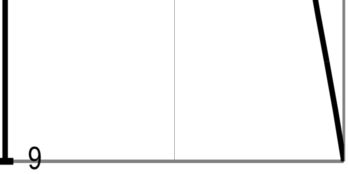


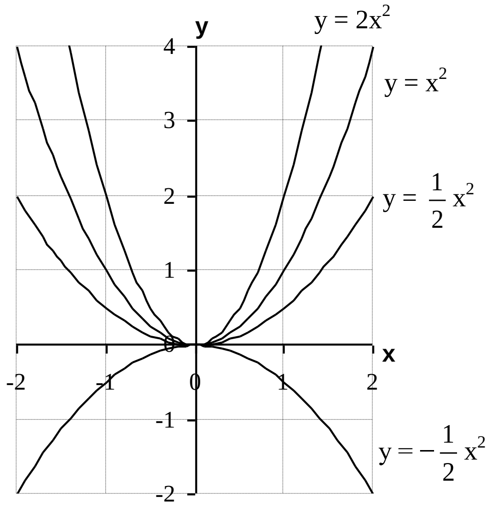
4.2. Quadratische Funktionen

arabelgleichung
g f(x) = $ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b,c \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische Funktion** oder **ades**. Ihr Schaubild ist eine **Parabel**. Die Funktionsgleichung in der Darstellung **lform** der Parabelgleichung.

4.2.1 Streckung und Stauchung von Parabeln

Beispiele: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 1

x	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2$
−2	2	4	8	−2
−1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
2	2	4	8	−2



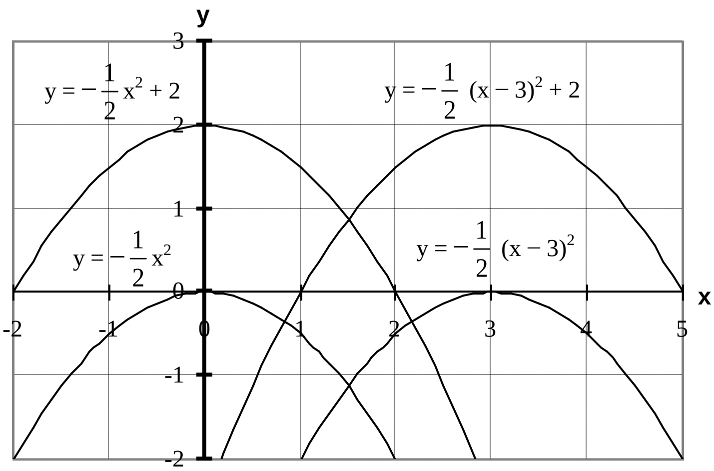
Stauchung und Streckung von Schaubildern
Multiplikation mit **positiven** $\begin{Bmatrix} a > 1 \\ a < 1 \end{Bmatrix}$ bewirkt $\begin{Bmatrix} \text{Streckung} \\ \text{Stauchung} \end{Bmatrix}$ in y-Richtung der **nach oben** geöffneten Parabel.
Multiplikation mit **negativen** a bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach unten**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 2

4.2.2 Verschiebung von Parabeln

Beispiele: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 3

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^2 + 2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
−2	−2	−2 + 2		
−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
0	0	0 + 2		
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$	−2	−2 + 2
2	−2	−2 + 2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
3			0	0 + 2
4			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
5			−2	−2 + 2



Verschiebung in y-Richtung
Man verschiebt das **Schaubild** um $+y_0$ in **y-Richtung**, indem man y durch $\mathbf{y - y_0}$ ersetzt.
(In Wirklichkeit wird das **Koordinatensystem** um $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben!)
Aus y = f(x) wird $y - y_0 = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +2 **nach oben**, indem man y durch **y − 2** ersetzt:

(In Wirklichkeit wird das **Koordinatensystem** um −2 **nach unten** verschoben!)

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 4

Verschiebung in x-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ um $+x_0$ **in x-Richtung**, indem man x durch $\mathbf{x - x_0}$ ersetzt:
(In Wirklichkeit wird das **Koordinatensystem** um $-x_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben!)
Aus $y = f(x)$ wird $y = f(x - x_0)$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +3 **nach rechts**, indem man x durch **x − 3** ersetzt:

(In Wirklichkeit wird das **Koordinatensystem** um −3 **nach links** verschoben!)

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 5

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Verschiebung in x- und y-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ **um** $\mathbf{+x_0}$ **in x-Richtung und um** $\mathbf{+ y_0}$ **in y-Richtung**, indem man x durch $\mathbf{x - x_0}$ und y durch $\mathbf{y - y_0}$ ersetzt:
(In Wirklichkeit wird das **Koordinatensystem** um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben!)
Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x - x_0)$. $\Leftrightarrow y = f(x - x_0) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um + 2 nach oben und +3 nach rechts**, indem man y durch **y − 2** und x durch **x − 3** ersetzt:
(In Wirklichkeit wird das **Koordinatensystem** um −2 **nach unten** und um −3 **nach links** verschoben!)

Aus $y = -\frac{1}{2}x^2$ wird $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a\cdot(x - x_0)^2$ bzw. $\mathbf{y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0}$ heißt **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung. $S(x_0|y_0)$ ist der **Scheitelpunkt** der Parabel. Der Koeffizient a heißt auch **Steigungsfaktor**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 6 - 8

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 - 2x + 5 \qquad | \pm 1 \text{ (Quadratische Ergänzung)}$$

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{}\ \underbrace{- 1 + 5}_{} \qquad | \text{ 2. binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = (x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt ist also S(1|4)

Allgemein: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 + px + q \qquad \Big|\ \pm \left(\frac{p}{2}\right)^2 \quad \textbf{(quadratische Ergänzung)}$$

$$y = \underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \Big|\ \text{1. binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \textbf{(Scheitelpunktform)}$$

Der Scheitelpunkt ist also $S\left(-\frac{p}{2} \,\Big|\, -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$.

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 a) - g)

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = 12x^2 + 24x + 9 \qquad |\ \text{12 ausklammern}$$

$$y = 12\left[x^2 + 2x + \frac{3}{4}\right] \qquad |\ \pm 1\ (\textbf{Quadratische Ergänzung})$$

$$y = 12\left[\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{}\ \underbrace{-\ 1 + \frac{3}{4}}_{}\right] \qquad |\ \text{1. binomische Formel und zusammenfassen}$$

$$y = 12\left[(x+1)^2 - \frac{1}{4}\right] \qquad |\ \text{Eckige Klammer auflösen}$$

$$y = 12(x+1)^2 - 3$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(-1|-3)$

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 h) - r)

4.2.5. Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel

Beispiel:
Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 - 6x + 7$

Lösung: y = 0 setzen und nach x auflösen:

$$0 = x^2 - 6x + 7 \qquad |\ \pm 9 \text{ (quadrat. Ergänzung)}$$

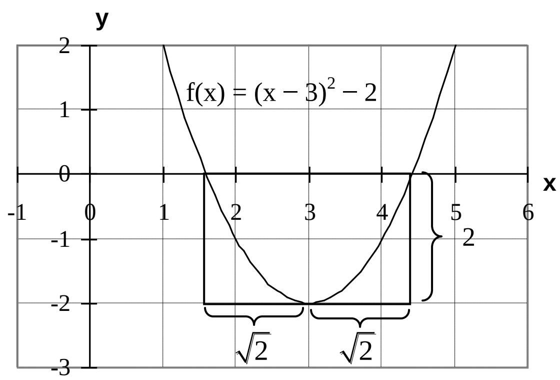
$$0 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{}\ \underbrace{-\ 9 + 7}_{} \qquad |\ \text{2. binomische Formel}$$

$$0 = (x-3)^2 - 2 \qquad |\ +2$$

$$2 = (x-3)^2 \qquad |\ \sqrt{\ }$$

$$\pm\sqrt{2} = x_{1/2} - 3 \qquad |+3$$

$$3 \pm \sqrt{2} = x_{1/2}$$



Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 10

Allgemein: Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 + px + q$
Lösung: y = 0 setzen und nach x auflösen

$$0 = x^2 + px + q \qquad \Big|\ \pm\left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}$$

$$0 = \underbrace{x^2 + 2\cdot\left(\frac{p}{2}\right)\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{} - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad |\ \text{binomische Formel}$$

$$0 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \Big|+\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad = x_{1/2} + \frac{p}{2} \qquad | - \frac{p}{2}$$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad = x_{1/2},$$

aber nur, wenn die **Diskriminante** $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist !!!

*Übungen**:** Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11 a) - g)*

Beispiel für die Bestimmung einer Nullstelle bei gestreckten Parabeln

Bestimme die Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Lösung: y = 0 setzen, Steigungsfaktor ausklammern und p-q-Formel anwenden:

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \qquad | \text{ Steigungsfaktor ausklammern}$$

$$0 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \qquad |\cdot 2$$

$$0 = x^2 - 4x + 2 \qquad | \text{ p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

*Übungen**:** Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11 h) - r)*

4.2.6. Nullstellenbestimmung durch Faktorisierung mit dem Satz von Vieta

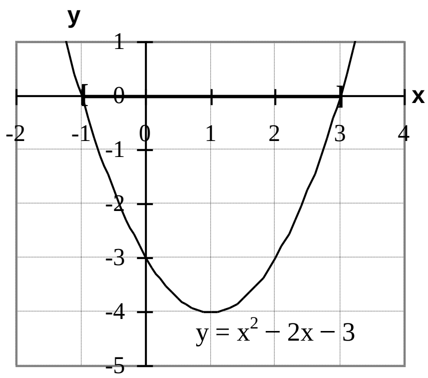
Einführung: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 12

Satz von Vieta:
Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + (u + v)x + u\cdot v = (x + u)\cdot(x + v)$ hat die Nullstellen $x_1 = -u$ und $x_2 = -v$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 13

4.2.7. Quadratische Ungleichungen

Beispiel
Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \geq 0$.
Lösung:
Lösen der entsprechenden **Gleichung** mit p-q-Formel oder Vieta: $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm 2$
Die **Nullstellen** der Parabel bedeuten einen **Vorzeichenwechsel** und legen daher die Grenzen der Lösungsmenge fest.
Um zu entscheiden, ob die Lösungsmenge innerhalb oder außerhalb dieser Grenzen liegt, betrachtet man die **Öffnung** der Parabel.
In diesem Fall ist sie **nach oben** geöffnet, so dass die gesuchten **negativen** Werte **zwischen** den Nullstellen liegen
$\Rightarrow L = [-1; 3]$



Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 14

Übersicht zu quadratischen Funktionen

Produktform	Satz von Vieta ← / → Ausmultiplizieren	Normalform	quadrat. Ergänzung → / ← Ausmultiplizieren	Scheitelpunktform
$f(x) = a(x + v)(x + v)$		$f(x) = ax^2 + bx + c$		$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$
↓		↓		↓
Nullstellen $x_1 = -u$ $x_2 = -v$		Dehnung/Öffnung a Achsenschnittpunkte $P(0\|c)$ und $P(x_{1/2}\|0)$ mit p-q-Formel		Dehnung/Öffnung a Scheitelpunkt $S(x_0\|y_0)$

→ Schaubild ←

4.2.8. Ortskurven

Beispiel

Gegeben sei eine Schar von Parabeln durch die Gleichung: $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Skizziere die Schaubilder von f_t für $t \in \{0; \pm1; \pm2\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem

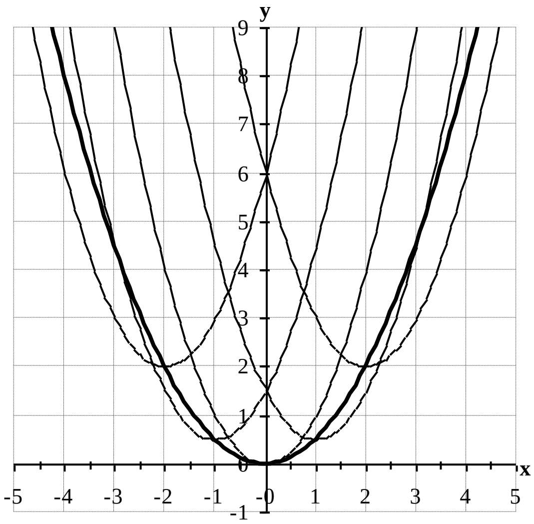
b) Bestimme die Koordinaten des Scheitels in Abhängigkeit vom Parameter t.

c) Wie lautet die Funktionsgleichung der **Ortskurve**, auf dem die Scheitel aller Parabeln für beliebige $t \in \mathbb{R}$ liegen?

d) Bestimme t so, daß das Schaubild von f_t durch den Punkt $P(0|8)$ verläuft.

Lösung:

a) Skizze:



b) $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$

$= (x - t)^2 + \frac{1}{2}t^2$

$\Rightarrow S(t|\frac{1}{2}t^2)$ für $t \in \mathbb{R}$.

c) Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $x = t$ und $y = \frac{1}{2}t^2$.

Durch **Einsetzen** von $x = t$ kann man t eliminieren und erhält die **Ortskurve** $y = \frac{1}{2}x^2$.

d) $f_t(0) = 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t^2 = 8 \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 15

4.2.9. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Beispiel:

Bestimme die Schnittpunkte von $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = 3x^2 - 4x - 6$

Lösung:

$f(x)$	$=$	$g(x)$	|**Gleichsetzen**
$-x^2 + 2$	$=$	$3x^2 - 4x - 6$	| $+ x^2 - 2$
0	$=$	$4x^2 - 4x - 8$	| Öffnungsfaktor ausklammern
0	$=$	$4(x^2 - x - 2)$	|**Nullstellenbestimmung** mit p-q-Formel oder Vieta
0	$=$	$4(x - 2)(x + 1)$	
$\Rightarrow x_1$	$=$	-1 mit $f(-1) = g(-1) = 1$ und	|**Einsetzen** der Schnittstellen x_1 und x_2
x_2	$=$	2 mit $f(2) = g(2) = -2$	

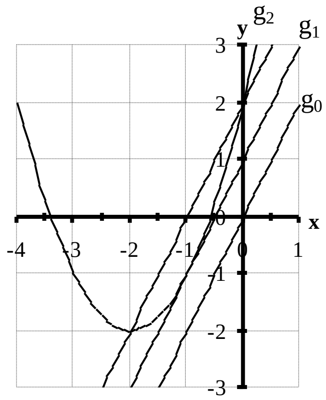
$\Rightarrow$ Schnittpunkte $S_1(2|-2)$ und $S_2(-1|1)$

Merke: Die Bestimmung der Schnittpunkte zweier beliebiger Schaubilder f und g lässt sich durch **Gleichsetzen** der Funktionsgleichungen $f(x) = g(x)$ auf eine **Nullstellenberechnung** zurückführen: $0 = g(x) - f(x)$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 16

Beispiel für gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen
Welche Bedingung muss für t gelten, damit die Gerade
$g_t(x) = 2x + t$ die Parabel $f(x) = x^2 + 4x + 2$

a) schneidet
b) berührt
c) passiert?



Lösung:
Gleichsetzen $f(x) = g_t(x)$ ergibt die Lösungen
$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{t-1}$, falls $t \geq 1$, also

a)	2 Schnittpunkte (**Sekante**)	bei $t > 1$
b)	1 Berührungspunkt (**Tangente**)	bei $t = 1$
c)	keine Berührung	bei $t < 1$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 17

4.2.10. Bestimmung von Funktionsgleichungen

Beispiel für drei gegebene Punkte
Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(-1|-3)$, $P_2(-2|-24)$ und $P_3(2|24)$ verläuft.
Lösung:
Durch Einsetzen der drei Punkte in die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ erhält man drei lineare Gleichungen für die drei zu bestimmenden Koeffizienten a, b und c. Das LGS wird mit dem **Diagonalverfahren** gelöst (siehe 1.4.4.):

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l} P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \cdot(-4)\ + \quad \cdot(-4)\ + \\ P_2 & 4a & - & 2b & + & c & = & -24 & \\ P_3 & 4a & + & 2b & + & c & = & 24 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l} P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \\ P_2 & & & 2b & - & 3c & = & -12 & \cdot(-3)\ + \\ P_3 & & & 6b & - & 3c & = & 36 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l} P_1 & a & - & b & + & c & = & -3 & \\ P_2 & & & 2b & - & 3c & = & -12 & +\quad + \\ P_3 & & & & & 6c & = & 72 & :2 \quad :(-6) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|l} P_1 & a & - & b & & & = & -15 & \\ P_2 & & & 2b & & & = & 24 & :2\ + \\ P_3 & & & & & c & = & 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|rcrcrcr|} P_1 & a & & & & & = & -3 \\ P_2 & & & b & & & = & 12 \\ P_3 & & & & & c & = & 12 \end{array}$$

Lösung: $f(x) = -3x^2 + 12x + 12$. **Probe**: durch **Einsetzen** der Punkte

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 18

Beispiel für zwei gegebene Punkte, von denen einer der Scheitelpunkt ist
Bestimme die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt S(4|3), die außerdem durch P(2|5) verläuft.
Lösung:
Die Koordinaten des Scheitelpunktes S(4|3) setzt man direkt in die Scheitelpunktform ein $f(x) = a(x-4)^2 + 3$.
Den Steigungsfaktor a bestimmt man anschließend durch Einsetzen des zweiten Punktes P(2|5):

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ a(2-4)^2 + 3 &= 5 \\ a \cdot 4 + 3 &= 5 \quad |-3;\ :4 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist also $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 19 - 22