

## 4.5. Ganzrationale Funktionen

### Definition

Eine Funktion der Gestalt  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  mit **reellen Koeffizienten**  $a_n, a_{n-1}, \dots$  und  $a_n \neq 0$  heißt **ganzrationale Funktion n-ten Grades in Normalform**. Ihr Schaubild ist eine **Parabel n-ter Ordnung**. Ganzrationale Funktionen 1. bzw. 2. Grades heißen auch **lineare** bzw. **quadratische Funktionen**.

### 4.5.1. Verlauf der Schaubilder für $x \rightarrow \pm \infty$

*Einführung: Beispiele zu ganzrationalen Funktionen: Betrachtung des Verlaufs für  $x \rightarrow \pm \infty$*

**Satz über den Verlauf der Schaubilder ganzrationaler Funktionen für  $x \rightarrow \pm \infty$**

Grad n ist	$a_n > 0$	$a_n < 0$
<b>gerade</b>	kommt von oben und geht nach oben	kommt von unten und geht nach unten
<b>ungerade</b>	kommt von unten und geht nach oben	kommt von oben und geht nach unten

**Beweis:**  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n x^n \cdot \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  strebt der Klammerausdruck gegen 1 und der Gesamtausdruck daher gegen  $a_n x^n \cdot 1 = a_n x^n$ .

*Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Aufgabe 1*

### 4.5.2. Vorzeichenwechsel und Gebietseinteilung

*Einführung: Beispiele zu ganzrationalen Funktionen: Betrachtung der Nullstellen*

#### Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:  $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$  oder  $b = 0$

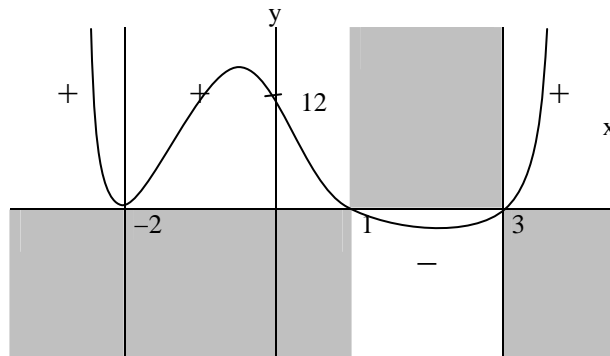
#### Nullstellen von Produktfunktionen

Das Produkt  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$  ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist. Jede Nullstelle der Faktoren  $g(x)$  und  $h(x)$  ist also auch eine Nullstelle der Produktfunktion  $f(x)$

*Beispiel: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen: Nr. 2 a)*

**Schaubildskizze von  $f(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$  mit Gebietseinteilung**

	-2	1	3	
(x + 2)	+	+	+	+
(x + 2)	+	+	+	+
(x - 1)	-	-	+	+
(x - 3)	-	-	-	+
$(x + 2)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$	+	+	-	+



**Vorzeichenwechsel bei Nullstellen**

$\left\{ \begin{array}{l} \text{einfache, dreifache, u.s.w.} \\ \text{zweifache, vierfache, u.s.w.} \end{array} \right\}$ Nullstellen bedeuten	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Schnittpunkte mit Vorzeichenwechsel} \\ \text{Berührungspunkte ohne Vorzeichenwechsel} \end{array} \right\}$
--	--

**Beispiel: Bestimmung einer Funktionsgleichung aus gegebenen Nullstellen und einem weiteren Punkt**

Bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion 3. Grades mit den Nullstellen  $-1, 3$  und  $5$ , die außerdem durch  $P(-2|4)$  geht.

**Lösung**

$y = f(x)$	Ansatz in Produktform mit Nullstellen $x_1, x_2, x_3$ und Formfaktor $a$
$y = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$	Nullstellen einsetzen
$y = a \cdot (x + 1)(x - 3)(x - 5)$	$P(-2 4)$ einsetzen
$4 = a \cdot (-2 + 1)(-2 - 3)(-2 - 5)$	ausmultiplizieren
$4 = a \cdot (-35)$	$:(-35)$
$-\frac{4}{35} = a$	einsetzen
$y = -\frac{4}{35}(x + 1)(x - 3)(x - 5)$	Gleichung in Produktform ausmultiplizieren
$y = -\frac{4}{35}[x^3 - 7x^2 + 7x + 8]$	weiter ausmultiplizieren
$y = -\frac{4}{35}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{32}{35}$	Gleichung in Normalform

$\Rightarrow$  Die Funktion hat die Gleichung  $y = -\frac{4}{35}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{32}{35}$

**4.5.3. Nullstellenbestimmung durch Zerlegung in Linearfaktoren mit Polynomdivision**

**Fundamentalsatz der Algebra**

- Jede ganzrationale Funktion lässt sich als Produkt linearer und quadratischer Funktionen darstellen:  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x + u_1)(x + u_2) \dots (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \dots$
- Durch Ausmultiplizieren sieht man, dass  $a_n \cdot u_1 \cdot u_2 \dots q_1 \cdot q_2 \dots = a_0$  sein muss. Insbesondere sind die Nullstellen  $x_1 = -u_1, x_2 = -u_2, \dots$  allesamt Teiler des y-Achsenabschnittes  $a_0$ .
- Gibt es  $k$  lineare Faktoren und  $l$  quadratische Faktoren, so ist  $k + 2l = n$ . Insbesondere kann eine ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades höchstens  $n$  Nullstellen besitzen

**Beweis**

Benötigt komplexe Zahlen als Hilfsmittel und kann hier nicht dargestellt werden.

**Beispiel:**

Bestimme die Nullstellen von  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ .

**1. Schritt**

**Erraten** einer ersten Nullstelle. Alle Nullstellen müssen Teiler des y-Achsenabschnittes  $a_0 = 4$  sein.  $\Rightarrow$  Kandidatenliste  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ . Einsetzen ergibt z.B.  $f(1) = 18 \neq 0$  und  $f(-1) = 0 \Rightarrow$  erste Nullstelle  $x_1 = -1$

**2. Schritt**

Abspalten eines **Linearfaktors**  $(x - x_1) = (x + 1)$  durch **Polynomdivision**. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muss sich  $f(x)$  als Produkt aus einem **Linearfaktor**  $(x - x_1) = (x + 1)$  und einem unbekanntem Restfaktor  $(x^2 + px + q)$  darstellen lassen:

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x + 1) \cdot (x^2 + px + q)$$

Um den Restfaktor zu bestimmen, teilt man beide Seiten durch den Linearfaktor

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x + 1} = x^2 + px + q$$

Man erhält den Restfaktor also durch **Polynomdivision** von  $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$  durch  $x + 1$ :

**Einführung:** schriftliche Division (= Polynomdivision für festes  $x = 10$ ):

$$\begin{array}{r}
 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0 \\
 1 \quad 5 \quad 8 \quad 4 \\
 -1 \quad 1 \\
 \hline
 4 \\
 -4 \quad 4 \\
 \hline
 4 \\
 -4 \quad 4 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 : \quad
 \begin{array}{r}
 10^1 \quad 10^0 \\
 1 \quad 1 \\
 = \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0 \\
 1 \quad 4 \quad 4
 \end{array}$$

**Ergebnis:**  $1584 = 11 \cdot 144$

**Übertragung:** Polynomdivision für beliebiges  $x$ :

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 5x^2 + 8x + 4) \\
 -(x^3 + x^2) \\
 \hline
 4x^2 + 4x \\
 -(4x^2 + 4x) \\
 \hline
 4x + 4 \\
 -(4x + 4) \\
 \hline
 0
 \end{array}
 : (x + 1) = x^2 + 4x + 4$$

**Ergebnis:**  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$   
 $= (x + 1) \cdot (x^2 + 4x + 4)$

**3. Schritt:**

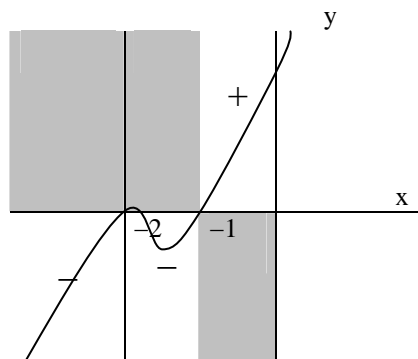
Bestimmung der Nullstellen des **Restfaktors** ( $x^2 + 4x + 4$ ) mit der p-q-Formel  $\Rightarrow x_{2/3} = -2$

**Ergebnis:**  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$   
 $= (x + 1) \cdot (x^2 + 4x + 4)$   
 $= (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2)$

$\Rightarrow$  Nullstellen:  $x_1 = -1$  (einfache NST mit VZW  $\Rightarrow$  **Schnittpunkt**)  
 $x_{2/3} = -2$  (doppelte NST ohne VZW  $\Rightarrow$  **Berührungspunkt**)

**Gebietseinteilung und Schaubildskizze:**

	-2	-1	2
$x + 2$	-	+	+
$x + 2$	-	+	+
$x + 1$	-	-	+
$(x + 2)^2 \cdot (x + 1)$	-	-	+



*Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Aufgaben 4 und 5*

**Bestimmung der ganzzahligen Nullstellen einer ganzrationalen Funktion**

1. Erraten einer Nullstelle  $x_1$ . ( $x_1$  muss ein Teiler des absoluten Gliedes  $a_0$  sein.)
2. Abspalten des Linearfaktors  $(x - x_1)$  durch Polynomdivision.

3. Untersuchung des Restfaktors gemäß 1. und 2. oder mit p-q-Formel

**Anzahl der Nullstellen einer ganzrationalen Funktion**

**Höchstzahl:**

Da eine ganzrationale Funktion n-ten Grades höchstens in n Linearfaktoren aufgespalten werden kann, können auch nur höchstens n Nullstellen vorliegen.

**Mindestzahl:**

0 für gerades n (das Schaubild kann vollständig oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse verlaufen)

1 für ungerades n (das Schaubild muss an mindestens einer Stelle die x-Achse passieren)

**4.5.4. Nullstellenbestimmung durch Substitution und p-q-Formel**

**Beispiel**

Bestimme die Nullstellen der Funktion  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

**Lösung**

$$\begin{aligned}
 x^4 - 5x^2 + 6 &= 0 && | \text{Substitution (Ersetzung) } u = x^2 \\
 u^2 - 5u + 6 &= 0 && | \text{p-q-Formel} \\
 \Rightarrow u_1 = 2 \text{ und } u_2 = 3 &&& | \text{Rücksubstitution} \\
 \Rightarrow x_1^2 = 2 \Rightarrow x_{1/3} = \pm\sqrt{2} \text{ und} \\
 x_2^2 = 3 \Rightarrow x_{2/4} = \pm\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 6 und 7

**4.5.5. Nullstellenbestimmung mit dem Intervallhalbierungsverfahren**

Beispiel: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 8 Bestimmung von  $x_1$

**1. Schritt (siehe auch 4.2.1.)**

Mittels einer Wertetabelle und einer groben Skizze werden die Intervalle bestimmt, in denen ein Vorzeichenwechsel stattfindet.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-20	1	4	1	-2	1	16

**2. Schritt**

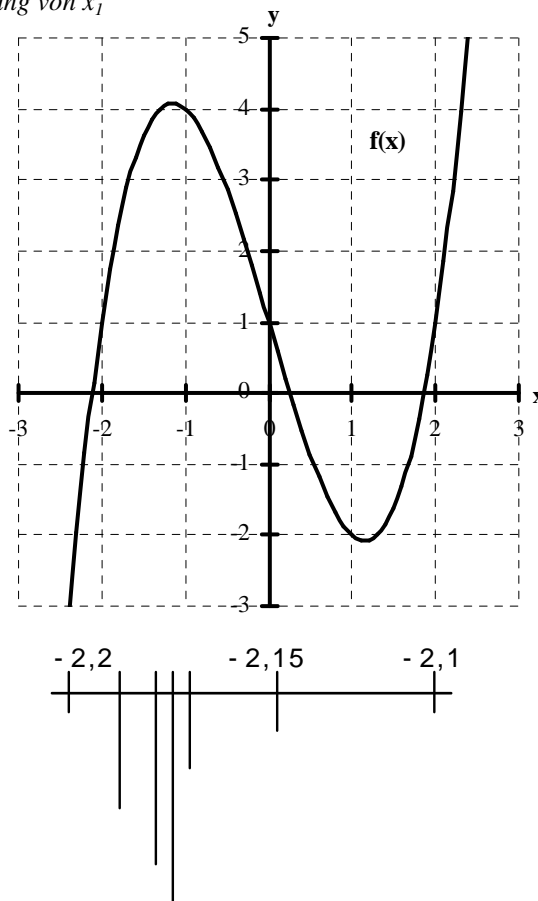
Die Intervalle werden fortlaufend halbiert, wobei das neue (halbierte) Intervall so gewählt wird, dass es den Vorzeichenwechsel enthält. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis sich die auf die zweite Nachkommastelle gerundeten beiden Intervallgrenzen nicht mehr unterscheiden.

**Intervall 1:**

$x_l$	$m = \frac{x_r + x_l}{2}$	$x_r$	VZW in	
			$[x_l; m]$	$[m; x_r]$
-2,2	-2,15	-2,1		<b>x</b>
-2,15	-2,125	-2,1		<b>x</b>
-2,125	-2,1125	-2,1	x	
-2,125	-2,11875	-2,1125	x	
-2,125	-2,12187	-2,11875		<b>x</b>
-2,12187		-2,11875		

Ergebnis:  $x_1 \approx -2,12$

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 8 Bestimmung von  $x_2$  und  $x_3$



## 4.5.6. Symmetrienachweis durch Verschiebung

Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung (siehe auch 4.4.1.)

### Satz über Symmetrie von Summen symmetrischer Funktionen

Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  gerade bzw. ungerade Funktionen, so ist auch ihre Summe  $h(x) = f(x) + g(x)$  gerade bzw. ungerade.

**Beweis:**

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x).$$

### Satz über Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Eine ganzrationale Funktion  $f$  ist  $\begin{pmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{pmatrix}$ , falls ihr Funktionsterm nur  $\begin{pmatrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{pmatrix}$  Exponenten enthält.

**Beweis:**

Ganzrationale Funktionen lassen sich als Summen von Potenzfunktionen betrachten. Potenzfunktionen mit geraden bzw. ungeraden Exponenten sind gerade bzw. ungerade.

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 9 - 10

Symmetrie zu verschobenen Punkten und Achsen (siehe auch 4.4.4.)

### Beispiel: Nachweis einer Punktsymmetrie durch Verschiebung

Zeige, dass das Schaubild von  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  symmetrisch zum Punkt  $P(1|2)$  ist

**Lösung:**

$y = f(x)$	ursprüngliche Funktion
$y = x^3 - 3x^2 + 4$	x durch $x + 1$ und y durch $y + 2$ ersetzen
$y + 2 = f(x + 1)$	einsetzen
$y = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4 - 2$	ausmultiplizieren mit binomischer Formel
$y = x^3 - 3x$	

Da die Gleichung nur noch ungerade Exponenten enthält, ist die verschobene Funktion  $y + 2 = f(x + 1)$  bzw.  $y = x^3 - 3x$  punktsymmetrisch zu  $O(0|0)$ . Die ursprüngliche Funktion  $y = f(x)$  bzw.  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  muss daher punktsymmetrisch zu  $P(1|2)$  sein.

### Beispiel: Nachweis einer Achsensymmetrie durch Verschiebung

Zeige, dass das Schaubild von  $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$  symmetrisch zur Senkrechten  $x = 1$  ist.

**Lösung:**

$y = f(x)$	ursprüngliche Funktion
$y = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$	x durch $x + 1$ ersetzen
$y = f(x + 1)$	einsetzen
$y = (x + 1)^4 - 4(x + 1)^3 + (x + 1)^2 + 6(x + 1) - 4$	ausmultiplizieren mit binomischer Formel
$y = x^4 - 5x^2$	

Da ihre Gleichung nur noch gerade Exponenten enthält, ist die verschobene Funktion  $y = f(x + 1)$  bzw.  $y = x^4 - 5x^2$  achsensymmetrisch zur y-Achse  $x = 0$ . Die ursprüngliche Funktion  $y = f(x)$  bzw.  $y = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 4$  muss daher achsensymmetrisch zur Senkrechten  $x = 1$  sein.

**Bemerkung:**

Die Verschiebung eines **achsensymmetrischen** Schaubildes in **vertikaler** Richtung hat keinen Einfluss auf die Symmetrie!

**Nachweis der Symmetrie bei verschobenen Funktionen (siehe 4.4.4.)**

1. Um zu zeigen, dass das Schaubild von  $f(x)$  symmetrisch zur Senkrechten  $x = x_0$  ist, verschiebt man das Schaubild um  $-x_0$  in  $x$ -Richtung, indem man  $x$  durch  $x + x_0$  ersetzt. Das Schaubild der verschobenen Funktion muss dann achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse  $x = 0$  sein.
2. Um zu zeigen, dass das Schaubild von  $f(x)$  symmetrisch zum Punkt  $P(x_0|y_0)$  ist, verschiebt man das Schaubild um  $-x_0$  in  $x$ -Richtung und  $-y_0$  in  $y$ -Richtung, indem man  $x$  durch  $x + x_0$  und  $y$  durch  $y + y_0$  ersetzt. Das Schaubild der verschobenen Funktion muss dann punktsymmetrisch zum Ursprung  $O(0|0)$  sein.

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 11

**4.5.7. Bestimmung von Funktionsgleichungen (siehe auch 4.2.10.)**

**Beispiel:**

bestimme die Gleichung der ganzrationalen Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur  $y$ -Achse ist und durch die Punkte  $P_1(1|1)$ ,  $P_2(2|-1)$  und  $P_3(3|3)$  geht.

**Lösung:**

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = ax^4 + bx^2 + c \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ansatz in Normalform als gerade Funktion 4. Grades} \\ P_1, P_2 \text{ und } P_3 \text{ einsetzen und LGS mit Diagonalverfahren lösen} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = -1 \\ 81a + 9b + c = 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot(-16) \\ + \\ \cdot(-81) \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ -12b - 15c = -17 \\ -72b - 80c = -78 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot(-6) \\ + \\ \cdot(-6) \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ -12b - 15c = -17 \\ -10c = 24 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 10 \\ + \\ \cdot(-1,5) \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 10a + 10b = 34 \\ -12b = -53 \\ -10c = 24 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdot 6 \\ + \\ \cdot 5 \\ + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} 60a = -61 \\ -12b = -53 \\ -10c = 24 \end{array} \right. \begin{array}{l} : 60 \\ : (-12) \\ : (-10) \end{array}$$

**Ergebnis:**  $f(x) = -\frac{61}{60}x^4 + \frac{53}{12}x^2 - \frac{12}{5}$ .

**Probe:** durch Einsetzen der Punkte

Übungen: Aufgaben zu ganzrationalen Funktionen Nr. 12