2 - 3 \Rightarrow S_g(3|-3), S_{g_y}(0|6)$ und $S_{g_{x1/2}}(3 \pm \sqrt{3}|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-4)(x-1) \Rightarrow S_{fg1}(1|1), S_{fg2}(4|-2)$. (5)

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ und $g(x) = -x^2 - 2x + 1$
 $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x+1)(x-3) \Rightarrow S_f(1|-2), S_{f_y}(0|-\frac{3}{2}), S_{f_{x1}}(-1|0)$ und $S_{f_{x2}}(3|0)$ (5)

$g(x) = -(x+1)^2 + 2 \Rightarrow S_g(-1|2), S_{g_y}(0|1)$ und $S_{g_{x1/2}}(-1 \pm \sqrt{2}|0)$ (5)

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \Rightarrow S_{fg1}(1|-2)$ und $S_{fg2}(-\frac{5}{3}|\frac{14}{9})$ (5)

- e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ und $g(x) = x^2 - 2x - 1$
- $$f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x+3)(x-1) \Rightarrow S_f(-1|2), S_{f_y}(0|\frac{3}{2}), S_{f_{x1}}(-3|0) \text{ und } S_{f_{x2}}(1|0) \quad (5)$$
- $$g(x) = (x-1)^2 - 2 \Rightarrow S_g(1|-2), S_{g_y}(0|-1) \text{ und } S_{g_{x1/2}}(1 \pm \sqrt{2}|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}) \Rightarrow S_{fg1}(-1|2) \text{ und } S_{fg2}(\frac{5}{3}|\frac{14}{9}) \quad (5)$$
- f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$ und $g(x) = x^2 - 2x - 1$
- $$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 7) \Rightarrow S_f(1|4), S_{f_y}(0|\frac{7}{2}) \text{ und } S_{f_{x1/2}}(1 \pm 2\sqrt{2}|0) \quad (5)$$
- $$g(x) = (x-1)^2 - 2 \Rightarrow S_g(1|-2), S_{g_y}(0|-1) \text{ und } S_{g_{x1/2}}(1 \pm \sqrt{2}|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = \frac{3}{2}(x+1)(x-3) \Rightarrow S_{fg1}(-1|2) \text{ und } S_{fg2}(3|2) \quad (5)$$
- g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 8$
- $$f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12) \Rightarrow S_f(3|\frac{3}{2}), S_{f_y}(0|6) \text{ und keine Nullstellen} \quad (4)$$
- $$g(x) = \frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x-2)(x-8) \Rightarrow S_g(5|\frac{9}{2}), S_{g_y}(0|8), S_{g_{x1}}(2|0) \text{ und } S_{g_{x2}}(8|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x - 2 \Rightarrow S_{fg}(1|\frac{7}{2}) \quad (3)$$
- h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 7$
- $$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 3 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 10) \Rightarrow S_f(2|-3), S_{f_y}(0|-5) \text{ und keine Nullstellen} \quad (4)$$
- $$g(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 10) \Rightarrow S_g(4|1), S_{g_y}(0|-6) \text{ und } S_{g_{x1/2}}(4 \pm \sqrt{2}|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = 2x - 2 \Rightarrow S_{fg}(1|\frac{7}{2}) \quad (3)$$
- i) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{16}{3}$
- $$f(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 1 = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 12) \Rightarrow S_f(-3|1), S_{f_y}(0|4) \text{ und keine Nullstellen} \quad (4)$$
- $$g(x) = \frac{1}{3}(x+5)^2 - 3 = \frac{1}{3}(x+2)(x+8) \Rightarrow S_g(-5|-3), S_{g_y}(0|\frac{16}{3}), S_{g_{x1}}(-2|0) \text{ und } S_{g_{x2}}(-8|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow S_{fg}(-1|\frac{7}{3}) \quad (3)$$
- j) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ und $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{17}{3}$
- $$f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)(x+3) \Rightarrow S_f(0|3) = S_{f_y}(0|3) \text{ und } S_{f_{x1/2}}(\pm 3|0) \quad (3)$$
- $$g(x) = \frac{1}{3}(x + \frac{5}{2})^2 + 4 = \frac{1}{3}(x^2 + 10x + 17) \Rightarrow S_g(-\frac{5}{2}|4), S_{g_y}(0|\frac{17}{3}) \text{ und } S_{g_{x1/2}}(-2 \pm 2\sqrt{2}|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}(x+1)(x+4) \Rightarrow S_{fg1}(-4|\frac{7}{3}) \text{ und } S_{fg2}(-1|\frac{8}{3}) \quad (5)$$
- k) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ und $g(x) = x^2 - 2x - 3$
- $$f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 + 2 = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 7) \Rightarrow S_f(1|2), S_{f_y}(0|\frac{7}{3}) \text{ und keine Nullstellen} \quad (3)$$
- $$g(x) = (x-1)^2 - 4 = (x+1)(x-3) \Rightarrow S_g(1|-4), S_{g_y}(0|-3), S_{g_{x1}}(-1|0) \text{ und } S_{g_{x2}}(3|0) \quad (5)$$
- $$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x-4)(x+2) \Leftrightarrow S_{fg1}(4|5) \text{ und } S_{fg2}(-2|5) \quad (5)$$

$$1) \quad f(x) = x^2 + 2x + 5 \text{ und } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$$

$$f(x) = (x + 1)^2 + 4 \Rightarrow S_f(-1|4), S_{f_y}(0|4) \text{ und keine Nullstellen} \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 2) \Rightarrow S_g(2|-3), S_{g_y}(0|-1) \text{ und } S_{g_{x1/2}}(2 \pm \sqrt{6} | 0) \quad (5)$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = \frac{1}{2}(x + 2)(x + 6) \Rightarrow S_{fg1}(-2|5) \text{ und } S_{fg2}(-6|29) \quad (5)$$

$$m) \quad f(x) = x^2 + 2x + 3 \text{ und } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$$

$$f(x) = (x + 1)^2 + 2 \Rightarrow S_f(-1|2), S_{f_y}(0|3) \text{ und keine Nullstellen} \quad (3)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 5 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 6) \Rightarrow S_g(2|-5), S_{g_y}(0|-3) \text{ und } S_{g_{x1/2}}(2 \pm \sqrt{10} | 0) \quad (5)$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = \frac{1}{2}(x + 2)(x + 6) \Rightarrow S_{fg1}(-2|3) \text{ und } S_{fg2}(-6|27) \quad (5)$$

$$n) \quad f(x) = x^2 - 2x \text{ und } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) \Rightarrow S_f(1|-1), S_{f_y}(0|0) = S_{f_{x1}} \text{ und } S_{f_{x2}}(2|0) \quad (3)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{8} = -\frac{1}{2}(x - 2)(x + 3) \Rightarrow S_g\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{25}{8}\right), S_{g_y}(0|3), S_{g_{x1}}(2|0) \text{ und } S_{g_{x2}}(-3|0) \quad (5)$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 = \frac{3}{2}(x - 2)(x + 1) \Rightarrow S_{fg1}(2|0) \text{ und } S_{fg2}(-1|3) \quad (5)$$