4.2. Quadratische Funktionen

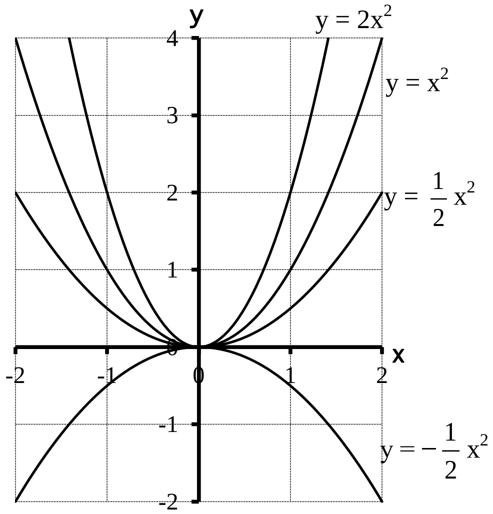
Definition: Normalform der Parabelgleichung

Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b,c \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische Funktion** oder **ganzrationale Funktion 2. Grades in Normalform**. Ihr Schaubild ist eine **Parabel**.

4.2.1. Streckung und Stauchung von Parabeln

Beispiele: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 1

x	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2$
-2	2	4	8	-2
-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
2	2	4	8	-2



Stauchung und Streckung von Schaubildern

Multiplikation mit **positiven** $\left\{\begin{matrix} a > 1 \\ a < 1 \end{matrix}\right\}$ bewirkt $\left\{\begin{matrix} \text{Streckung} \\ \text{Stauchung} \end{matrix}\right\}$ in y-Richtung der **nach oben** geöffneten Parabel.

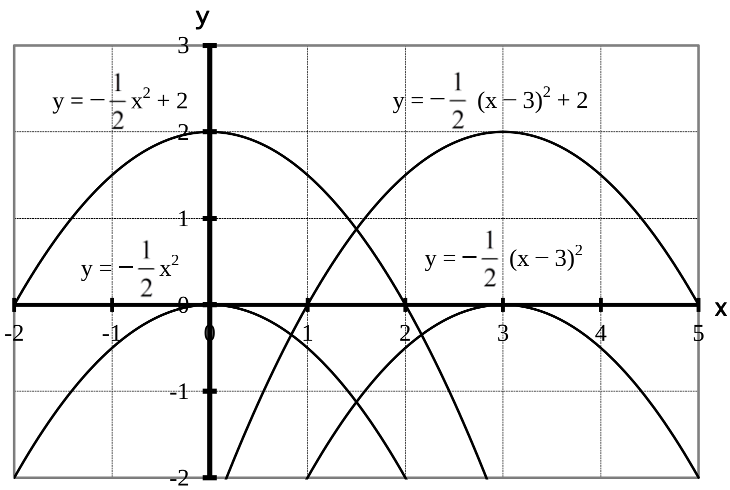
Multiplikation mit **negativen** a bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach unten**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 2

4.2.2. Verschiebung von Parabeln

Beispiele: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 3

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^2 + 2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
-2	-2	$-2 + 2$		
-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
0	0	$0 + 2$		
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$	-2	$-2 + 2$
2	-2	$-2 + 2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
3			0	$0 + 2$
4			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
5			-2	$-2 + 2$



Verschiebung in y-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** um $+y_0$ in **y-Richtung**, indem man y durch $\mathbf{y - y_0}$ ersetzt.

Das **Koordinatensystem** wird um $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +2 **nach oben**, indem man y durch $\mathbf{y - 2}$ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Verschiebung in x-Richtung
Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ um $+x_0$ **in x-Richtung**, indem man x durch $\mathbf{x - x_0}$ ersetzt:
Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.
Aus $y = f(x)$ wird $y = f(x - x_0)$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +3 **nach rechts**, indem man x durch $\mathbf{x - 3}$ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 5

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Verschiebung in x- und y-Richtung
Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ **um** $\mathbf{+x_0}$ **in x-Richtung und um** $\mathbf{+ y_0}$ **in y-Richtung**, indem man x durch $\mathbf{x - x_0}$ und y durch $\mathbf{y - y_0}$ ersetzt:
Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.
Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x - x_0)$. $\Leftrightarrow$ $y = f(x - x_0) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um + 2 nach oben und +3 nach rechts**, indem man y durch $\mathbf{y - 2}$ und x durch $\mathbf{x - 3}$ ersetzt:

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

Scheitelpunktform der Parabelgleichung
Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)^2$ bzw. $\mathbf{y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0}$ heißt **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung. $S(x_0|y_0)$ ist der **Scheitelpunkt** der Parabel. Der Koeffizient a heißt auch **Steigungsfaktor**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 6 - 8

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 - 2x + 5 \qquad | \pm 1 \text{ (\textbf{Quadratische Ergänzung})}$$

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}\ \underbrace{- 1 + 5} \qquad | \text{ 2. binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = (x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt ist also S(1|4)

Allgemein: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 + px + q \qquad | \pm \left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad \textbf{(quadratische Ergänzung)}$$

$$y = \underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad | \text{ 1. binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \textbf{(Scheitelpunktform)}$$

Der Scheitelpunkt ist also $S\left(-\frac{p}{2} \;\middle|\; -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$.

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 a) - g)

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = 12x^2 + 24x + 9 \qquad | \text{ 12 ausklammern}$$

$$y = 12[x^2 + 2x + \frac{3}{4}] \qquad | \pm 1 \text{ (}\textbf{Quadratische Ergänzung}\text{)}$$

$$y = 12[\underbrace{x^2 + 2x + 1}\underbrace{- 1 + \frac{3}{4}}] \qquad | \text{ 1. binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = 12[(x + 1)^2 - \frac{1}{4}] \qquad | \text{ Eckige Klammer auflösen}$$

$$y = 12(x + 1)^2 - 3$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(-1|-3)$

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 h) - r)

4.2.5. Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel

Beispiel:
Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 - 6x + 7$

Lösung: y = 0 setzen und nach x auflösen:

$$0 = x^2 - 6x + 7 \qquad | \pm 9 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

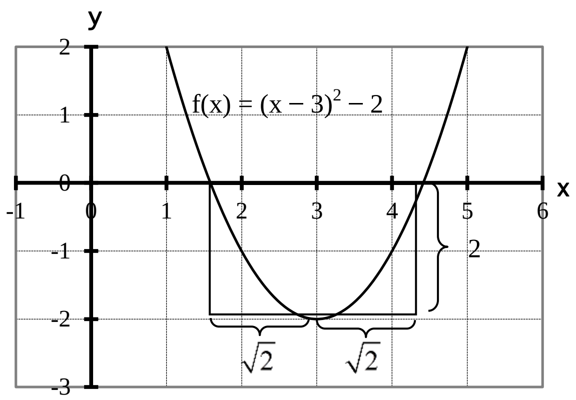
$$0 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}\underbrace{- 9 + 7} \qquad | \text{ 2. binomische Formel}$$

$$0 = (x - 3)^2 - 2 \qquad | + 2$$

$$2 = (x - 3)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\pm\sqrt{2} = x_{1/2} - 3 \qquad | + 3$$

$$3 \pm \sqrt{2} = x_{1/2}$$



Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 10

Allgemein: Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 + px + q$
Lösung: y = 0 setzen und nach x auflösen

$$0 = x^2 + px + q \qquad | \pm\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$0 = \underbrace{x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad | \text{ binomische Formel}$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad = x_{1/2} + \frac{p}{2} \qquad | -\frac{p}{2}$$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad = x_{1/2},$$

aber nur, wenn die **Diskriminante** $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist !!!

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11 a) - g)

Beispiel für die Bestimmung einer Nullstelle bei gestreckten Parabeln

Bestimme die Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Lösung: y = 0 setzen, Steigungsfaktor ausklammern und p-q-Formel anwenden:

$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ | Steigungsfaktor ausklammern

$0 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$ |·2

$0 = x^2 - 4x + 2$ | p-q-Formel

$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11 h) - r)

4.2.6. Nullstellenbestimmung durch Faktorisieren mit dem Satz von Vieta

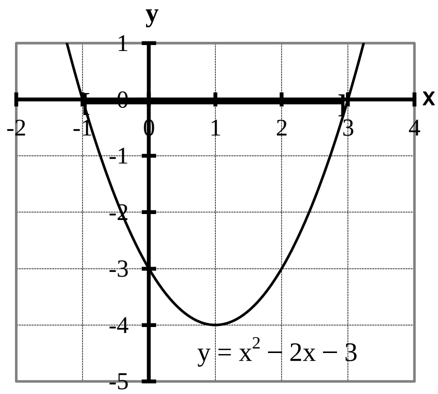
Einführung: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 12

Satz von Vieta:
Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + (u + v)x + u \cdot v = (x + u)\cdot(x + v)$ hat die Nullstellen $x_1 = -u$ und $x_2 = -v$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 13

4.2.7. Quadratische Ungleichungen

Beispiel
Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.



Lösung:
Lösen der entsprechenden **Gleichung** mit p-q-Formel oder Vieta:
$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm 2$

Die **Nullstellen** der Parabel bedeuten einen **Vorzeichenwechsel** und legen daher die Grenzen der Lösungsmenge fest.

Um zu entscheiden, ob die Lösungsmenge innerhalb oder außerhalb dieser Grenzen liegt, betrachtet man die **Öffnung** der Parabel.

In diesem Fall ist sie **nach oben** geöffnet, so dass die gesuchten **negativen** Werte **zwischen** den Nullstellen liegen

$\Rightarrow L = [-1; 3]$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 14

Übersicht zu quadratischen Funktionen

Produktform		Normalform		Scheitelpunktform
$f(x) = a(x + v)(x + v)$	Satz von Vieta ← / → Ausmultiplizieren	$f(x) = ax^2 + bx + c$	quadrat. Ergänzung → / ← Ausmultiplizieren	$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$
↓		↓		↓
Nullstellen $x_1 = -u$ $x_2 = -v$		Dehnung/Öffnung a Achsenschnittpunkte $P(0\|c)$ und $P(x_{1/2}\|0)$ mit p-q-Formel		Dehnung/Öffnung a Scheitelpunkt $S(x_0\|y_0)$
		↓ Schaubild		

4.2.8. Ortskurven

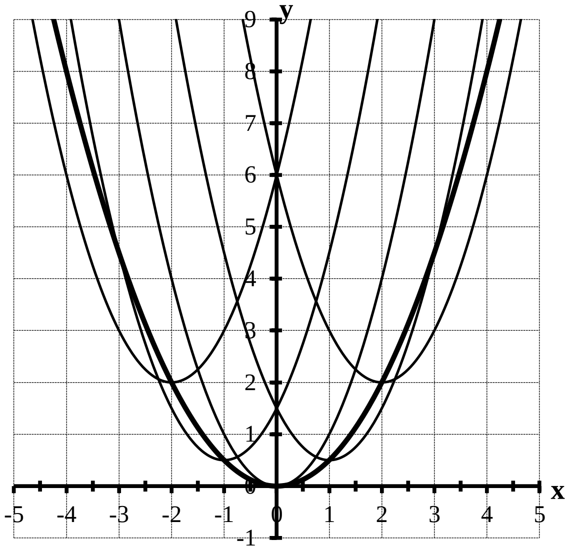
Beispiel

Gegeben sei eine Schar von Parabeln durch die Gleichung: $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Skizziere die Schaubilder von f_t für $t \in \{0; \pm1; \pm2\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem
b) Bestimme die Koordinaten des Scheitels in Abhängigkeit vom Parameter t.
c) Wie lautet die Funktionsgleichung der **Ortskurve**, auf dem die Scheitel aller Parabeln für beliebige $t \in \mathbb{R}$ liegen?
d) Bestimme t so, dass das Schaubild von f_t durch den Punkt $P(0|8)$ verläuft.

Lösung:

a) Skizze:



b) $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$

$= (x - t)^2 + \frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow S(t|\frac{1}{2}t^2)$ für $t \in \mathbb{R}$.

c) Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $x = t$ und $y = \frac{1}{2}t^2$. Durch **Einsetzen** von $x = t$ kann man t eliminieren und erhält die **Ortskurve** $y = \frac{1}{2}x^2$.

d) $f_t(0) = 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t^2 = 8 \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 15

4.2.9. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Beispiel:
Bestimme die Schnittpunkte von $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = 3x^2 - 4x - 6$
Lösung:

$f(x) = g(x)$		|**Gleichsetzen**
$-x^2 + 2 = 3x^2 - 4x - 6$		| $+ x^2 - 2$
$0 = 4x^2 - 4x - 8$		| Öffnungsfaktor ausklammern
$0 = 4(x^2 - x - 2)$ $0 = 4(x - 2)(x + 1)$		|**Nullstellenbestimmung** mit p-q-Formel oder Vieta
$\Rightarrow x_1 = -1$ mit $f(-1) = g(-1) = 1$ und $x_2 = 2$ mit $f(2) = g(2) = -2$		|**Einsetzen** der Schnittstellen x_1 und x_2

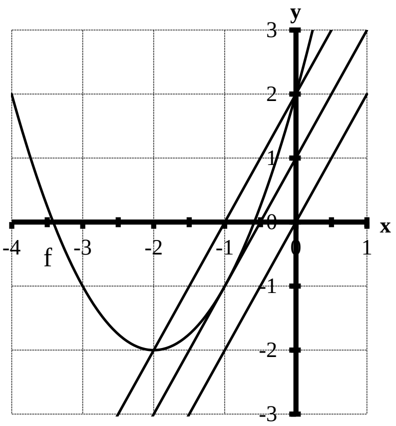
$\Rightarrow$ Schnittpunkte $S_1(2|-2)$ und $S_2(-1|1)$

Merke: Die Bestimmung der Schnittpunkte zweier beliebiger Schaubilder f und g lässt sich durch **Gleichsetzen** der Funktionsgleichungen $f(x) = g(x)$ auf eine **Nullstellenberechnung** zurückführen: $0 = g(x) - f(x)$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 16

Beispiel für gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen
Welche Bedingung muss für t gelten, damit die Gerade
$g_t(x) = 2x + t$ die Parabel $f(x) = x^2 + 4x + 2$

a) schneidet
b) berührt
c) passiert?



Lösung:
Gleichsetzen $f(x) = g_t(x)$ ergibt die Lösungen
$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{t-1}$, falls $t \geq 1$, also

a)	2 Schnittpunkte (**Sekante**)	bei $t > 1$
b)	1 Berührungspunkt (**Tangente**)	bei $t = 1$
c)	keine Berührung	bei $t < 1$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 17

4.2.10. Bestimmung von Funktionsgleichungen

Beispiel für drei gegebene Punkte

Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(-1|-3)$, $P_2(-2|-24)$ und $P_3(2|24)$ verläuft.
Lösung:
Durch Einsetzen der drei Punkte in die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ erhält man drei lineare Gleichungen für die drei zu bestimmenden Koeffizienten a, b und c. Das LGS wird mit dem **Diagonalverfahren** gelöst (siehe 1.4.4.):

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \cdot(-4) \quad + \quad \cdot(-4) \quad + \\
P_2 & 4a & - & 2b & + & c & = & -24 & \\
P_3 & 4a & + & 2b & + & c & = & 24 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \\
P_2 & & & 2b & - & 3c & = & -12 & \cdot(-3) \quad + \\
P_3 & & & 6b & - & 3c & = & 36 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \\
P_2 & & & 2b & - & 3c & = & -12 & + \quad + \\
P_3 & & & & & 6c & = & 72 & :2 \quad :(-6)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & - & b & & & = & -15 & \\
P_2 & & & 2b & & & = & 24 & :2 \quad + \\
P_3 & & & & & c & = & 12 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l}
P_1 & a & & & & & = & -3 & \\
P_2 & & & b & & & = & 12 & \\
P_3 & & & & & c & = & 12 &
\end{array}$$

Lösung: $f(x) = -3x^2 + 12x + 12$. **Probe**: durch **Einsetzen** der Punkte

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 18

Beispiel für zwei gegebene Punkte, von denen einer der Scheitelpunkt ist
Bestimme die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt S(4|3), die außerdem durch P(2|5) verläuft.
Lösung:
Die Koordinaten des Scheitelpunktes S(4|3) setzt man direkt in die Scheitelpunktform ein $f(x) = a(x-4)^2 + 3$. Den Steigungsfaktor a bestimmt man anschließend durch Einsetzen des zweiten Punktes P(2|5):

$$\begin{aligned}
f(2) &= 5 \\
a(2-4)^2 + 3 &= 5 \\
a \cdot 4 + 3 &= 5 \qquad |-3;\ :4 \\
a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist also $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 19 - 22