

4.2. Quadratische Funktionen

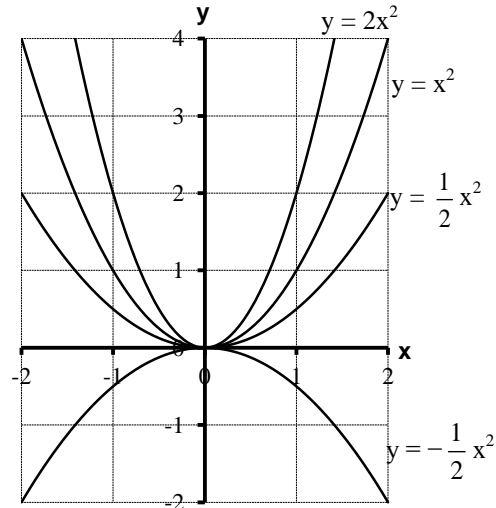
Definition: Normalform der Parabelgleichung

Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ und $b, c \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische Funktion** oder **ganzzahlige Funktion 2. Grades in Normalform**. Ihr Schaubild ist eine **Parabel**.

4.2.1. Streckung und Stauchung von Parabeln

Beispiele: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 1

x	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2$
-2	2	4	8	-2
-1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$
2	2	4	8	-2



Stauchung und Streckung von Schaubildern

Multiplikation mit **positiven** $\begin{cases} a > 1 \\ a < 1 \end{cases}$ bewirkt $\begin{cases} \text{Streckung} \\ \text{Stauchung} \end{cases}$ in y-Richtung der **nach oben** geöffneten Parabel.

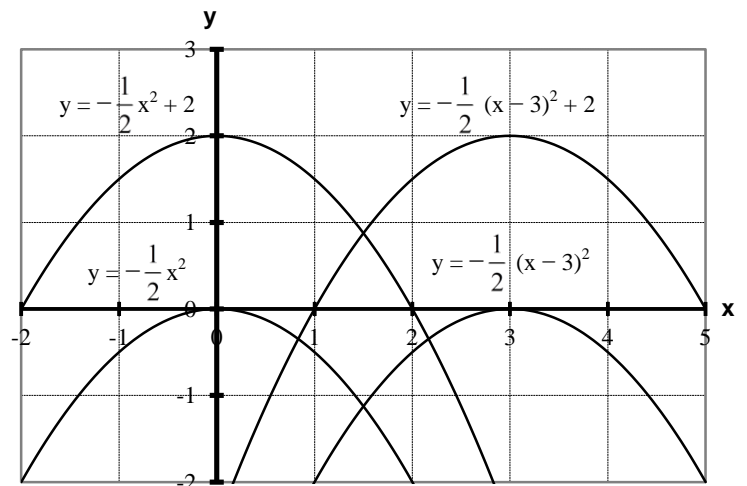
Multiplikation mit **negativen** a bewirkt eine Öffnung der Parabel **nach unten**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 2

4.2.2. Verschiebung von Parabeln

Beispiele: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 3

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^2 + 2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2$	$-\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$
-2	-2	-2+2		
-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
0	0	0+2		
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$	-2	-2+2
2	-2	-2+2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
3			0	0+2
4			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
5			-2	-2+2



Verschiebung in y-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** um $+y_0$ in **y-Richtung**, indem man y durch $y - y_0$ ersetzt.

Das **Koordinatensystem** wird um $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x) \Leftrightarrow y = f(x) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +2 **nach oben**, indem man y durch $y - 2$ ersetzt:

$$\text{Aus } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ wird } y - 2 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 2.$$

Verschiebung in x-Richtung

Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ um $+x_0$ **in x-Richtung**, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt:

Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y = f(x - x_0)$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ um +3 **nach rechts**, indem man x durch $x - 3$ ersetzt:

$$\text{Aus } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ wird } y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2.$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 5

4.2.3. Die Scheitelpunktform der Parabelgleichung**Verschiebung in x- und y-Richtung**

Man verschiebt das **Schaubild** $y = f(x)$ **um $+x_0$ in x-Richtung und um $+y_0$ in y-Richtung**, indem man x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$ ersetzt:

Das **Koordinatensystem** wird um $-x_0$ bzw. $-y_0$ in die **Gegenrichtung** verschoben.

Aus $y = f(x)$ wird $y - y_0 = f(x - x_0)$. $\Leftrightarrow y = f(x - x_0) + y_0$.

Beispiel:

Man verschiebt die **Parabel** $y = -\frac{1}{2}x^2$ **um + 2 nach oben und +3 nach rechts**, indem man y durch $y - 2$ und x durch $x - 3$ ersetzt:

$$\text{Aus } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ wird } y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$$

Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Eine Funktionsgleichung der Gestalt $y - y_0 = a \cdot (x - x_0)^2$ bzw. $y = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$ heißt **Scheitelpunktform** der Parabelgleichung. $S(x_0|y_0)$ ist der **Scheitelpunkt** der Parabel. Der Koeffizient a heißt auch **Steigungsfaktor**.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 6 - 8

4.2.4. Scheitelpunktbestimmung durch quadratische Ergänzung

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 - 2x + 5$$

| ± 1 (**Quadratische Ergänzung**)

$$y = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 + 5$$

| 2. binomische Formel und zusammenfassen

$$y = (x - 1)^2 + 4$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(1|4)$

Allgemein: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = x^2 + px + q \quad \left| \pm \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}\right.$$

$$y = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \quad \left| \text{1. binomische Formel und zusammenfassen}\right.$$

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \quad \text{(Scheitelpunktform)}$$

Der Scheitelpunkt ist also $S\left(-\frac{p}{2} \mid -\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right)$.

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 a) - g)

Beispiel: Gesucht ist der Scheitelpunkt von

$$y = 12x^2 + 24x + 9 \quad \left| \text{12 ausklammern}\right.$$

$$y = 12\left[x^2 + 2x + \frac{3}{4}\right] \quad \left| \pm 1 \text{ (Quadratische Ergänzung)}\right.$$

$$y = 12\left[x^2 + 2x + 1 - 1 + \frac{3}{4}\right] \quad \left| \text{1. binomische Formel und zusammenfassen}\right.$$

$$y = 12\left[(x+1)^2 - \frac{1}{4}\right] \quad \left| \text{Eckige Klammer auflösen}\right.$$

$$y = 12(x+1)^2 - 3$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(-1 \mid -3)$

Übungen Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 9 h) - r)

4.2.5. Nullstellenbestimmung mit der p-q-Formel

Beispiel:

Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 - 6x + 7$

Lösung: $y = 0$ setzen und nach x auflösen:

$$0 = x^2 - 6x + 7 \quad \left| \pm 9 \text{ (quadrat. Ergänzung)}\right.$$

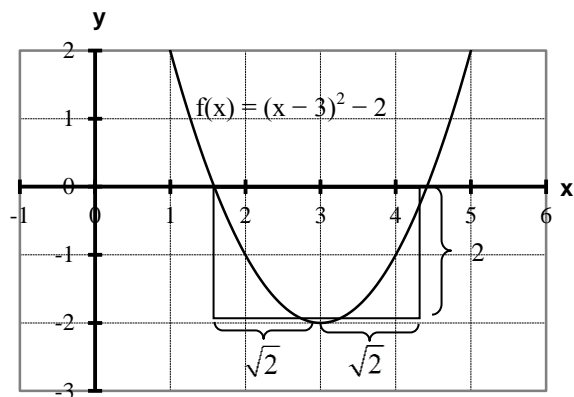
$$0 = x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 \quad \left| \text{2. binomische Formel}\right.$$

$$0 = (x-3)^2 - 2 \quad \left| +2\right.$$

$$2 = (x-3)^2 \quad \left| \sqrt{\quad}\right.$$

$$\pm\sqrt{2} = x_{1/2} - 3 \quad \left| +3\right.$$

$$3 \pm\sqrt{2} = x_{1/2}$$



Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 10

Allgemein: Bestimme die Nullstellen von $y = x^2 + px + q$

Lösung: $y = 0$ setzen und nach x auflösen

$$0 = x^2 + px + q \quad \left| \pm \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadratische Ergänzung)}\right.$$

$$0 = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right) \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \quad \left| \text{binomische Formel}\right.$$

$$0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \quad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right.$$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \quad | \sqrt{}$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = x_{1/2} + \frac{p}{2} \quad | - \frac{p}{2}$$

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = x_{1/2},$$

aber nur, wenn die **Diskriminante** $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist !!!

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11 a) - g)

Beispiel für die Bestimmung einer Nullstelle bei gestreckten Parabeln

Bestimme die Nullstellen von $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

Lösung: $y = 0$ setzen, Steigungsfaktor ausklammern und p-q-Formel anwenden:

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \quad | \text{Steigungsfaktor ausklammern}$$

$$0 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \quad | \cdot 2$$

$$0 = x^2 - 4x + 2 \quad | \text{p-q-Formel}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 11 h) - r)

4.2.6. Nullstellenbestimmung durch Faktorisieren mit dem Satz von Vieta

Einführung: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 12

Satz von Vieta:

Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + (u + v)x + u \cdot v = (x + u) \cdot (x + v)$ hat die Nullstellen $x_1 = -u$ und $x_2 = -v$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 13

4.2.7. Quadratische Ungleichungen

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

Lösung:

Lösen der entsprechenden **Gleichung** mit p-q-Formel oder Vieta:

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \pm 2$$

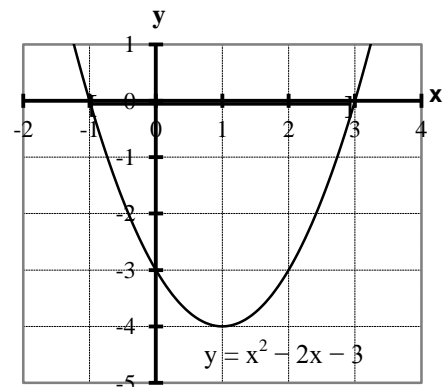
Die **Nullstellen** der Parabel bedeuten einen **Vorzeichenwechsel** und legen daher die Grenzen der Lösungsmenge fest.

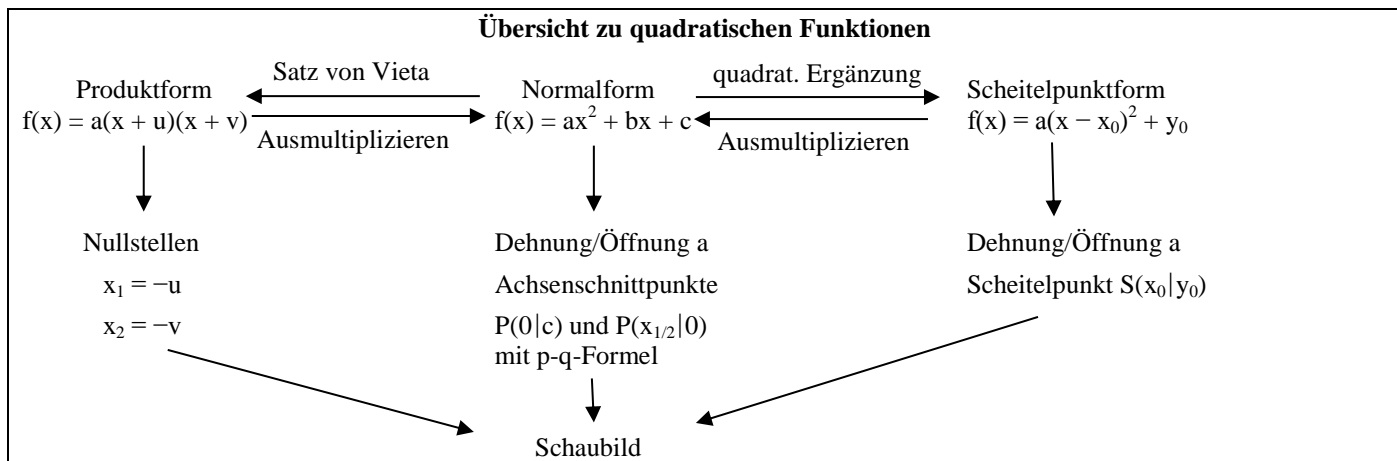
Um zu entscheiden, ob die Lösungsmenge innerhalb oder außerhalb dieser Grenzen liegt, betrachtet man die **Öffnung** der Parabel.

In diesem Fall ist sie **nach oben** geöffnet, so dass die gesuchten **negativen** Werte **zwischen** den Nullstellen liegen

$$\Rightarrow L = [-1; 3]$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 14





4.2.8. Ortskurven

Beispiel

Gegeben sei eine Schar von Parabeln durch die Gleichung: $f_t(x) = x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$.

- Skizziere die Schaubilder von f_t für $t \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem
- Bestimme die Koordinaten des Scheitels in Abhängigkeit vom Parameter t .
- Wie lautet die Funktionsgleichung der **Ortskurve**, auf dem die Scheitel aller Parabeln für beliebige $t \in \mathbb{R}$ liegen?
- Bestimme t so, dass das Schaubild von f_t durch den Punkt $P(0|8)$ verläuft.

Lösung:

a) Skizze:

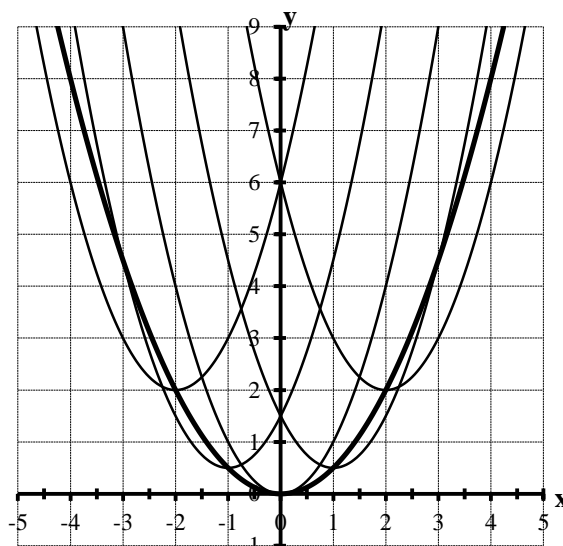
$$\begin{aligned}
 \text{b) } f_t(x) &= x^2 - 2tx + \frac{3}{2}t^2 \\
 &= (x - t)^2 + \frac{1}{2}t^2 \\
 &\Rightarrow S(t | \frac{1}{2}t^2) \text{ für } t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

c) Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $x = t$ und $y = \frac{1}{2}t^2$.

Durch **Einsetzen** von $x = t$ kann man t eliminieren und erhält die **Ortskurve** $y = \frac{1}{2}x^2$.

$$\text{d) } f_t(0) = 8 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t^2 = 8 \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 15



4.2.9. Bestimmung von gemeinsamen Punkten

Beispiel:

Bestimme die Schnittpunkte von $f(x) = -x^2 + 2$ und $g(x) = 3x^2 - 4x - 6$

Lösung:

$f(x) = g(x)$ $-x^2 + 2 = 3x^2 - 4x - 6$ $0 = 4x^2 - 4x - 8$ $0 = 4(x^2 - x - 2)$ $0 = 4(x - 2)(x + 1)$	 Gleichsetzen $ +x^2 - 2$ Öffnungsfaktor ausklammern Nullstellenbestimmung mit p-q-Formel oder Vieta
$\Rightarrow x_1 = -1$ mit $f(-1) = g(-1) = 1$ und $x_2 = 2$ mit $f(2) = g(2) = -2$	 Einsetzen der Schnittstellen x_1 und x_2
\Rightarrow Schnittpunkte $S_1(2 -2)$ und $S_2(-1 1)$	

Merke: Die Bestimmung der Schnittpunkte zweier beliebiger Schaubilder f und g lässt sich durch **Gleichsetzen** der Funktionsgleichungen $f(x) = g(x)$ auf eine **Nullstellenberechnung** zurückführen: $0 = g(x) - f(x)$.

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 16

Beispiel für gemeinsame Punkte bei Kurvenscharen

Welche Bedingung muss für t gelten, damit die Gerade

$$g_t(x) = 2x + t \text{ die Parabel } f(x) = x^2 + 4x + 2$$

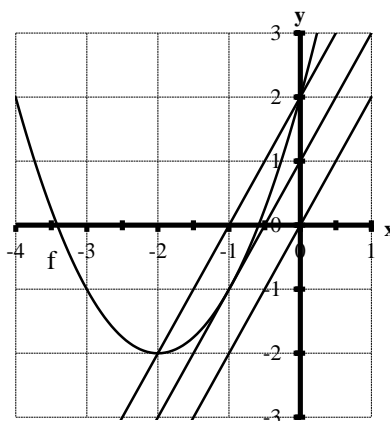
- a) schneidet
- b) berührt
- c) passiert?

Lösung:

Gleichsetzen $f(x) = g_t(x)$ ergibt die Lösungen

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{t-1}, \text{ falls } t \geq 1, \text{ also}$$

- a) 2 Schnittpunkte (**Sekante**) bei $t > 1$
- b) 1 Berührungspunkt (**Tangente**) bei $t = 1$
- c) keine Berührung bei $t < 1$.



Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 17

4.2.10. Bestimmung von Funktionsgleichungen

Beispiel für drei gegebene Punkte

Bestimme die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $P_1(-1|-3)$, $P_2(-2|-24)$ und $P_3(2|24)$ verläuft.

Lösung:

Durch Einsetzen der drei Punkte in die Normalform $y = ax^2 + bx + c$ erhält man drei lineare Gleichungen für die drei zu bestimmenden Koeffizienten a , b und c . Das LGS wird mit dem **Diagonalverfahren** gelöst (siehe 1.4.4.):

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{rrcr} a & - & b & + & c & = & -3 \\ 4a & - & 2b & + & c & = & -24 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 24 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ \cdot(-4) \end{array} \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{rrcr} a & - & b & + & c & = & -3 \\ & & 2b & - & 3c & = & -12 \\ & & 6b & - & 3c & = & 36 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot(-3) \end{array} \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{rrcr} a & - & b & + & c & = & -3 \\ & & 2b & - & 3c & = & -12 \\ & & & & 6c & = & 72 \end{array} \right| \begin{array}{l} :2 \\ :(-6) \end{array} \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{rrcr} a & - & b & & & = & -15 \\ & & 2b & & & = & 24 \\ & & & & c & = & 12 \end{array} \right| \begin{array}{l} :2 \\ :2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right. +$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{rrcr} a & & & & & = & -3 \\ & & b & & & = & 12 \\ & & & & c & = & 12 \end{array} \right|$$

Lösung: $f(x) = -3x^2 + 12x + 12$. **Probe:** durch **Einsetzen** der Punkte

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 18

Beispiel für zwei gegebene Punkte, von denen einer der Scheitelpunkt ist

Bestimme die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(4|3)$, die außerdem durch $P(2|5)$ verläuft.

Lösung:

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(4|3)$ setzt man direkt in die Scheitelpunktform ein $f(x) = a(x - 4)^2 + 3$. Den Steigungsfaktor a bestimmt man anschließend durch Einsetzen des zweiten Punktes $P(2|5)$:

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \\ a(2 - 4)^2 + 3 &= 5 \\ a \cdot 4 + 3 &= 5 & | -3; :4 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist also $f(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11$

Übungen: Aufgaben zu quadratischen Funktionen Nr. 19 - 22