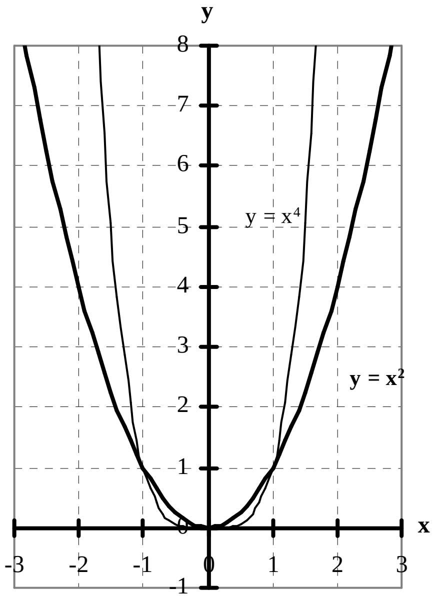
4.4. Potenzfunktionen

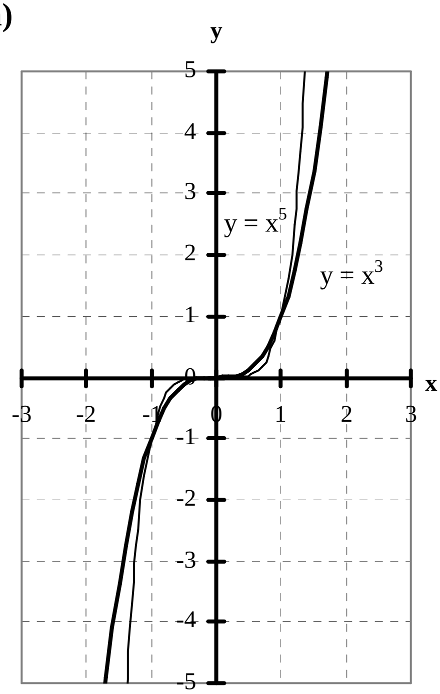
Definition: Eine Funktion der Form $f(x) = c \cdot x^z$ mit $z \in \mathbb{Z} \backslash \{0; 1\}$ heißt **Potenzfunktion**.

4.4.1. Potenzfunktionen mit positiven Exponenten (Parabeln)

Schaubilder
und
Wertetabelle:

x	x^1	x^2	x^3	x^4
-2	-2	4	-8	16
-1	-1	1	-1	1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	1	1	1	1
2	2	4	8	16





Satz:
Eine Potenzfunktion mit **geraden (ungeraden)** Exponenten ist eine **gerade (ungerade)** Funktion.
Beweis:
Sei $f(x) = c \cdot x^n$ mit n gerade, dann ist n durch 2 teilbar, d.h., $n = 2m$ und $f(-x) = c \cdot (-x)^{2m} = c \cdot x^{2m} = c \cdot x^n = f(x)$. Sei andererseits n ungerade, dann ist $n - 1$ durch 2 teilbar, d.h., $n = 2m + 1$ und $f(-x) = c \cdot (-x)^{2m+1} = c \cdot (-x^{2m+1}) = -c \cdot x^{2m+1} = -c \cdot x^n = -f(x)$.

Eigenschaften der Potenzfunktionen

Symmetrie:
Eine Funktion f heißt
- **gerade** bzw. achsensymmetrisch zur y-Achse, falls $f(-x) = f(x)$ und
- **ungerade** bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung, falls $f(-x) = -f(x)$

für alle $x \in D$.

Beispiele

$f(x) = x^8$ ist gerade, da
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^8 \\ &= (-x)^2\,(-x)^2\,(-x)^2\,(-x)^2 \\ &= x^8 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

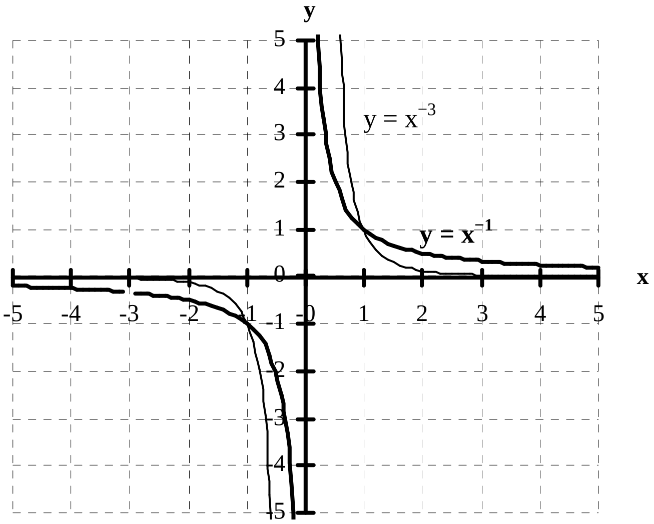
$f(x) = x^7$ ist ungerade, da
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^7 \\ &= (-x)^2\,(-x)^2\,(-x)^2\,(-x) \\ &= -x^7 \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

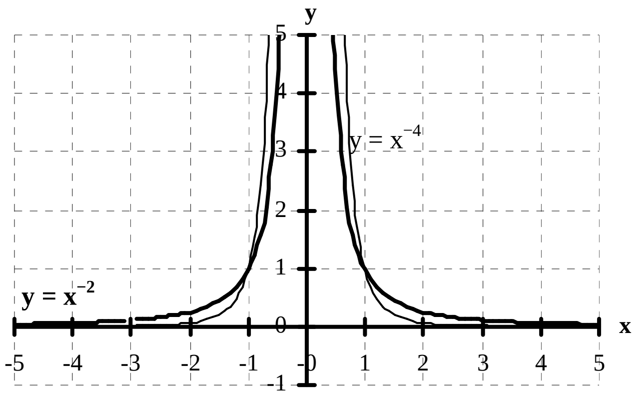
4.4.2. Potenzfunktionen mit negativen Exponenten (Hyperbeln)

Wertetabelle

x	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}
-10	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
-1	-1	1	-1	1
$-\frac{1}{2}$	-2	4	-8	16
$-\frac{1}{10}$	-10	100	-1000	10000
0	-	-	-	-
$\frac{1}{10}$	10	100	1000	10000
$\frac{1}{2}$	2	4	8	16
1	1	1	1	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$

Schaubilder

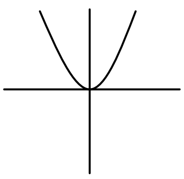
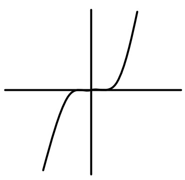
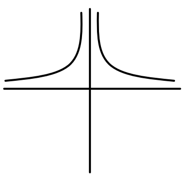
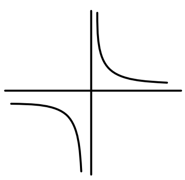




Asymptoten
Eine Asymptote ist eine **Näherungsgerade** im Schaubild einer Funktion f: Das Schaubild kommt ihr für betragsgroße x oder y beliebig nahe. **Senkrechte Asymptoten** nennt man auch **Polstellen**.

Grenzwert einer Funktion für x → ± ∞
Eine Funktion f strebt für x → ± ∞ gegen den **Grenzwert** (lat. limes) a, wenn die Funktionswerte f(x) für genügend kleine bzw. große x beliebig nahe an die Zahl a herankommen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$. Das Schaubild von f besitzt dann für x → ± ∞ eine **waagrechte Asymptote** y = a.

Definitions- und Wertebereiche:

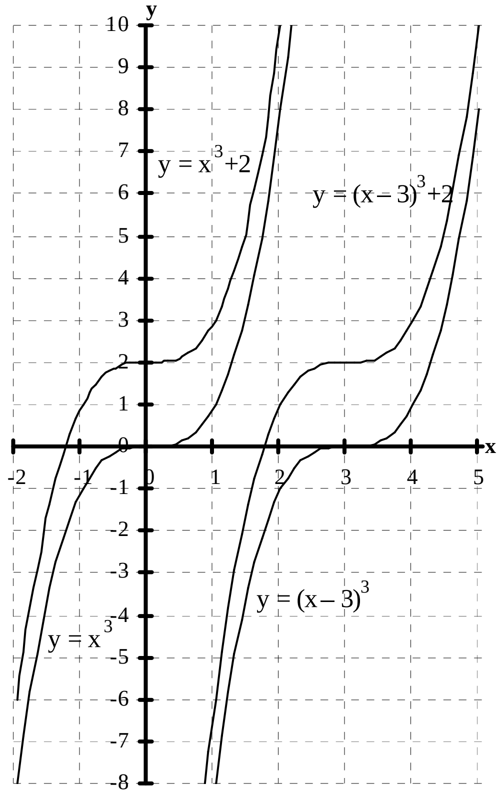
$y = x^z$	z gerade		z ungerade	
z > 0		$D = \mathbb{R}$ $W = [0; \infty[$		$D = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}$
z < 0		$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $W =]0; \infty[$		$D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr.3 - 6

4.4.3. Verschiebung von Potenzfunktionen

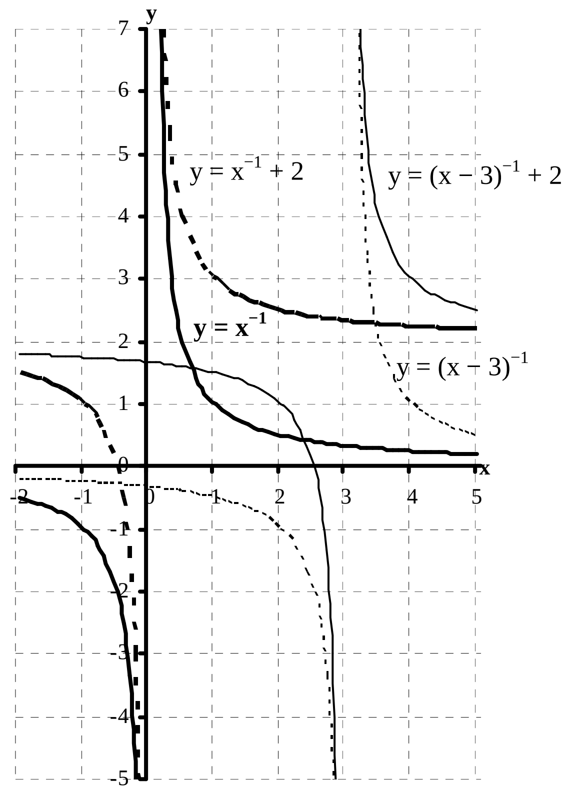
Beispiel 1: Verschiebung der kubischen Parabel $y = x^3$

x	x^3	$x^3 + 2$	$(x-3)^3$	$(x-3)^3 + 2$
-2	-8	$-8 + 2$		
-1	-1	$-1 + 2$		
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8} + 2$		
0	0	$0 + 2$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + 2$		
1	1	$1 + 2$	-8	$-8 + 2$
2	8	$8 + 2$	-1	$-1 + 2$
$2\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8} + 2$
3			0	$0 + 2$
$3\frac{1}{2}$			$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} + 2$
4			1	$1 + 2$
5			8	$8 + 2$

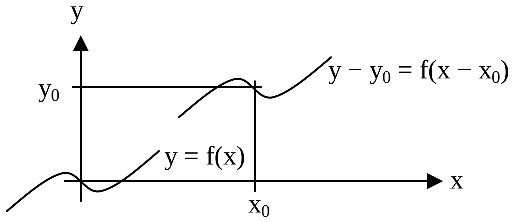


Beispiel 2: Verschiebung der Hyperbel $y = x^{-1}$

x	x^{-1}	$x^{-1} + 2$	$(x-3)^{-1}$	$(x-3)^{-1} + 2$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$		
-1	-1	$-1 + 2$		
$-\frac{1}{2}$	-2	$-2 + 2$		
0	0	$0 + 2$		
$\frac{1}{2}$	2	$2 + 2$		
1	1	$1 + 2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + 2$	-1	$-1 + 2$
$2\frac{1}{2}$			-2	$-2 + 2$
3			0	$0 + 2$
$3\frac{1}{2}$			2	$2 + 2$
4			1	$1 + 2$
5			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + 2$



Verschiebung von Schaubildern
Man verschiebt das Schaubild von $y = f(x)$ um x_0 in x-Richtung und y_0 in y-Richtung, indem man in der Funktionsgleichung x durch $x - x_0$ und y durch $y - y_0$ ersetzt. Das verschobene Schaubild hat dann die Gleichung $y - y_0 = f(x - x_0)$ bzw. $y = f(x - x_0) + y_0$.



Übungen: Verschiebung von Potenzfunktionen Nr. 1 - 6

Die allgemeine binomische Formel (Pascalsches Dreieck)

$(a + b)^0 =$	$\mathbf{1}$
$(a + b)^1 =$	$\mathbf{1}a + \mathbf{1}b$
$(a + b)^2 =$	$\mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2$
$(a + b)^3 =$	$\mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3$
$(a + b)^4 =$	$\mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4$

Beispiel für die Verschiebung einer Parabel

Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{3}x^4$ um $x_0 = 3$ nach rechts und $y_0 = 1$ nach oben verschiebt. Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte.

Lösung:

$y = f(x)$ | ursprüngliche Funktion

$y = \frac{1}{3}x^4$ | y durch $y - 1$ und x durch $x - 3$ ersetzen:

$y - 1 = f(x - 3)$ | verschobene Funktion

$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 3)^4$ | mit binomischer Formel ausmultiplizieren

$y - 1 = \frac{1}{3}\cdot[\mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}\cdot x^3\cdot(-3) + \mathbf{6}\cdot x^2\cdot(-3)^2 + \mathbf{4}\cdot x\cdot(-3)^3 + \mathbf{1}\cdot(-3)^4]$ | ausmultiplizieren

$y - 1 = \frac{1}{3}\cdot[x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81)$ | ausmultiplizieren

$y - 1 = \frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 36x + 27$ | + 1

$y = \frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 36x + 28$

Die verschobene Funktion hat die Gleichung $y - 1 = f(x - 3)$ bzw. $y = \frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 18x^2 - 36x + 28$. Ihr Schaubild ist eine verschobene Parabel 4. Grades, die symmetrisch zur Senkrechten bei $x = 3$ ist. Der Tiefpunkt ist $T(1|3)$. Für $x \to \pm\infty$ strebt auch f(x) gegen $+\infty$, d.h., es gibt weder Asymptoten noch Grenzwerte.

Beispiel für die Verschiebung einer Hyperbel

Gib die Gleichung der Funktion an, die man erhält, wenn man das Schaubild von $f(x) = \frac{2}{x^2}$ um $x_0 = -2$ nach links und $y_0 = 3$ nach oben verschiebt. Untersuche ihr Schaubild auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte.

Lösung:

$y = f(x)$ | ursprüngliche Funktion

$y = \frac{2}{x^2}$ | y durch $y - 3$ und x durch $x + 2$ ersetzen:

$y - 3 = f(x + 2)$ | verschobene Funktion

$y - 3 = \frac{2}{(x+2)^2}$ | mit binomischer Formel ausmultiplizieren

$$y - 3 = \frac{2}{x^2 + 4x + 4} \qquad | + 3$$

$$y = \frac{2}{x^2 + 4x + 4} + 3 \qquad | \text{ auf gleichen Nenner bringen}$$

$$y = \frac{3x^2 + 12x + 14}{x^2 + 4x + 4}$$

Die verschobene Funktion hat die Gleichung $y - 3 = f(x + 2)$ bzw. $y = \frac{3x^2 + 12x + 14}{x^2 + 4x + 4}$. Ihr Schaubild ist eine verschobene Hyperbel 2. Grades, die symmetrisch zur senkrechten Asymptote bei $x = -2$ ist. Es besitzt außerdem eine waagrechte Asymptote bei $y = 3$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$. Hoch- oder Tiefpunkte gibt es nicht

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 7

Beispiel für die Untersuchung einer verschobenen Parabel

Untersuche das Schaubild von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte. Gib die Gleichung der ursprünglichen Potenzfunktion an, und durch welche Verschiebung es aus dieser Potenzfunktion hervorgegangen ist.

Lösung:

$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ | kubische Ergänzung mit binomischer Formel
$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 - 4$ | binomische Formel
$y = (x - 1)^3 - 4$ | + 4
$y + 3 = (x - 1)^3$ | verschobene Funktion
$y + 3 = f(x - 1)$
$y = f(x)$
$y = x^3$ | ursprüngliche Funktion

Es handelt sich um eine Parabel 3. Grades mit der Gleichung $y = x^3$, die um $x_0 = 1$ nach rechts und $y_0 = -3$ nach unten verschoben wurde. Sie ist symmetrisch zum Punkt $P(1|-3)$. Sie besitzt weder Hoch- noch Tiefpunkte und auch keine Asymptoten

Beispiel für die Untersuchung einer verschobenen Hyperbel

Untersuche das Schaubild von $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 9}$ auf Symmetrie, Hoch- und Tiefpunkte, Asymptoten und Grenzwerte. Gib die Gleichung der ursprünglichen Potenzfunktion an, und durch welche Verschiebung es aus dieser Potenzfunktion hervorgegangen ist.

Lösung:

$$y = \frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 - 6x + 9} \qquad | \text{ binomische Formel}$$

$$y = \frac{x^2 - 6x + 10}{(x - 3)^2} \qquad | \text{ quadratische Ergänzung im Zähler}$$

$$y = \frac{x^2 - 6x + 9 - 9 + 10}{(x - 3)^2} \qquad | \text{ binomische Formel im Zähler}$$

$$y = \frac{(x - 3)^2 - 9 + 10}{(x - 3)^2} \qquad | \text{ zusammenfassen}$$

$$y = \frac{(x - 3)^2 + 1}{(x - 3)^2} \qquad | \text{ Bruch auftrennen}$$

$$y = 1 + \frac{1}{(x - 3)^2} \qquad | -1$$

$$y - 1 = \frac{1}{(x - 3)^2} \qquad | \text{ verschobene Funktion}$$

$y - 1 = f(x - 3)$
$y = f(x)$

$$y = \frac{1}{x^2} \qquad | \text{ ursprüngliche Funktion}$$

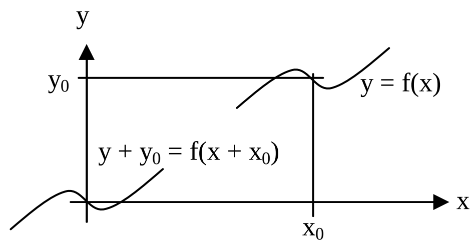
Es handelt sich um eine Hyperbel 2. Grades mit der Gleichung $y = \frac{1}{x^2}$, die um $x_0 = 3$ nach rechts und $y_0 = 1$ nach oben verschoben wurde. Sie ist symmetrisch zur senkrechte Asymptote bei x = 3. Außerdem hat sie eine waagrechte Asymptote bei y = 1: $f(x) \to 1$ für $x \to \pm\infty$. Sie besitzt weder Hoch- noch Tiefpunkte.

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 8

4.4.4. Symmetrienachweis durch Verschiebung

Symmetrienachweis durch Verschiebung
Das Schaubild von y = f(x) ist

- **symmetrisch zur Achse $x = x_0$,** wenn die um $-x_0$ in x-Richtung **zurück verschobene** Funktion $y = f(x + x_0)$ **gerade** ist
- **symmetrisch zum Punkt $P(x_0|y_0)$,** wenn die um $-x_0$ in x-Richtung und $-y_0$ in y-Richtung **zurück verschobene** Funktion $y + y_0 = f(x + x_0)$ **ungerade** ist



Beispiel:

Zeige, dass das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ symmetrisch zum Punkt P(2|1) ist.

Lösung

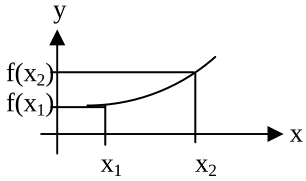
$$
\begin{array}{lll}
y & = f(x) & | \text{ ursprüngliche Funktion} \\
y & = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 3 & | \text{ x durch x + 2 und y durch y + 1 ersetzen} \\
y + 1y & = f(x + 2) & | \text{ verschobene Funktion} \\
y + 1 & = \frac{1}{2}(x+2)^3 - 3(x+2)^2 + 6(x+2) - 3 & | \text{ mit binomischer Formel ausmultiplizieren} \\
y + 1 & = \frac{1}{2}[1x^3 + \cdot\mathbf{3}\cdot x^2\cdot 2 + \mathbf{3}\cdot x\cdot 2^2 + \mathbf{1}\cdot 2^3] & | \text{ ausmultiplizieren und nach Potenzen ordnen} \\
 & \quad -3[\mathbf{1}x^2 + \cdot\mathbf{2}\cdot 2\cdot x + \mathbf{1}\cdot 2^2] & \\
 & \quad + 6[x + 2] & \\
 & \quad -3 & \\
y + 1 & = \frac{1}{2}x^3 + 3\cdot x^2 + 6x + 4 & | \text{ vereinfachen} \\
 & \quad - 3x^2 - 12x - 12 & \\
 & \quad + 6x + 12 & \\
 & \quad - 3 & \\
y + 1 & = \frac{1}{2}x^3 + 1 & | -1 \\
y & = \frac{1}{2}x^3 &
\end{array}
$$

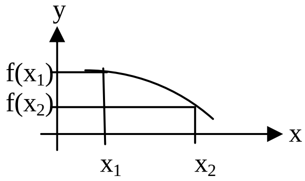
Da die um −2 in x-Richtung und −1 in y-Richtung zurück verschobene Funktion $y + 1 = f(x + 2)$ bzw. $y = \frac{1}{2}x^3$ ungerade und damit symmetrisch zu O(0|0) ist, muss die ursprüngliche Funktion y = f(x) bzw. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 3$ symmetrisch zu P(2|1) sein.

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 9

4.4.5. Monotonieverhalten

Definition
Das Schaubild der Funktion y = f(x)
heißt im Bereich [a; b] ⊂ D
(streng) monoton steigend,
wenn $f(x_1) \leq (<) f(x_2)$
(streng) monoton fallend,
wenn $f(x_1) \geq (>) f(x_2)$
für alle $a \leq x_1 < x_2 \leq b$





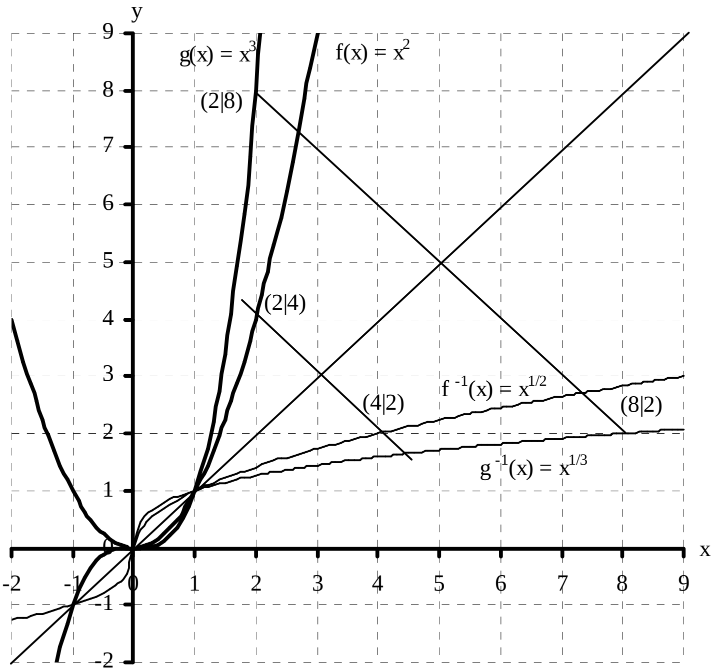
Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 10

4.4.6. Bestimmung von Umkehrfunktionen

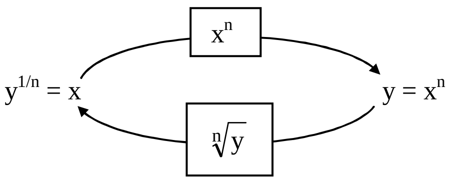
Schaubilder der Wurzel- und Potenzfunktionen für n = 2 und 3 (siehe auch 1.4.1.)

$x = \sqrt[2]{y}$	$y = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
3	9

$x = \sqrt[3]{y}$	$y = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
1,5	3,375
2	8



Das Ziehen der n-ten Wurzel ist die **Umkehrung** des Potenzierens mit der Hochzahl n:



Beispiel:
Bestimme die Funktionsgleichung und Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} zu $f(x) = 3(x-2)^3 + 5$
Lösung:

$$y = 3(x-2)^3 + 5 \quad | \text{ Vertauschung von x und y}$$
$$x = 3(y-2)^3 + 5 \quad | -5$$
$$x - 5 = 3(y-2)^3 \quad | :3$$
$$\frac{1}{3}(x-5) = (y-2)^3 \quad | \sqrt[3]{} \text{ mit } x \geq 5 \text{ und } y \geq 2$$
$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(x-5)} = y - 2 \quad | +2$$
$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(x-5)} + 2 = y = f^{-1}(x) \text{ mit } D_f^{-1} = [5;\ \infty[\text{ und } W_f^{-1} = [2; \infty[$$

Übungen: Aufgaben zu Potenzfunktionen Nr. 11