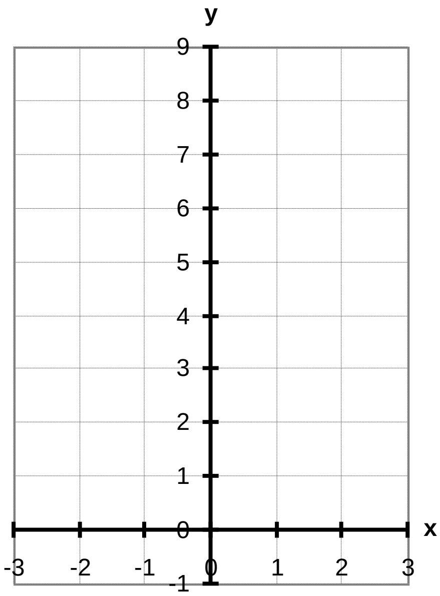
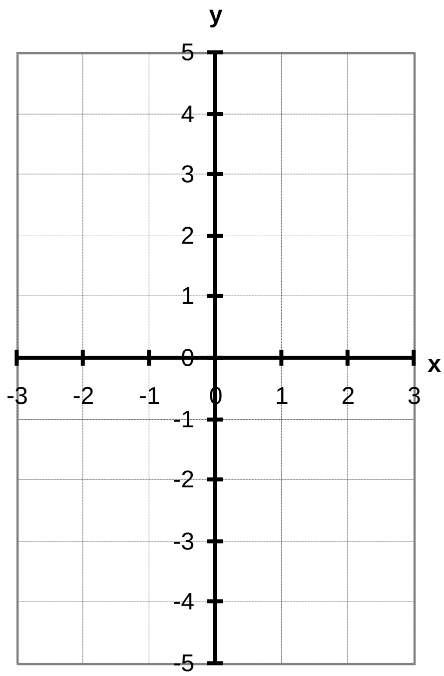
4.4. Aufgaben zu Potenzfunktionen

Definition: Eine Funktion der Form $f(x) = c \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0;1\}$ heißt **Potenzfunktion**.

Aufgabe 1: Potenzfunktionen mit positiven Exponenten (Parabeln). Ergänze:

x	x^1	x^2	x^3	x^4
-2				
-1				
$-\frac{1}{2}$				
0				
$\frac{1}{2}$				
1				
2				





Eigenschaften der Potenzfunktionen

Symmetrie:
Eine Funktion f heißt
- **gerade** bzw. achsensymmetrisch zur **y-Achse** x = 0, falls f(−x) = ____ und
- **ungerade** bzw. punktsymmetrisch zum **Ursprung** O(0|0), falls f(−x) = ____

für alle $x \in D$.

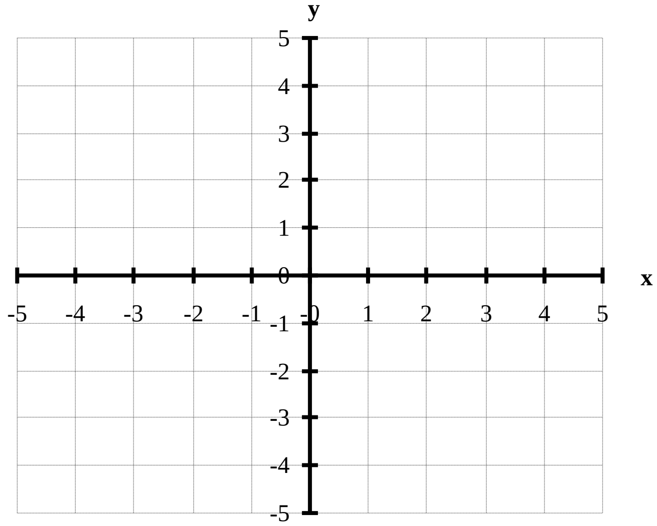
Beispiele

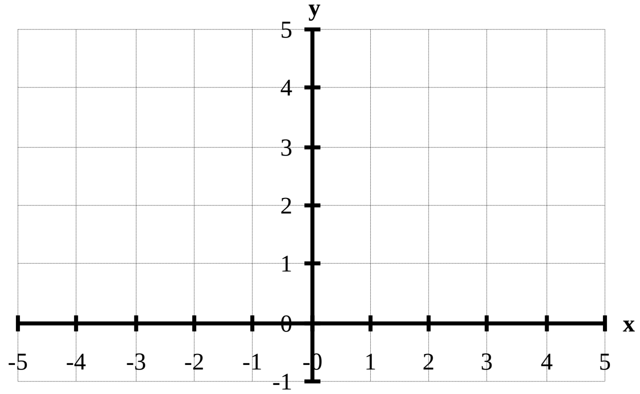
$f(x) = x^8$ ist **gerade**, da $f(-x) = (-x)^8$ = _____ = _____

$f(x) = x^7$ ist **ungerade**, da $f(-x) = (-x)^7$ = _____ = _____

Aufgabe 2: Potenzfunktionen mit negativen Exponenten (Hyperbeln). Ergänze:

x	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}
-10				
-2				
-1				
$-\frac{1}{2}$				
$-\frac{1}{10}$				
0				
$\frac{1}{10}$				
$\frac{1}{2}$				
1				
2				
10				





Asymptoten
Eine Asymptote ist eine **Näherungsgerade** im Schaubild einer Funktion f: Das Schaubild kommt ihr für betragsgroße x oder y beliebig nahe. **Senkrechte Asymptoten** nennt man auch **Polstellen**.

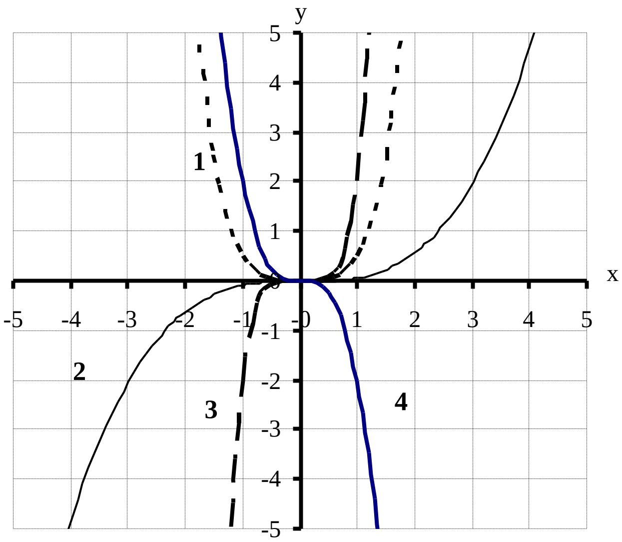
Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$
Eine Funktion f strebt für $x \to \pm\infty$ gegen den **Grenzwert** (lat. limes) a, wenn die Funktionswerte f(x) für genügend kleine bzw. große x beliebig nahe an die Zahl a _______________: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.
Das Schaubild von f besitzt dann für $x \to \pm\infty$ eine **waagrechte Asymptote** y = a.

Definitions- und Wertebereiche:

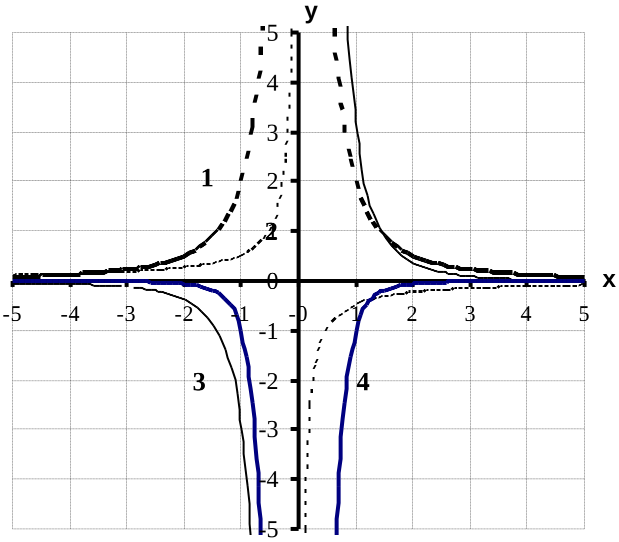
$y = x^z$	z gerade	z ungerade
$z > 0$	D = _____ W = _____	D = _____ W = _____
$z < 0$	D = _____ W = _____	D = _____ W = _____

Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Schaubildern

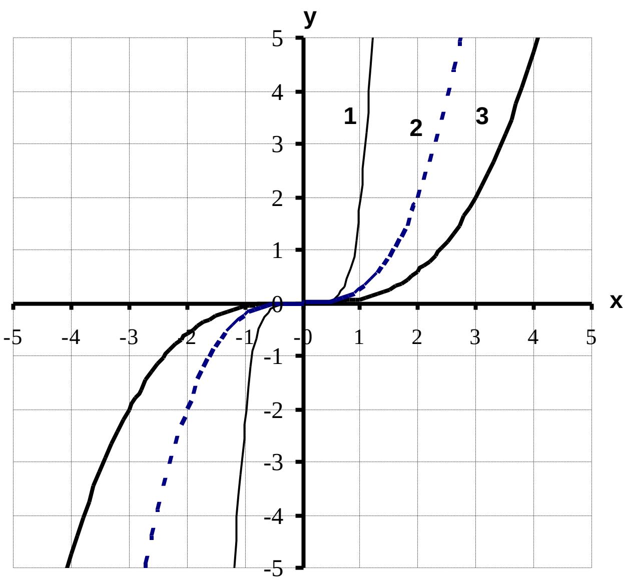
a) Ordne die Schaubilder 1 - 4 aus der nebenstehenden Abbildung den folgenden Funktionen zu und überprüfe deine Entscheidung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.
$y = 0{,}1 \cdot x^3$, $y = -2 \cdot x^3$, $y = 0{,}5 \cdot x^4$ und $y = 2 \cdot x^5$.



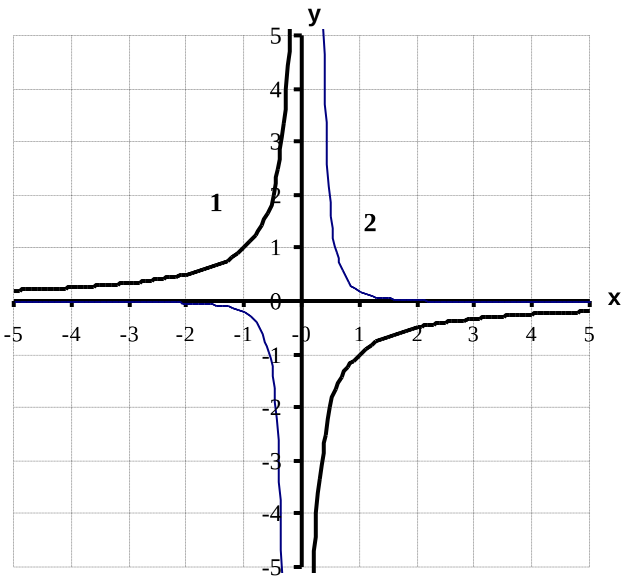
b) Ordne die Schaubilder 1 - 4 aus der untenstehenden Abbildung den folgenden Funktionen zu und überprüfe deine Entscheidung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.
$y = -0{,}5 \cdot x^{-1}$, $y = 2 \cdot x^{-2}$, $y = 3 \cdot x^{-3}$ und $y = -x^{-4}$.



c) Bestimme die Faktoren c_i für die Schaubilder der Funktionen $f_i(x) = c_i \cdot x^3$ mit $i \in \{1, 2; 3\}$ aus der untenstehenden Abbildung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.



d) Bestimme die Faktoren c_i für die Schaubilder der Funktionen $f_1(x) = c_1 \cdot x^{-1}$ und $f_2(x) = c_2 \cdot x^{-3}$ aus der untenstehenden Abbildung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.



Aufgabe 4: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Punkten

Bestimme die Gleichung der Potenzfunktion $f(x) = c \cdot x^n$, deren Schaubild durch die Punkte P und Q verläuft.

a) $P(1|0{,}25)$ und $Q(2|4)$

b) $P(2|-4)$ und $Q(3|-13{,}5)$

c) $P(0{,}5|2)$ und $Q(-0{,}25|8)$

d) $P(-1{,}5|8)$ und $Q(3|-1)$

e) $P\left(2 \,\middle|\, -\frac{32}{3}\right)$ und $Q(3|-81)$

f) $P\left(-3 \,\middle|\, -\frac{27}{5}\right)$ und $Q(5|25)$

Aufgabe 5: Symmetrie
Untersuche die folgenden Funktionen auf Punkt- und Achsensymmetrie und skizziere ihre Schaubilder:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x$ d) $f(x) = \frac{1}{2x}$ g) $f(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}$ j) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ e) $f(x) = \frac{1}{2x} + 1$ h) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ k) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1$ l) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$.

Aufgabe 6: Symmetrie
Gib die Gleichung einer Funktion an, die
a) sowohl gerade als auch ungerade   b) symmetrisch zur x-Achse ist

Aufgabe 7: Verschiebungen
Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von f um x_0 in x-Richtung und y_0 in y-Richtung verschiebt. Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte.
a) $f(x) = x^3$ um $x_0 = 2$ nach rechts und $y_0 = -4$ nach unten
c) $f(x) = x^4$ um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = 2$ nach oben
b) $f(x) = x^{-3}$ um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = 3$ nach oben
d) $f(x) = x^{-2}$ um $x_0 = -4$ nach links und $y_0 = -3$ nach unten

Aufgabe 8: Verschiebungen
Untersuche das Schaubild von f auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte. Gib die Gleichung der ursprünglichen Potenzfunktion an, und durch welche Verschiebung es aus dieser Potenzfunktion hervorgegangen ist.

a) $f(x) = x^2 + 4x$ e) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ f) $f(x) = \frac{-4x+13}{x-3}$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 1$ g) $f(x) = \frac{x^2-6x+10}{x^2-6x+9}$

d) $f(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$ h) $f(x) = \frac{3x^2+6x+4}{x^2+2x+1}$

Aufgabe 9: Symmetrienachweis durch Verschiebung
Überprüfe die Symmetrie der folgenden Funktionen.
a) $f(x) = x^2 - 6x + 13$ zur Senkrechten $x = 3$ c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 25$ zu $P(3|2)$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ zur Senkrechten $x = 2$ d) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ zu $P(-1|2)$

Aufgabe 10: Monotonie
Gib die Intervalle an, auf denen die Funktionen aus Aufgabe 6
a) streng monoton steigend   b) monoton steigend   c) streng monoton fallend sind

Aufgabe 11: Umkehrfunktionen
Gib die Gleichung und den Definitionsbereich der Umkehrfunktionen zu den Funktionen aus Aufgabe 6 an.

4.4. Lösungen zu den Aufgaben zu Potenzfunktionen

Aufgaben 1 und 2: siehe Skript

Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Schaubildern
a) 1: $y = 0{,}5\cdot x^4$, 2: $y = 0{,}1\cdot x^5$, 3: $y =\cdot x^3$ und 4: $y = -2\cdot x^3$.
b) 1: $y = 2\cdot x^{-2}$, 2: $y = -0{,}5\cdot x^{-1}$, 3: $y = 3\cdot x^{-3}$ und 4: $y = -x^{-4}$.
c) $f_1(x) = 2x^3$, $f_2 = \frac{1}{4}x^3$ und $f_3 = \frac{2}{27}x^3$.
d) $f_1 = -x^{-1}$ und $f_2(x) = \frac{1}{5}x^{-3}$.

Aufgabe 4: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Punkten
a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4$ b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$ d) $f(x) = -27x^{-3}$ $f(x) = -\frac{1}{3}x^5$ f) $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

Aufgabe 5: Symmetrie
Die Symmetriezentren bzw. Symmetrieachsen sind:

a) O(0|0)	d) O(0|0)	g) x = 0	j) x = 0
b) P(0|2)	e) P(0|1)	h) O(0|0)	k) x = 0
c) x = 0	f) x = 0	i) P(0|−1)	l) x = 0.

Aufgabe 6: Symmetrie
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 0$

Aufgabe 7: Verschiebungen
a) $y = (x - 2)^3 - 4 = x^3 - 6x^2 + 12x - 12$ ist symmetrisch zu P(2|−4)
b) $y = (x + 1)^4 + 2 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$ ist symmetrisch zur Senkrechten x = −1
c) $y = \frac{1}{(x-1)^3} + 3 = \frac{1}{x^3-3x^2+3x-1} + 3 = \frac{3x^3-9x^2+9x-2}{x^3-3x^2+3x-1}$ ist symmetrisch zu P(1|3), hat eine senkrechte Asymptote bei x = 1 und eine waagrechte Asymptote bei y = 3: $f(x) \to 3$ für $x \to \pm\infty$
d) $y = \frac{1}{(x+4)^2} - 3 = \frac{1}{x^2+8x+16} - 3 = \frac{-3x^2-24x-47}{x^2+8x+16}$ ist symmetrisch zur senkrechten Asymptoten bei x = −4 und hat eine waagrechte Asymptote bei y = −3: $f(x) \to -3$ für $x \to \pm\infty$

Aufgabe 8: Verschiebungen
a) $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ ist eine um $x_0 = -2$ nach links und $y_0 = -4$ nach unten verschobene Parabel 2. Grades, die symmetrisch zur Senkrechten bei x = −2 ist.
b) $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ ist eine um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = 2$ nach oben verschobene Parabel 3. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(1|2) ist.
c) $f(x) = (x + 2)^3 - 7$ ist eine um $x_0 = -2$ nach links und $y_0 = -7$ nach unten verschobene Parabel 3. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(−2|−7) ist.
d) $f(x) = -(x + 1)^4 + 1$ ist eine an der x-Achse gespiegelte sowie um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = 1$ nach oben verschobene Parabel 4. Grades, die symmetrisch zur Senkrechten bei x = −1 ist.
e) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$ ist eine um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = 1$ nach oben verschobene Hyperbel 1. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(−1|1) ist. Sie hat eine senkrechte Asymptote bei x = −1 und eine waagrechte Asymptote bei y = 1: $f(x) \to 1$ für $x \to \pm\infty$
f) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 4$ ist eine um $x_0 = 3$ nach rechts und $y_0 = -4$ nach oben verschobene Hyperbel 1. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(3|−4) ist. Sie hat eine senkrechte Asymptote bei x = 3 und eine waagrechte Asymptote bei y = −4: $f(x) \to -4$ für $x \to \pm\infty$
g) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 1$ ist eine um $x_0 = 3$ nach rechts und $y_0 = 1$ nach oben verschobene Hyperbel 2. Grades, die symmetrisch zur senkrechten Asymptote x = 3 ist. Sie hat eine waagrechte Asymptote bei y = 1: $f(x) \to 1$ für $x \to \pm\infty$

h) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 3$ ist eine um $x_0 = -1$ nach links und $y_0 = 3$ nach oben verschobene Hyperbel 2. Grades, die symmetrisch zur senkrechten Asymptote $x = -1$ ist. Sie hat eine waagrechte Asymptote bei $y = 3$: $f(x) \to 3$ für $x \to \pm\infty$

Aufgabe 9: Symmetrienachweis durch Verschiebung

a) $f(x + 3) = x^2 + 4$

b) $f(x + 2) = x^2 - 1$

c) $f(x + 3) - 2 = x^3$

d) $f(x - 1) + 2 = -x^3$

Aufgabe 10: Monotonie

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ ist streng monoton fallend auf $]-\infty; -2]$ und streng monoton steigend auf $[-2; \infty[$

b) $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$

c) $f(x) = (x + 2)^3 - 7$ streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$

d) $f(x) = -(x + 1)^4 + 1$ ist streng monoton steigend auf $]-\infty; -2]$ und streng monoton fallend auf $[-1; \infty[$.

e) $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$ ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

f) $f(x) = \frac{1}{x-3} - 4$ ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

g) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 1$ ist streng monoton steigend auf $]-\infty; 3[$ und streng monoton fallend auf $]3; \infty[$.

h) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + 3$ ist streng monoton steigend auf $]-\infty; -1[$ und streng monoton fallend auf $]-1; \infty[$.

Aufgabe 11: Umkehrfunktionen

a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} - 2$ mit $D = [-4; \infty[$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} + 1$ mit $D = [2; \infty[$

c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+7} - 2$ mit $D = [-7; \infty[$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{2-x} - 1$ mit $D =]-\infty; 2]$

e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} - 1$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

f) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+4} + 3$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

g) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 3$ mit $D =]1; \infty[$

h) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} - 1$ mit $D =]3; \infty[$