

4.6. Prüfungsaufgaben zu Symmetrie und Verschiebung

Aufgabe 1: Symmetrie und Verschiebung (8)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3}$.

- Skizziere ihr Schaubild in einem geeigneten Bereich. (2)
- Beschreibe ihr Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ und begründe rechnerisch. (2)
- Untersuche das Schaubild auf Symmetrie und belege deine Vermutung rechnerisch. (4)

Lösung

- Skizze (2)
- Waagrechte Asymptote $y = 1$, da $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x - 3}$ und $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x - 3} = 0$ (2)
- Das Schaubild von $y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} = \frac{(x - 3)^2 + 1}{(x - 3)} + 2$ ist punktsymmetrisch zu $S(3 | 2)$, weil das Schaubild der um $x_0 = -3$ und $y_0 = -2$ zurück verschobene Funktion $y + 2 = f(x + 3) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{x}$ ungerade bzw. symmetrisch zum Ursprung ist. (4)

Aufgabe 2: Symmetrie und Verschiebung (8)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x^2 - 4x + 5}$.

- Skizziere ihr Schaubild in einem geeigneten Bereich. (2)
- Beschreibe ihr Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ und begründe rechnerisch. (2)
- Untersuche das Schaubild auf Symmetrie und belege deine Vermutung rechnerisch. (4)

Lösung

- Skizze (2)
- Waagrechte Asymptote $y = 1$, da $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}\right) = 1 + 0 = 1$ (2)
- Das Schaubild von $y = f(x)$ ist punktsymmetrisch zu $S(2 | 1)$ (1)
Begründung: das Schaubild der zurück verschobene Funktion $y + 1 = f(x + 2) \Leftrightarrow y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ist ungerade bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung. (3)