

4.5. Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1: Normalform und Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$

Bestimme die Normalform der Funktionsgleichung und beschreibe das Verhalten der Schaubilder für $x \rightarrow \pm \infty$ (Beispiel: $f(x) = x^3$ kommt von unten und geht nach oben)

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = -x^5 + 6x^2 - 7x + 12$ | e) $f_t(x) = tx - 4x^2 + 12$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| b) $f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 0,5x^4 - x^3 - 2$ | f) $f_t(x) = tx^3 - 2x^2 + 5x - 1$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2) + 2$ | g) $f_t(x) = x^4 - tx^2 + 6$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| d) $f(x) = (x - 2)^3$ | h) $f_a(x) = -a(x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (3 - x)$ für $a \in \mathbb{R}$ |

Aufgabe 2: Produktform

Bestimme die Normalform sowie die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen für $t \in \mathbb{R}$ und skizziere ihre Schaubilder für die gegebenen t . Beschreibe **in Worten**, wie sich **Betrag** und **Vorzeichen** von t auf die Form des Schaubildes auswirken.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$ | g) $f_t(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - t)$ für $t \in \{-2; -1; 0\}$ |
| b) $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1)$ | h) $f_t(x) = (x + 1) \cdot (x - t)^2$ für $t \in \{-2; -1; 0\}$ |
| c) $f(x) = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ | i) $f_t(x) = (x - t)^3$ für $t \in \{-2; -1; 0\}$ |
| d) $f(x) = -(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$ | j) $f_t(x) = tx(x - 2)(x + 2)$ für $t \in \{-1; 1; 2\}$ |
| e) $f(x) = (x + 2)^3 \cdot (x - 1)$ | k) $f_t(x) = x \cdot (x^2 - t)$ für $t \in \{-1; 0; 1; 4\}$ |
| f) $f(x) = -\frac{1}{2} (x + 2) \cdot (x - 1)^4$ | l) $f_t(x) = \frac{x}{t} (x - t) \cdot (x - 2t)$ für $t \in \{-1; 1; 2\}$ |

Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen in Produktform

Bestimme die Funktionsgleichungen der ganzrationalen Funktionen n -ten Grades, deren Schaubilder die folgenden Nullstellen aufweisen und außerdem durch den Punkt P verlaufen:

- | | |
|--|--|
| a) $n = 1, x_1 = 1$ und $P(0 1)$ | e) $n = 4, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = 4$ und $P(0 4)$ |
| b) $n = 2, x_1 = 1, x_2 = 2$ und $P(0 4)$ | f) $n = 4, x_1 = t, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = -1$ und $P(0 2)$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| c) $n = 3, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ und $P(0 -12)$ | g) $n = 3, x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = 1$ und $P(0 t)$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| d) $n = 4, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ und $P(0 -8)$ | h) $n = 3, x_{1/2} = 2, x_3 = t$ und $P(0 -4)$ für $t \in \mathbb{R}$ |

Aufgabe 4: Polynomdivision

Führe die folgenden Divisionen aus:

- | | |
|--|---|
| a) $(x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x + 3)$ | e) $(x^5 - 8x^4 - 19x^3 - 10x^2) : (x - 10)$ |
| b) $(x^3 - 3x^2 + x + 1) : (x - 1)$ | f) $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ |
| c) $(2x^3 + 4x^2 - 4x - 8) : (x + 2)$ | g) $(x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 12x + 14) : (x - 7)$ |
| d) $(-x^3 + 6x^2 - 11x + 6) : (x - 3)$ | h) $(x^3 + 2x^2 - 3x - 6) : (x + 2)$ |

Aufgabe 5: Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision

Bestimme die Produktform sowie die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen für $t \in \mathbb{R}$ und skizziere ihre Schaubilder für die gegebenen t . Beschreibe **in Worten**, wie sich **Betrag** und **Vorzeichen** von t auf die Form des Schaubildes auswirken.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ | h) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - 4x^2 + x + 12$ |
| b) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ | i) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2 - 2x$ |
| c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$ | j) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x - 2$ |
| d) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$ | k) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - 2x + t$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ | l) $f_t(x) = x^4 - t^2x^2$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| f) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - \frac{7}{2}x + 5$ | m) $f_t(x) = x^3 + (2 - 2t)x^2 + (t^2 - 4t)x + 2t^2$ |
| g) $f(x) = -\frac{1}{5}x^3 - x^2 - \frac{2}{5}x - 2$ | n) $f_t(x) = x^3 + x^2 - t^2x - t^2$ |

4.5. Lösungen zu den Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen

Aufgabe 1: Normalform und Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = -x^5 + 6x^2 - 7x + 12$ | e) $f(x) = -4x^2 + tx + 12$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| b) $f(x) = 8x^6 - 12x^5 + 0,5x^4 - x^3 - 2$ | f) $f(x) = tx^3 - 2x^2 + 5x - 1$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| c) $f(x) = x^5 - x^3 + 2x^2$ | g) $f_t(x) = x^4 - tx^2 + 6$ für $t \in \mathbb{R}$ |
| d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ | h) $f_t(x) = ax^3 - 4ax^2 - 3ax + 18a$ |

Aufgabe 2: Produktform

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ | g) $f_t(x) = x^3 + (2-t)x^2 + (1-2t)x - t$ |
| b) $f(x) = x^2 + 3x^2 - 4$ | h) $f_t(x) = x^3 + (1-2t)x^2 + (t^2 - 2t)x + t^2$ |
| c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ | i) $f_t(x) = x^3 - 3tx^2 + 3t^2x - t^3$ |
| d) $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$ | j) $f_t(x) = tx^3 - 4tx$ |
| e) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8$ | k) $f_t(x) = x^3 - tx$ |
| f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^4 + x^3 - 4x^2 + \frac{7}{2}x - 1$ | l) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - 3x^2 + 2tx$ |

Aufgabe 3: Bestimmung von Funktionsgleichungen in Produktform

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = -x + 1$ | e) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{4}x^3 - 5x + 4$ |
| b) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$ | f) $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 + \frac{1-t}{2t}x^3 - \frac{4+t}{2t}x^2 + \frac{2t-2}{t}x + 2$ |
| c) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$ | g) $f_t(x) = -\frac{t}{8}x^3 + \frac{5t}{8}x^2 - \frac{t}{4}x + t$ |
| d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 - \frac{35}{3}x^2 + \frac{50}{3}x - 8$ | h) $f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - \frac{4+t}{t}x^2 + \frac{4+4t}{t}x - 4$ |

Aufgabe 4: Polynomdivision

- | | |
|--------------------|---|
| a) $x^2 + x - 2$ | e) $x^4 + 2x^3 + x^2$ |
| b) $x^2 - 2x - 1$ | f) $x^2 + 2x - 3$ |
| c) $2x^2 - 4$ | g) $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x+1) \cdot (x^2 - 2)$ |
| d) $-x^2 + 3x - 2$ | h) $x^2 - 3$ |

Aufgabe 5: Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = (x+3)(x+2)(x+1)$ | h) $f(x) = \frac{1}{4}(x+3)(x+2)(x-2)(x-4)$ |
| b) $f(x) = (x+5)(x+3)(x-1)$ | i) $f(x) = \frac{1}{4}x \cdot (x-2)^3$ |
| c) $f(x) = (x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$ | j) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x + 3) \cdot (x-2)$ |
| d) $f(x) = (x+3)^2 \cdot (x+1)^2$ | k) $f_t(x) = \frac{1}{t}(x-t)^2$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^3$ | l) $f_t(x) = x^2(x-t)(x+t)$ |
| f) $f(x) = \frac{1}{2}(x-5)(x-1)(x+2)$ | m) $f_t(x) = (x-t)^2(x+2)$ |
| g) $f(x) = -\frac{1}{5}(x+5)(x^2+2)$ | n) $f_t(x) = (x-t)(x+t)(x+2)$ |

Aufgabe 6: Nullstellenbestimmung durch Substitution

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2+1)$ | e) $f(x) = (x^3-1)(x^3-8) = (x^2+x+1)(x-1)(x^2+2x+4)(x-2)$ |
| b) $f(x) = 3(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ | f) $f(x) = (x^3+1)(x^3-8) = (x-2)(x^3+1) \cdot (x^2+2x+4)$ |
| c) $f_t(x) = 4t(x+1) \cdot (x-1)(x^2+3)$ | g) $f(x) = (x-t+1)(x-t+2)$ |
| d) $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+2)$ | h) $f(x) = (x^2+2t-1)(x^2+2t-2)$ |
- $\Rightarrow S_{1/2}(\pm\sqrt{1-2t} \mid 0)$ für $t \neq \frac{1}{2}$ und $S_{3/4}(\pm\sqrt{2-2t} \mid 0)$ für $t \neq 1$

Aufgabe 7: gemeinsame Punkte

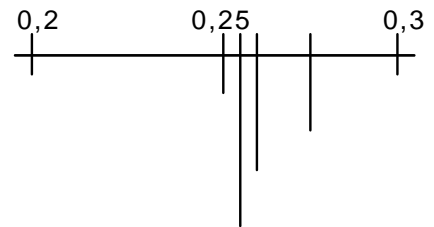
- a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x = x(x+2)^2$ und $g(x) = -(x-4)(x+2)$
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x+2)(x-1) \Rightarrow S_1(1|9), S_2(-2|0)$ und $S_3(-4|-16)$
- b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 16x = -x(x-8)(x+2)$ und $g(x) = x^3 + 4x + 16 = (x^2 - 2x + 8)(x+2)$
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = -2x^3 + 6x^2 + 12x - 16 = -2(x+2)(x-1)(x-4) \Rightarrow S_1(-2|0), S_2(1|21)$ und $S_3(4|96)$
- c) $f(x) = 2x^2 - 3 = 2(x - \sqrt{\frac{3}{2}})(x + \sqrt{\frac{3}{2}})$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(x^2 + 1)$
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-3) \Rightarrow S_1(-1|-1), S_2(2|5)$ und $S_3(3|15)$
- d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x = \frac{1}{3}x(x-3)^2$ und $g(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = \frac{1}{3}(x-3)^3 \Rightarrow S_1(3|0)$ (Berührpunkt)

Aufgabe 8: Nullstellenbestimmung mit dem Intervallhalbierungsverfahren

Intervall 2:

x_l	$m = \frac{x_l + x_r}{2}$	x_r	VZW in	
			$[x_l; m]$	$[m; x_r]$
0,2	0,25	0,3		x
0,25	0,275	0,3	x	
0,25	0,2625	0,275	x	
0,25	0,25625	0,2625	x	
0,25	0,253125	0,25625		x
0,253125	0,2546875	0,25625	x	
0,253125		0,254875		

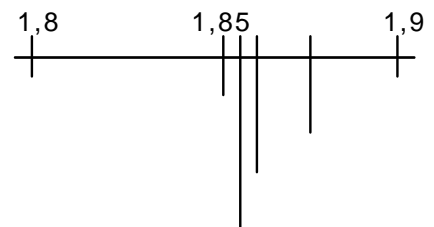
Ergebnis: $x_2 \approx 0,25$



Intervall 3:

x_l	$m = \frac{x_l + x_r}{2}$	x_r	VZW in	
			$[x_l; m]$	$[m; x_r]$
1,8	1,85	1,9		x
1,85	1,875	1,9	x	
1,85	1,8625	1,875	x	
1,85	1,85625	1,8625		x
1,85625	1,859375	1,8625		x
1,859375	1,8609375	1,8625	x	
1,859375		1,8609375		

Ergebnis: $x_3 \approx 1,86$



Aufgabe 11: Symmetrienachweis durch Verschiebung

- a) $f(x+1) = x^4 - 5x^2 + 4$ f) $f_t(x+t) = x^2$
 b) $f(x+1) + 1 = x^3 - 2x$ g) $f_t(x + \frac{1}{t}) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2t^2}$
 c) $f(x+1) - 1 = x^3$ h) $f_t(x-t) = x^4 - 6t^2x^2 + 5t^4$
 d) $f(x+2) - 2 = x^3$ i) $f_t(x+2t) + t = x^3$
 e) $f(x+4) - 4 = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ j) $f_t(x) - t = x^3 - t^2x$

Aufgabe 12: Bestimmung von Funktionsgleichungen

- a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
 b) $f(x) = 2 \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) = 2x^3 + 12x^2 + 22x + 12$
 c) $f(x) = a \cdot (x-5) \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot x = a \cdot (x-5) \cdot (x^3 - 4x) = ax^4 - 5ax^3 - 4ax^2 + 20ax$ mit $a \in \mathbb{R}$
 d) $f(x) = (x+1) \cdot x \cdot (x-1) = x^3 - x$
 e) $f(x) = -2x^3$
 f) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
 g) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 2$