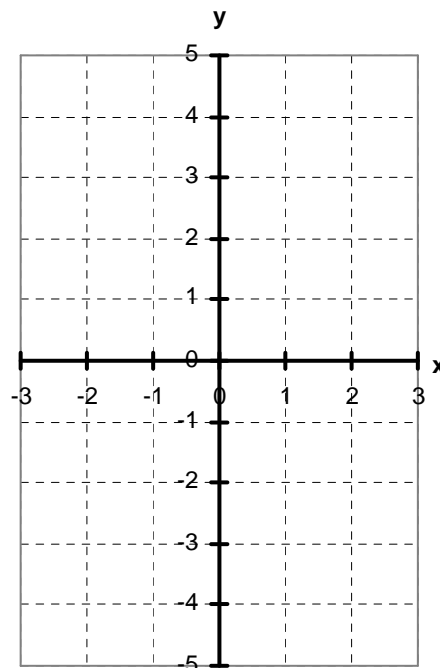
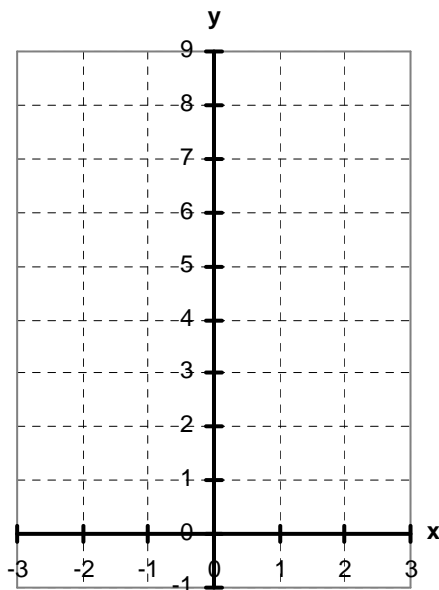


## 4.4. Aufgaben zu Potenzfunktionen

**Definition:** Eine Funktion der Form  $f(x) = c \cdot x^z$  mit  $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0;1\}$  heißt **Potenzfunktion**.

**Aufgabe 1: Potenzfunktionen mit positiven Exponenten (Parabeln). Ergänze:**

x	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$
-2				
-1				
$-\frac{1}{2}$				
0				
$\frac{1}{2}$				
1				
2				



### Eigenschaften der Potenzfunktionen

#### Symmetrie:

Eine Funktion  $f$  heißt

- **gerade** bzw. achsensymmetrisch zur **y-Achse**  $x = 0$ , falls  $f(-x) = \underline{\hspace{2cm}}$  und
- **ungerade** bzw. punktsymmetrisch zum **Ursprung**  $O(0|0)$ , falls  $f(-x) = \underline{\hspace{2cm}}$

für alle  $x \in D$ .

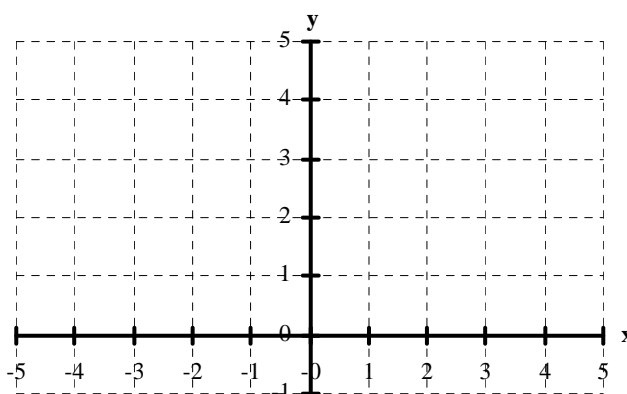
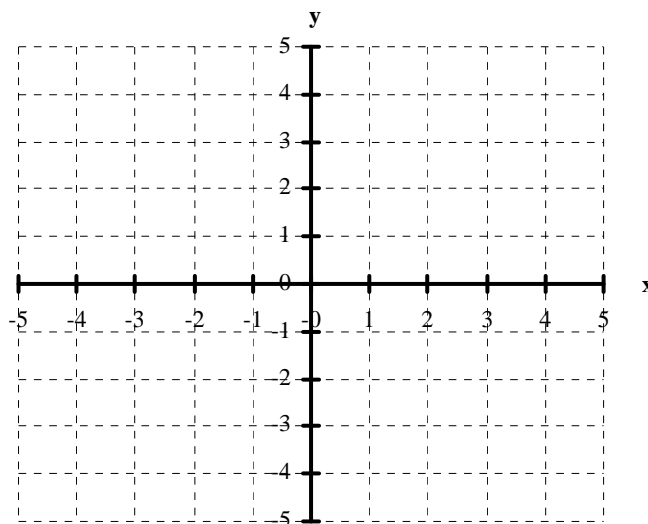
#### Beispiele

$f(x) = x^8$  ist **gerade**, da  $f(-x) = (-x)^8 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

$f(x) = x^7$  ist **ungerade**, da  $f(-x) = (-x)^7 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

**Aufgabe 2: Potenzfunktionen mit negativen Exponenten (Hyperbeln). Ergänze:**

x	$x^{-1}$	$x^{-2}$	$x^{-3}$	$x^{-4}$
-10				
-2				
-1				
$-\frac{1}{2}$				
$-\frac{1}{10}$				
0				
$\frac{1}{10}$				
$\frac{1}{2}$				
1				
2				
10				



**Asymptoten**

Eine Asymptote ist eine **Näherungsgerade** im Schaubild einer Funktion  $f$ : Das Schaubild kommt ihr für betragsgroße  $x$  oder  $y$  beliebig nahe. **Senkrechte Asymptoten** nennt man auch **Polstellen**.

**Grenzwert einer Funktion für  $x \rightarrow \pm \infty$**

Eine Funktion  $f$  strebt für  $x \rightarrow \pm \infty$  gegen den **Grenzwert** (lat. limes)  $a$ , wenn die Funktionswerte  $f(x)$  für genügend kleine bzw. große  $x$  beliebig nahe an die Zahl  $a$   $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = a$ .

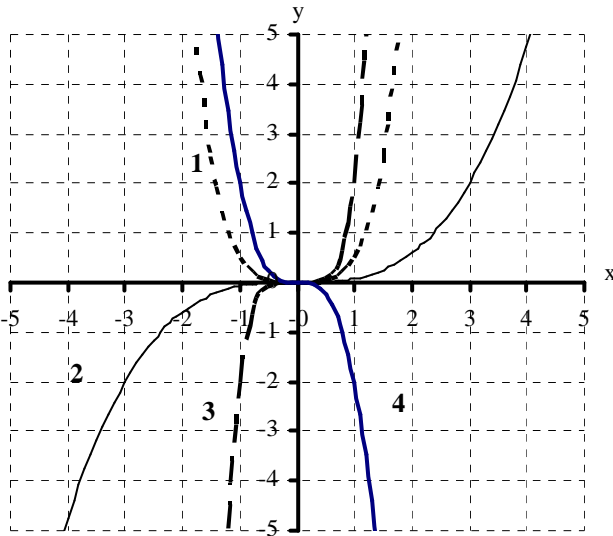
Das Schaubild von  $f$  besitzt dann für  $x \rightarrow \pm \infty$  eine **waagrechte Asymptote**  $y = a$ .

**Definitions- und Wertebereiche:**

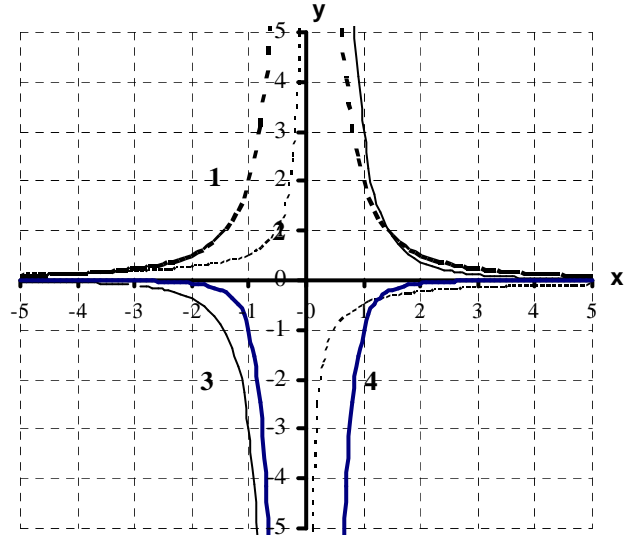
$y = x^z$	z gerade	z ungerade
$z > 0$	 D = ____ W = ____	 D = ____ W = ____
$z < 0$	 D = ____ W = ____	 D = ____ W = ____

**Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Schaubildern**

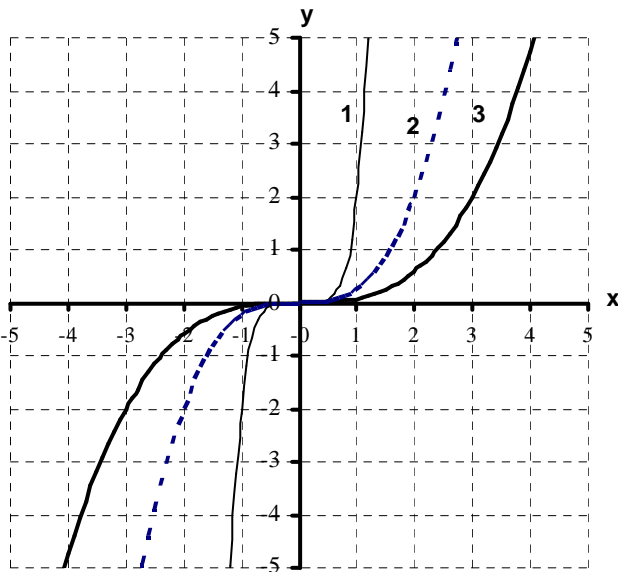
a) Ordne die Schaubilder 1 - 4 aus der nebenstehenden Abbildung den folgenden Funktionen zu und überprüfe deine Entscheidung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.  
 $y = 0,1 \cdot x^3$ ,  $y = -2 \cdot x^3$ ,  $y = 0,5 \cdot x^4$  und  $y = 2 \cdot x^5$ .



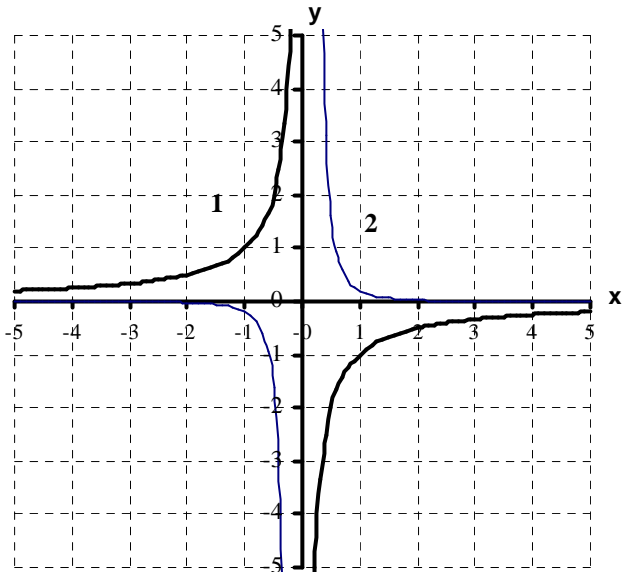
b) Ordne die Schaubilder 1 - 4 aus der untenstehenden Abbildung den folgenden Funktionen zu und überprüfe deine Entscheidung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.  
 $y = -0,5 \cdot x^{-1}$ ,  $y = 2 \cdot x^{-2}$ ,  $y = 3 \cdot x^{-3}$  und  $y = -x^{-4}$ .



c) Bestimme die Faktoren  $c_i$  für die Schaubilder der Funktionen  $f_i(x) = c_i \cdot x^3$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  aus der untenstehenden Abbildung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.



d) Bestimme die Faktoren  $c_i$  für die Schaubilder der Funktionen  $f_1(x) = c_1 \cdot x^{-1}$  und  $f_2(x) = c_2 \cdot x^{-3}$  aus der untenstehenden Abbildung durch Einsetzen eines geeigneten Punktes.



**Aufgabe 4: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Punkten**

Bestimme die Gleichung der Potenzfunktion  $f(x) = c \cdot x^n$ , deren Schaubild durch die Punkte P und Q verläuft.

- a) P(1|0,25) und Q(2|4)      c) P(0,5|2) und Q(-0,25|8)      e) P(2 |  $-\frac{32}{3}$ ) und Q(3 | -81)
- b) P(2|-4) und Q(3|-13,5)      d) P(-1,5|8) und Q(3|-1)      f) P(-3 |  $-\frac{27}{5}$ ) und Q(5 | 25)

### Aufgabe 5: Symmetrie

Untersuche die folgenden Funktionen auf Punkt- und Achsensymmetrie und skizziere ihre Schaubilder:

- a)  $f(x) = \frac{1}{3}x$       d)  $f(x) = \frac{1}{2x}$       g)  $f(x) = 1 - \frac{1}{4x^2}$       j)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4$   
b)  $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$       e)  $f(x) = \frac{1}{2x} + 1$       h)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$       k)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4$   
c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$       f)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       i)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1$       l)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ .

### Aufgabe 6: Symmetrie

Gib die Gleichung einer Funktion an, die

- a) sowohl gerade als auch ungerade      b) symmetrisch zur x-Achse ist

### Aufgabe 7: Verschiebungen

Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von  $f$  um  $x_0$  in x-Richtung und  $y_0$  in y-Richtung verschiebt. Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte.

- a)  $f(x) = x^3$  um  $x_0 = 2$  nach rechts und  $y_0 = -4$  nach unten  
c)  $f(x) = x^4$  um  $x_0 = -1$  nach links und  $y_0 = 2$  nach oben  
b)  $f(x) = x^{-3}$  um  $x_0 = 1$  nach rechts und  $y_0 = 3$  nach oben  
d)  $f(x) = x^{-2}$  um  $x_0 = -4$  nach links und  $y_0 = -3$  nach unten

### Aufgabe 8: Verschiebungen

Untersuche das Schaubild von  $f$  auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte. Gib die Gleichung der ursprünglichen Potenzfunktion an, und durch welche Verschiebung es aus dieser Potenzfunktion hervorgegangen ist.

- a)  $f(x) = x^2 + 4x$       e)  $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$   
b)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$       f)  $f(x) = \frac{-4x+13}{x-3}$   
c)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 1$       g)  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 9}$   
d)  $f(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x$       h)  $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 4}{x^2 + 2x + 1}$

### Aufgabe 9: Symmetrienachweis durch Verschiebung

Überprüfe die Symmetrie der folgenden Funktionen.

- a)  $f(x) = x^2 - 6x + 13$  zur Senkrechten  $x = 3$       c)  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 25$  zu  $P(3|2)$   
b)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  zur Senkrechten  $x = 2$       d)  $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1$  zu  $P(\square|2)$

### Aufgabe 10: Monotonie

Gib die Intervalle an, auf denen die Funktionen aus Aufgabe 6

- a) streng monoton steigend      b) monoton steigend      c) streng monoton fallend sind

### Aufgabe 11: Umkehrfunktionen

Gib die Gleichung und den Definitionsbereich der Umkehrfunktionen zu den Funktionen aus Aufgabe 6 an.

## 4.4. Lösungen zu den Aufgaben zu Potenzfunktionen

**Aufgaben 1 und 2:** siehe Skript

**Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Schaubildern**

- a) 1:  $y = 0,5 \cdot x^4$ , 2:  $y = 0,1 \cdot x^5$ , 3:  $y = x^3$  und 4:  $y = -2 \cdot x^3$ .  
b) 1:  $y = 2 \cdot x^{-2}$ , 2:  $y = -0,5 \cdot x^{-1}$ , 3:  $y = 3 \cdot x^{-3}$  und 4:  $y = -x^{-4}$ .  
c)  $f_1(x) = 2x^3$ ,  $f_2 = \frac{1}{4}x^3$  und  $f_3 = \frac{2}{27}x^3$ .  
d)  $f_1 = -x^{-1}$  und  $f_2(x) = \frac{1}{5}x^{-3}$ .

**Aufgabe 4: Bestimmung von Funktionsgleichungen aus gegebenen Punkten**

- a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4$    b)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$    c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$    d)  $f(x) = -27x^{-3}$    e)  $f(x) = -\frac{1}{3}x^5$    f)  $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

**Aufgabe 5: Symmetrie**

Die Symmetriezentren bzw. Symmetrieachsen sind:

- a) O(0|0)      d) O(0|0)      g)  $x = 0$       j)  $x = 0$   
b) P(0|2)      e) P(0|1)      h) O(0|0)      k)  $x = 0$   
c)  $x = 0$       f)  $x = 0$       i) P(0|-1)      l)  $x = 0$ .

**Aufgabe 6: Symmetrie**

- a)  $f(x) = 0$       b)  $f(x) = 0$

**Aufgabe 7: Verschiebungen**

- a)  $y = (x - 2)^3 - 4 = x^3 - 6x^2 + 12x - 12$  ist symmetrisch zu P(2|-4)  
b)  $y = (x + 1)^4 + 2 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 3$  ist symmetrisch zur Senkrechten  $x = -1$   
c)  $y = \frac{1}{(x-1)^3} + 3 = \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} + 3 = \frac{3x^3 - 9x^2 + 9x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$  ist symmetrisch zu P(1|3), hat eine senkrechte Asymptote bei  $x = 1$  und eine waagrechte Asymptote bei  $y = 3$ :  $f(x) \rightarrow 3$  für  $x \rightarrow \pm \infty$   
d)  $y = \frac{1}{(x+4)^2} - 3 = \frac{1}{x^2 + 8x + 16} - 3 = \frac{-3x^2 - 24x - 47}{x^2 + 8x + 16}$  ist symmetrisch zur senkrechten Asymptoten bei  $x = -4$  und hat eine waagrechte Asymptote bei  $y = -3$ :  $f(x) \rightarrow -3$  für  $x \rightarrow \pm \infty$

**Aufgabe 8: Verschiebungen**

- a)  $f(x) = (x + 2)^2 - 4$  ist eine um  $x_0 = -2$  nach links und  $y_0 = -4$  nach unten verschobene Parabel 2. Grades, die symmetrisch zur Senkrechten bei  $x = -2$  ist.  
b)  $f(x) = (x - 1)^3 + 2$  ist eine um  $x_0 = 1$  nach rechts und  $y_0 = 2$  nach oben verschobene Parabel 3. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(1|2) ist.  
c)  $f(x) = (x + 2)^3 - 7$  ist eine um  $x_0 = -2$  nach links und  $y_0 = -7$  nach unten verschobene Parabel 3. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(-2|-7) ist.  
d)  $f(x) = -(x + 1)^4 + 1$  ist eine an der x-Achse gespiegelte sowie um  $x_0 = -1$  nach links und  $y_0 = 1$  nach oben verschobene Parabel 4. Grades, die symmetrisch zur Senkrechten bei  $x = -1$  ist.  
e)  $f(x) = \frac{1}{x+1} + 1$  ist eine um  $x_0 = -1$  nach links und  $y_0 = 1$  nach oben verschobene Hyperbel 1. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(-1|1) ist. Sie hat eine senkrechte Asymptote bei  $x = -1$  und eine waagrechte Asymptote bei  $y = 1$ :  $f(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \pm \infty$   
f)  $f(x) = \frac{1}{x-3} - 4$  ist eine um  $x_0 = 3$  nach rechts und  $y_0 = -4$  nach oben verschobene Hyperbel 1. Grades, die symmetrisch zum Punkt P(3|-4) ist. Sie hat eine senkrechte Asymptote bei  $x = 3$  und eine waagrechte Asymptote bei  $y = -4$ :  $f(x) \rightarrow -4$  für  $x \rightarrow \pm \infty$   
g)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 1$  ist eine um  $x_0 = 3$  nach rechts und  $y_0 = 1$  nach oben verschobene Hyperbel 2. Grades, die symmetrisch zur senkrechten Asymptote  $x = 3$  ist. Sie hat eine waagrechte Asymptote bei  $y = 1$ :  $f(x) \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \pm \infty$

