

## 4.5. Prüfungsaufgaben zu Achsenschnittpunkten

### Aufgabe 1: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 3. Grades (8)

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 13x - 12$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 12$

c)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8$

d)  $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 50x - 50$

e)  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6$

### Lösungen

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 13x - 12 = \frac{1}{2}(x-4) \cdot (x-3) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|-12)$ ,  $S_{x_1}(2|0)$ ,  $S_{x_2}(3|0)$  und  $S_{x_3}(4|0)$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 12 = \frac{1}{2}(x-4) \cdot (x+3) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|12)$ ,  $S_{x_1}(2|0)$ ,  $S_{x_2}(-3|0)$  und  $S_{x_3}(4|0)$

c)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8 = \frac{1}{3}(x+4) \cdot (x-3) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|8)$ ,  $S_{x_1}(2|0)$ ,  $S_{x_2}(3|0)$  und  $S_{x_3}(-4|0)$

d)  $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 50x - 50 = 2 \cdot (x+1) \cdot (x-5) \cdot (x+5)$  mit  $S_y(0|-50)$ ,  $S_{x_{1/2}}(\pm 5|0)$  und  $S_{x_3}(-1|0)$

e)  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = -(x+1)(x+2)(x+3) \Rightarrow S_y(0|6)$ ,  $S_{x_1}(1|0)$ ,  $S_{x_2}(2|0)$  und  $S_{x_3}(3|0)$

### Aufgabe 2: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades (8)

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 - x - \frac{3}{2}$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

c)  $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8$

d)  $f(x) = 2(x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

e)  $f(x) = x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 10x^2$

### Lösungen

a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x-3) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)$  mit  $S_y(0|-\frac{3}{2})$ ,  $S_{x_1}(3|0)$  und  $S_{x_2}(-1|0)$

b)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = \frac{1}{2} \cdot (x^2+x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|2)$ ,  $S_{x_1}(1|0)$  und  $S_{x_2}(2|0)$

c)  $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8x + 8 = 2 \cdot (x^2+x+2) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|8)$ ,  $S_{x_1}(1|0)$  und  $S_{x_2}(2|0)$

d)  $f(x) = 2(x^2+2x-3) \cdot (x^2-3x+2) = 2(x+3)(x-1)(x-1)(x-2) \Rightarrow S_{x_1}(-3|0)$ ,  $S_{x_2}(1|0)$  (doppelt),  $S_{x_3}(2|0)$

e)  $f(x) = x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 10x^2 = x^2(x-1)(x-2)(x-5) \Rightarrow S_{x_1}(0|0)$  (doppelt),  $S_{x_1}(1|0)$ ,  $S_{x_2}(2|0)$ ,  $S_{x_3}(5|0)$

**Aufgabe 3: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades mit Symmetrie (8)**

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

- a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2$   
 b)  $f(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8$   
 c)  $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5x^2 + \frac{144}{5}$   
 d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$   
 e)  $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 4$

**Lösungen**

- a)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 2 = \frac{1}{2} \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|2)$ ,  $S_{x1/2}(\pm 1|0)$  und  $S_{x3/4}(\pm 2|0)$   
 b)  $f(x) = 2x^4 - 10x^2 + 8 = 2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$  mit  $S_y(0|8)$ ,  $S_{x1/2}(\pm 1|0)$  und  $S_{x3/4}(\pm 2|0)$   
 c)  $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 5x^2 + \frac{144}{5} = \frac{1}{5} (x-3) \cdot (x+3) \cdot (x-4) \cdot (x+4)$  mit  $S_y(0|\frac{144}{5})$ ,  $S_{x1/2}(\pm 3|0)$  und  $S_{x3/4}(\pm 4|0)$ .  
 d)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3 = \frac{1}{2} (x^2+3) \cdot (x-\sqrt{2}) \cdot (x+\sqrt{2})$  mit  $S_y(0|-3)$  und  $S_{x1/2}(\pm\sqrt{2}|0)$   
 e)  $f(x) = 2x^4 - 6x^2 + 4 = 2(x^2-2)(x^2-1) \Rightarrow S_{x1/2}(\pm 1|0)$  und  $S_{x3/4}(\pm\sqrt{2}|0)$

**Aufgabe 4: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades mit Symmetrie und Parametern (8)**

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

- a)  $f_t(x) = -2x^3 - 2t^2x$  für  $t \in \{1; 2; 3\}$   
 b)  $f_t(x) = 3x^3 - 6tx^2 + 3t^2x$  für  $t \in \{1; 2; 3\}$   
 c)  $f_t(x) = -2x^3 + 8t^2x$  für  $t \in \{1; 2; 3\}$

**Lösungen**

- a)  $f_t(x) = -2x^3 - 2t^2x = -2x(x^2 - t^2) = -2x(x-t)(x+t) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$ ,  $S_{x1/2t}(\pm t|0)$   
 b)  $f_t(x) = 3x^3 - 6tx^2 + 3t^2x = 3x(x-t)^2 \Rightarrow S_{x1}(0|0)$ ,  $S_{x1/2t}(t|0)$  (doppelt)  
 c)  $f_t(x) = -2x^3 + 8t^2x = -2x \cdot (x^2 - 4t^2) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$ ,  $S_{x2}(-4|0)$  und  $S_{x3/4t}(\pm 2t|0)$

**Aufgabe 5: Nullstellen ganzrationaler Funktionen 4. Grades mit Symmetrie und Parametern (8)**

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

- a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}t^2x^2 - x^2 + t^2$  für  $t \in \{1; 2; 3\}$   
 b)  $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{9}t^2x^2 - x^2 + t^2$  für  $t \in \{1; 2; 3\}$   
 c)  $f_t(x) = x^4 - t^2x^2$  für  $t \in \{1; 2; 3\}$

**Lösungen**

Untersuche die folgenden Funktionen auf Symmetrie und Achsenschnittpunkte. Formuliere ihre Gleichung in Produktform und skizziere ihre Schaubilder.

- a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}t^2x^2 - x^2 + t^2 = \frac{1}{4} (x-t) \cdot (x+t) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$  mit  $S_y(0|t^2)$ ,  $S_{x1/2}(\pm t|0)$  und  $S_{x3/4}(\pm 2|0)$ .  
 b)  $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{9}t^2x^2 - x^2 + t^2 = \frac{1}{9} \cdot (x-t) \cdot (x+t) \cdot (x-3) \cdot (x+3)$  mit  $S_y(0|t^2)$ ,  $S_{x1/2}(\pm t|0)$  und  $S_{x3/4}(\pm 3|0)$ .  
 c)  $f_t(x) = x^4 - t^2x^2 = x^2 \cdot (x+t) \cdot (x-t) \Rightarrow S_{x1}(0|0)$  (doppelt) und  $S_{x1/2t}(\pm t|0)$