

4.3. Wurzel- und Betragsfunktionen

4.3.1. Die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

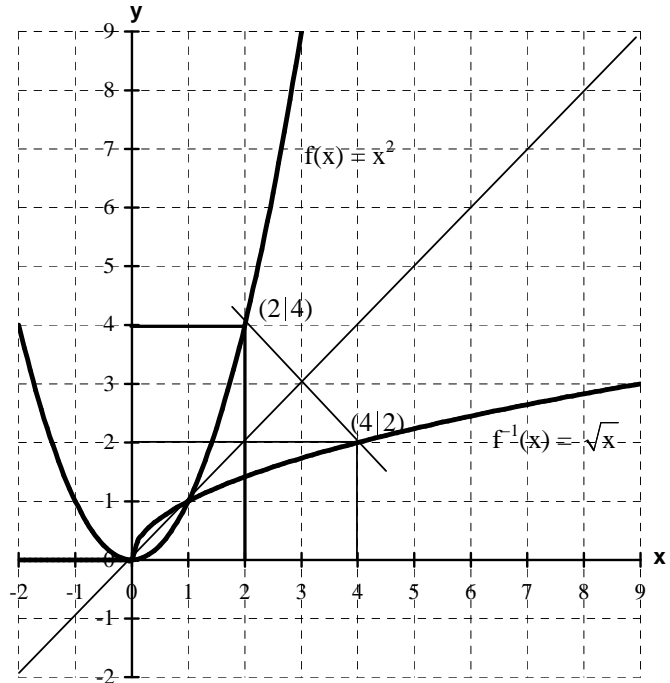
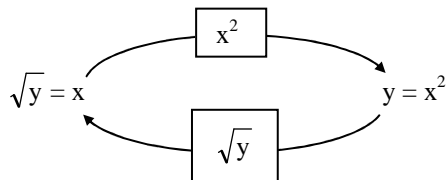
Definition: (siehe 1.4.1)

Für **positive** $a \in \mathbb{R}_+$ ist die **Wurzel** aus a definiert als die **positive** Zahl \sqrt{a} , deren Quadrat wieder a ergibt: $(\sqrt{a})^2 = a$ mit $a > 0$ und $\sqrt{a} \geq 0$.

Schaubilder

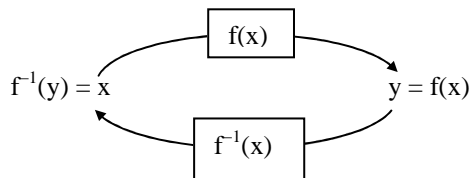
$x = \sqrt{y}$	$y = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
3	9

Das Wurzelziehen ist die **Umkehrung** des Quadrierens:



Definition:

Die Anwendung der Umkehrfunktion f^{-1} ist die Umkehrung der Anwendung von f :



Eindeutigkeit der Umkehrung:

Zu der Funktion $f: \begin{cases} x \rightarrow f(x) = y \\ D_f \rightarrow W_f \end{cases}$ gibt es nur dann eine Umkehrfunktion $f^{-1}: \begin{cases} y \rightarrow f^{-1}(y) = x \\ W_f \rightarrow D_f \end{cases}$, falls es zu

jedem $y \in W_f$ **genau ein** $x \in D_f$ gibt mit $y = f(x)$. Es gilt dann $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ für alle $x \in D_f$ und $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ für alle $y \in W_f$. Diese **Eindeutigkeit der Umkehrung** ist gewährleistet, wenn $f(x)$ auf D_f **entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend** ist. Der **Definitionsbereich** muss daher in vielen Fällen auf geeignete Bereiche **beschränkt** werden.

Merke:

Man erhält

- das **Schaubild** von f^{-1} aus dem Schaubild von f durch **Spiegelung** an der 1. Winkelhalbierenden und
- die **Funktionsgleichung** von f^{-1} aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$ durch **Auflösen** nach x (unter Beachtung der Wurzeldefinition!) und **Vertauschung** von x und y .

Beispiel zur Bestimmung der Umkehrfunktion zu einer Geraden

Bestimme die Funktionsgleichung und Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} zu $f(x) = 3x - 4$.

Lösung:

$$y = f(x) \quad | \text{Einsetzen}$$

$$y = 3x - 4 \quad | +4; :3$$

$$\frac{1}{3}y + \frac{4}{3} = x \quad | \text{Vertauschung von } x \text{ und } y$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} = y$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ mit } D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}.$$

Probe: vorwärts $f^{-1}(f(x)) = x$ und rückwärts $f(f^{-1}(x)) = x$.

Beispiel zur Bestimmung der Umkehrfunktion zu einer Parabel

Bestimme die Funktionsgleichung und Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} zu $f(x) = (x - 2)^2 - 3$

Lösung:

$$y = f(x) \quad | \text{Einsetzen}$$

$$y = (x - 2)^2 - 3 \quad | +3$$

$$y + 3 = (x - 2)^2 \quad | \sqrt{\quad} \text{ mit } y \geq -3 \text{ und } x \geq 2$$

$$\sqrt{y + 3} = x - 2 \quad | +2$$

$$\sqrt{y + 3} + 2 = x \quad | \text{Vertauschung von } x \text{ und } y$$

$$\sqrt{x + 3} + 2 = y \quad \text{mit } x \geq -3 \text{ und } y \geq 2$$

Damit ergibt sich $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3} + 2$ mit $D_{f^{-1}} = [-3; \infty[$ und $W_{f^{-1}} = [2; \infty[$.

Probe: vorwärts $f^{-1}(f(x)) = x$ und rückwärts $f(f^{-1}(x)) = x$.

Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 1

4.3.2. Verschiebung und Streckung der Wurzelfunktion

Verschiebung und Streckung der Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x}$ wird

- um x_0 in x-Richtung verschoben, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt,
- um y_0 in y-Richtung verschoben, indem man y durch $y - y_0$ ersetzt,
- um den Faktor a in y-Richtung gestreckt, indem man mit a multipliziert:

Die Gleichung der verschobenen und gestreckten Funktion ist dann $y - y_0 = a \cdot \sqrt{x - x_0}$

Beispiel zur Bestimmung der Lage einer Wurzelfunktion

Bestimme die Definitionsmenge und die Wertemenge von $f(x) = -\sqrt{x-1} + 3$. Beschreibe die Lage des Schaubildes durch Angabe des „Scheitelpunktes“ und der „Öffnung“.

Lösung: (siehe 1.3.1 und 1.3.2)

$$y = -\sqrt{x-1} + 3 \Leftrightarrow$$

$$y - 3 = -\sqrt{x-1}$$

bedeutet:

um $x_0 = 1$ in x-Richtung verschoben

um $y_0 = 3$ in y-Richtung verschoben

um $a = -1$ in y-Richtung gestreckt, d.h. an der x-Achse gespiegelt

\Rightarrow „Scheitelpunkt“ $S(1|3)$ und „Öffnung“ nach rechts unten

$\Rightarrow D = [1; \infty[$ und $W =]-\infty; 3]$

Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 2

4.3.3. Die Betragsfunktion

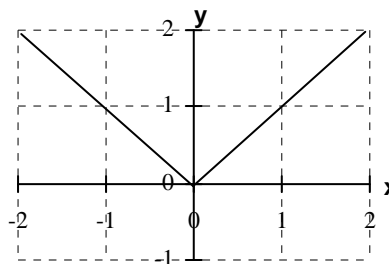
Definition:

Die **Betragsfunktion** ist definiert als

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Schaubild:

Symmetrie: Die Betragsfunktion ist **gerade**: $|-x| = |x|$



Verschiebung und Streckung der Betragsfunktion

Die Wurzelfunktion $y = |x|$ wird

- um x_0 in x-Richtung verschoben, indem man x durch $x - x_0$ ersetzt,
- um y_0 in y-Richtung verschoben, indem man y durch $y - y_0$ ersetzt,
- um den Faktor a in y-Richtung gestreckt, indem man mit a multipliziert:

Die Gleichung der verschobenen und gestreckten Funktion ist dann $y - y_0 = a \cdot |x - x_0|$

Beispiel zur Bestimmung der Lage einer Betragsfunktion

Bestimme die Definitionsmenge und die Wertemenge von $f(x) = -|x - 1| + 3$. Beschreibe die Lage des Schaubildes durch Angabe des „Scheitelpunktes“ und der „Öffnung“.

Lösung: (siehe 1.3.1 und 1.3.2)

$$y = -|x - 1| + 3 \Leftrightarrow$$

$$y - 3 = -|x - 1|$$

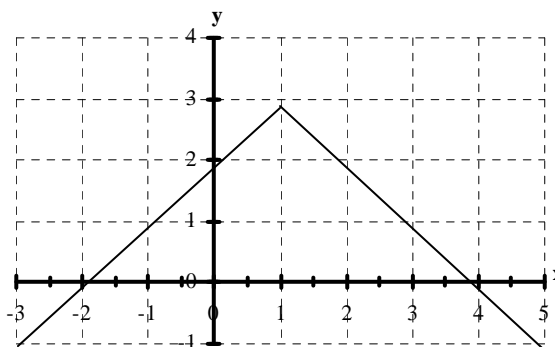
bedeutet:

- um $x_0 = 1$ in x-Richtung verschoben
- um $y_0 = 3$ in y-Richtung verschoben
- um $a = -1$ in y-Richtung gestreckt, d.h. an der x-Achse gespiegelt

⇒ „Scheitelpunkt“ $S(1|3)$ und

⇒ „Öffnung“ nach unten

⇒ $D = \mathbb{R}$ und $W =]-\infty; 3]$



Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 3

4.3.4. Betragsgleichungen

Beispiel

Bestimme die Nullstellen von $f(x) = |x + 2| - 3$.

Lösung:

Nullsetzen der Funktionsgleichung und Auflösen nach x mit Hilfe einer **Fallunterscheidung**:

$$0 = f(x)$$

$$0 = |x + 2| - 3$$

$$3 = |x + 2|$$

$$x \geq -2: \quad 3 = x + 2$$

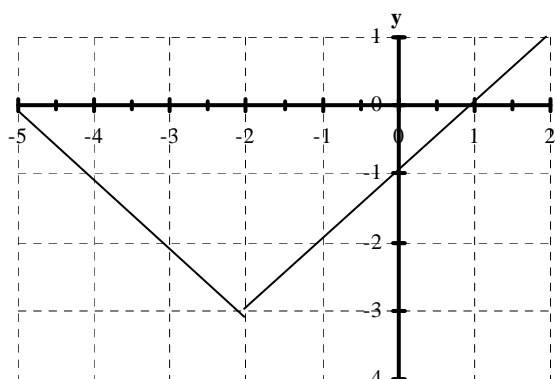
$$\underline{1 = x}$$

$$x < -2: \quad 3 = -x - 2$$

$$\underline{-5 = x}$$

Man erhält zwei Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$.

Schaubild: im Bereich $-6 \leq x \leq 2$ und $-4 \leq y \leq 1$ mit Fußpunkt $S(-2|-3)$.



Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 4

4.3.5. Betragsungleichungen

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $|x + 2| - 3 \leq 0$.

Lösung: mit Hilfe einer Fallunterscheidung:

$$x \geq -2: \quad x + 2 - 3 \leq 0$$

$$\underline{x \leq 1}$$

$$x \leq -2: \quad -x - 2 - 3 \leq 0$$

$$-x \leq 5$$

$$\underline{x \geq -5}$$

$$\Rightarrow L = [-5, 1].$$

Übungen: Aufgaben zu Wurzel- und Betragsfunktionen Nr. 5