

## 4.6. Rationale Funktionen

### Rationale Funktionen

Eine Funktion der Form  $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$  heißt **rationale Funktion**, wenn  $z(x)$  und  $n(x) \neq 0$  zwei ganzrationale Funktionen sind.

Der **maximale Definitionsbereich** ist  $\mathbb{R} \setminus \{x: n(x) = 0\}$ . Man unterscheidet **ganzrationale** Funktionen, deren **Nennergrad gleich Null** ist, **gebrochenrationale** Funktionen mit **Nennergrad größer als Null** und **echt gebrochenrationale** Funktionen, deren **Nennergrad größer als der Zählergrad** ist. Zur Erinnerung: Der **Grad** einer ganzrationalen Funktion ist ihr größter Exponent

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 1

### 4.6.1. Asymptoten und Grenzwerte

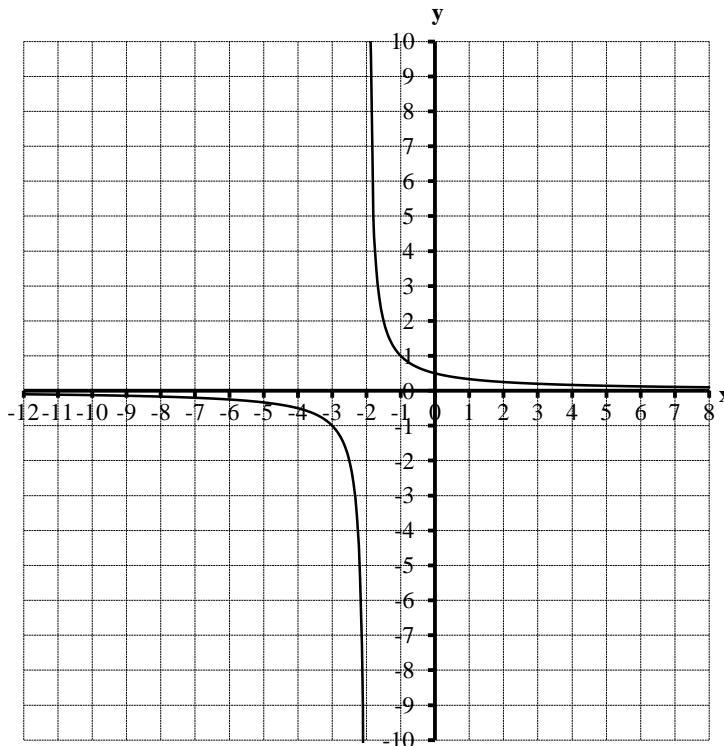
**Beispiel:**  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

**Maximaler Definitionsbereich:**  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$   
(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $S_y(0 \mid \frac{1}{2})$

( $x = 0$  einsetzen)

**Schnittpunkt mit der x-Achse:** -  
( $f(x) = 0$  hat keine Lösung)



**Verhalten für  $x \rightarrow -2$ :**

x	$y = \frac{1}{x+2}$
-1,9	-10
-1,99	-100
-1,999	-1000
↓	↓
-2	$\pm \infty$
↑	↑
-2,001	1000
-2,01	100
-2,1	10

Für  $x \rightarrow -2$  streben die y-Werte gegen  $\pm \infty$  und das Schaubild nähert sich einer senkrechten **Näherungsgerade (Asymptote)** mit der Gleichung  $x = -2$ :  $f(x) \rightarrow \pm \infty$  für  $x \rightarrow -2$ .

#### Asymptoten und Polstellen

Eine **Asymptote** ist eine **Näherungsgerade** im Schaubild einer Funktion  $f$ : Das Schaubild kommt ihr für betragsgroße  $x$  oder  $y$  beliebig nahe. Senkrechte Asymptoten nennt man auch **Polstellen**.

#### Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$

Eine Funktion  $f$  strebt für  $x \rightarrow \pm \infty$  gegen den **Grenzwert** (lat. Limes)  $a$ , wenn die Funktionswerte  $f(x)$  für gegen  $\pm \infty$  strebende  $x$  beliebig nahe an die Zahl  $a$  herankommen:  $f(x) \rightarrow a$  für  $x \rightarrow \pm \infty$  oder  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = a$ . Das Schaubild von  $f$  besitzt dann für  $x \rightarrow \pm \infty$  eine **waagrechte Asymptote**  $y = a$ .

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 2

**Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ :**

x	$y = \frac{1}{x+2}$
$-\infty$	0
↑	↑
-10000	-0,0001
-1000	-0,001
-100	-0,01
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001
↓	↓
$+\infty$	0

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  streben die y-Werte gegen 0 und das Schaubild nähert sich einer waagrechten **Näherungsgerade (Asymptote)** mit der Gleichung  $y = 0$ :  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm \infty$  oder  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ .

## 4.6.2. Nullstellen im Nenner

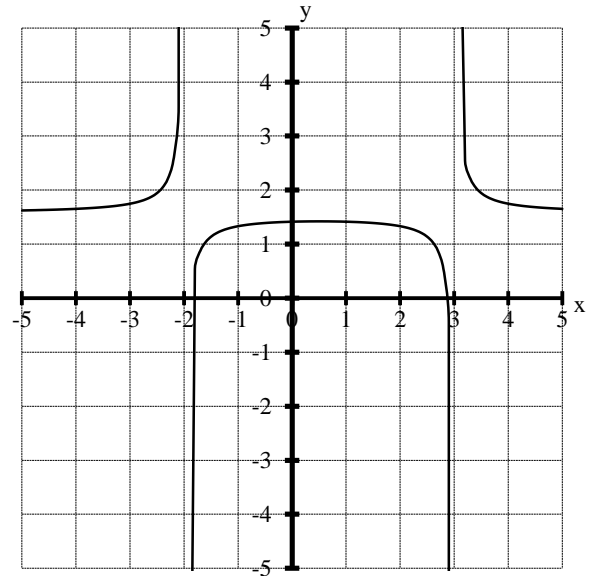
**Beispiel:**  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{(x+2) \cdot (x-3)}$

**Definitionsbereich:**  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$   
(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $N_y(0 | -\frac{1}{6})$

(x = 0 einsetzen)

**Schnittpunkt mit der x-Achse:** -  
(f(x) = 0 ergibt keine Lösung)



**Verhalten in der Nähe von x = -2:**

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} \rightarrow \pm\infty \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \pm\infty \text{ für } x \rightarrow -2$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \rightarrow -\frac{1}{5} \text{ für } x \rightarrow -2 \\ \downarrow \\ \rightarrow \pm\infty \text{ für } x \rightarrow -2 \end{array}$$

⇒ senkrechte Asymptote an der Nennernullstelle  $x = -2$

**Verhalten in der Nähe von x = 3:**

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} \rightarrow \frac{1}{5} \cdot \pm\infty = \pm\infty \text{ für } x \rightarrow 3$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \rightarrow \pm\infty \text{ für } x \rightarrow 3 \\ \downarrow \\ \rightarrow \frac{1}{5} \text{ für } x \rightarrow 3 \end{array}$$

⇒ senkrechte Asymptote an der Nennernullstelle  $x = 3$

**Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ :**

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} \rightarrow 0 \cdot 0 = 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty$$

⇒ waagrechte Asymptote  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

### Senkrechte Asymptoten

n-fache NST **nur** im Nenner ⇒ **senkrechte Asymptote**  $\left\{ \begin{array}{l} \text{mit VZW, falls n ungerade} \\ \text{ohne VZW, falls n gerade} \end{array} \right\}$ .

(Vorsicht: NST im Nenner **und** im Zähler erzeugen stattdessen hebbare Lücken, s.u.)

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 3

## 4.6.3. Nullstellen im Zähler

**Beispiel**  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6} = \frac{x-1}{(x+2) \cdot (x-3)}$

**Definitionsbereich**  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$   
(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $N_y(0 | \frac{1}{6})$

(x = 0 einsetzen)

**Schnittpunkt mit der x-Achse:**  $N_x(1 | 0)$

(f(x) = 0 setzen und nach x auflösen)

**Senkrechte Asymptoten:**  $x = 3$  und  $x = -2$

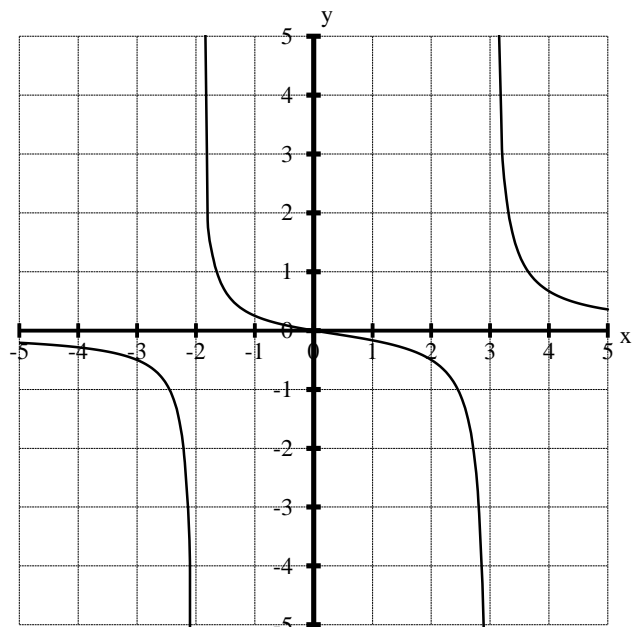
(NST nur im Nenner)

**Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ :**

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-3} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty \\ \downarrow \\ \rightarrow 1 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty \end{array}$$

⇒ waagrechte Asymptote  $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$



### Nullstellen rationaler Funktionen

n-fache NST **nur** im Zähler  $\Rightarrow$  NST der Gesamtfunktion  $\left\{ \begin{array}{l} \text{mit VZW, falls n ungerade} \\ \text{ohne VZW, falls n gerade} \end{array} \right\}$ .

(Vorsicht: NST im Nenner **und** im Zähler erzeugen stattdessen hebbare Lücken, s.u.)

### Verhalten echt gebrochenrationaler Funktionen für $x \rightarrow \pm \infty$

Wenn der **Nennergrad größer ist als der Zählergrad**, wächst für  $x \rightarrow \pm \infty$  der **Nenner schneller als der Zähler** und die Gesamtfunktion strebt gegen 0:  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm \infty$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ : Die x-Achse  $y = 0$  ist waagrechte Asymptote.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 4

### 4.6.4. Nullstellen im Zähler und im Nenner

**Beispiel:**  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6} = \frac{x+2}{(x+2)(x-3)}$

**Definitionsbereich**  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$   
(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $N_y(0 | -\frac{1}{3})$

(x = 0 einsetzen)

**Schnittpunkt mit der x-Achse -**

(f(x) = 0 nach x auflösen):

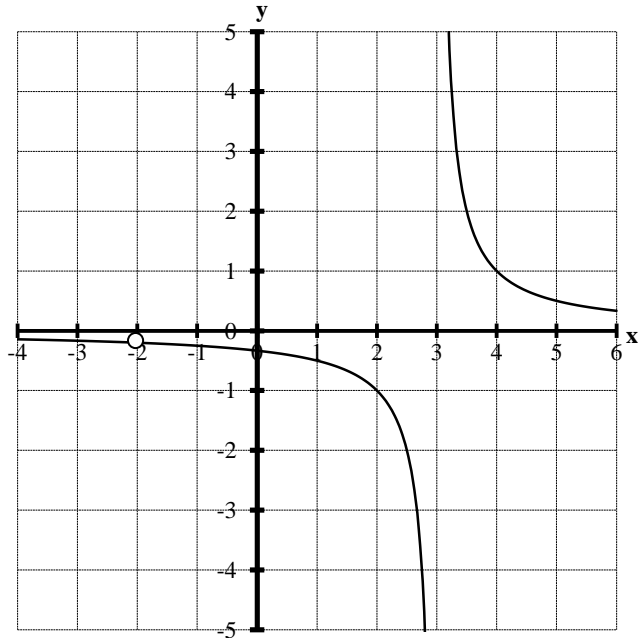
$$\frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = 0 \quad | \cdot (x+2) \cdot (x-3) \text{ für } x \neq -2 \text{ oder } 3$$

$$x+2 = 0 \quad | -2$$

$$x = -2, \text{ aber andererseits } x \neq -2$$

$\Rightarrow$  **keine Nullstelle, da f an der Zählernullstelle nicht definiert ist!**

**Senkrechte Asymptote:**  $x = 3$   
(NST nur im Nenner)



**Hebbare Lücke:**  $L(-2 | -\frac{1}{5})$

(NST im Zähler und im Nenner):

$x = 2$  ist gleichzeitig Nullstelle des Zählers und des Nenners. Der **Linearfaktor**  $(x + 2)$  erscheint daher sowohl im Zähler als auch im Nenner und kann für  $x \neq -2$  gekürzt werden:  $\frac{x+2}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$ , falls  $x \neq -2$ . Bis auf die Stelle  $x = -2$  stimmt

das Schaubild von  $f$  vollständig mit dem Schaubild der **stetigen Fortsetzung**  $\bar{f}(x) = \frac{1}{x-3}$  überein. An der Stelle  $x = -2$  hat

das Schaubild von  $f$  eine **Lücke**, die durch die stetige Fortsetzung **behoben** wird.  $x = -2$  heißt daher **hebbare Lücke**.  $f$  ist an dieser Stelle **unstetig**, da sie den gleichen Punkt anstrebt wie  $\bar{f}$ , diesen aber im Gegensatz zu  $\bar{f}$  nie erreicht:  $f(-2)$  existiert

nicht, aber  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \bar{f}(x) = \bar{f}(-2) = -\frac{1}{5}$ . Den **y-Wert** der hebbaren Lücke  $L(-2 | -\frac{1}{5})$  erhält man also durch **Einsetzen**

**in die stetige Fortsetzung.**

### Zählernullstellen und Nennernullstellen bei rationalen Funktionen

n-fache NST **nur im Zähler**  $\Rightarrow$  NST der Gesamtfunktion

n-fache NST **nur im Nenner**  $\Rightarrow$  **Polstelle** bzw. senkrechte Asymptote  $\left. \vphantom{\frac{x+2}{(x+2)(x-3)}} \right\}$  jeweils  $\left\{ \begin{array}{l} \text{mit VZW, falls n ungerade} \\ \text{ohne VZW, falls n gerade} \end{array} \right\}$

NST im Zähler und im Nenner  $\Rightarrow$  **hebbare Lücke**

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 5

## 4.6.5. Polynomdivision mit Rest

### Beispiel mit festem $x = 10$ (schriftliche Division mit Rest)

$$1355 : 112 = 12 + \frac{11}{112}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ 235 \\ \underline{224} \\ 11 \text{ (Rest)} \end{array}$$

**Probe:**  $(12 + \frac{11}{112}) \cdot 112 = 1344 + 11 = 1355$

**Ergebnis:**  $\frac{1355}{112} = 12 \frac{11}{112}$

**Merke:** Jeder Bruch lässt sich aufspalten in eine ganze Zahl und einen echten Bruch  $< 1$ .

### Beispiel mit beliebigem $x \in \mathbb{R}$ (Polynomdivision mit Rest)

$$(x^3 + 3x^2 + 5x + 5) : (x^2 + x + 2) = \underbrace{x + 2}_{\text{ganzrationaler Hauptteil } h(x)} + \underbrace{\frac{x+1}{x^2+x+2}}_{\text{echt gebrochenrationaler Rest } r(x)}$$

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 + 2x) \\ \underline{2x^2 + 3x + 5} \\ -(2x^2 + 2x + 4) \\ \hline x + 1 \text{ (Rest)} \end{array}$$

**Probe:**  $(x + 2 + \frac{x+1}{x^2+x+2}) \cdot (x^2+x+2) = x^3 + 3x^2 + 5x + 5$

**Ergebnis:**  $\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{x^2 + x + 2} = x + 2 + \frac{x+1}{x^2+x+2}$

**Merke:** Jede gebrochenrationale Funktion  $f(x)$  lässt sich durch Polynomdivision in einen ganzrationalen **Hauptteil  $h(x)$**  und einen echt gebrochenrationalen **Rest  $r(x)$**  aufspalten.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 6

## 4.6.6. Waagrechte Asymptoten

**Beispiel  $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$**

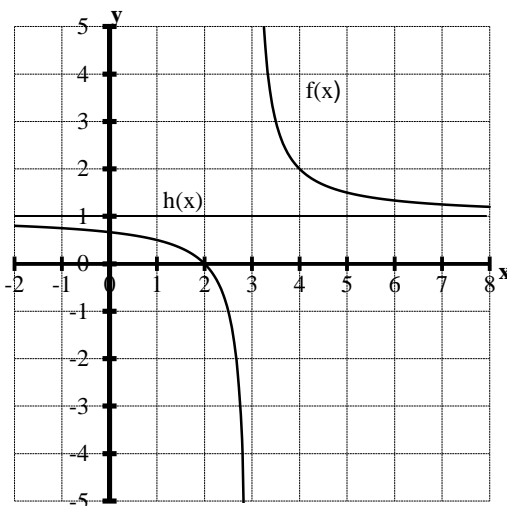
**Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$**   
(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $N_y(0 | \frac{1}{3})$

( $x = 0$  einsetzen)

**Schnittpunkt mit der x-Achse:**  $N_x(1 | 0)$   
(NST nur im Zähler)

**senkrechte Asymptote** bei  $x = 3$   
(NST nur im Nenner)



**Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ :**

$$f(x) = \frac{x-1}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3} \rightarrow 1 + 0 = 1 \text{ für } x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 1$$

$\downarrow$   
 $\rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \pm \infty$ :

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  strebt der **echt gebrochenrationale Rest  $r(x)$**  gegen Null:  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - h(x)] = 0$ . Der Verlauf des Schaubildes wird dann nur noch durch den **ganzrationalen Hauptteil  $h(x)$**  bestimmt. Für  $x \rightarrow \pm \infty$  ist der ganzrationale Hauptteil  $h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 1$  eine **waagrechte Asymptote**.

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 7

#### 4.6.7. Schiefe Asymptoten

##### Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3} = \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{x-3} = \underbrace{x+4}_{\substack{\text{Hauptteil} \\ h(x)}} + \underbrace{\frac{10}{x-3}}_{\substack{\text{Rest} \\ r(x)}}$$

(p-q-Formel bzw. Polynomdivision mit Rest)

**Definitionsbereich:**  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $N_y(0 | \frac{2}{3})$

(x = 0 einsetzen)

**Schnittpunkte mit der x-Achse:**  $N_{x1}(-2|0), N_{x2}(1|0)$

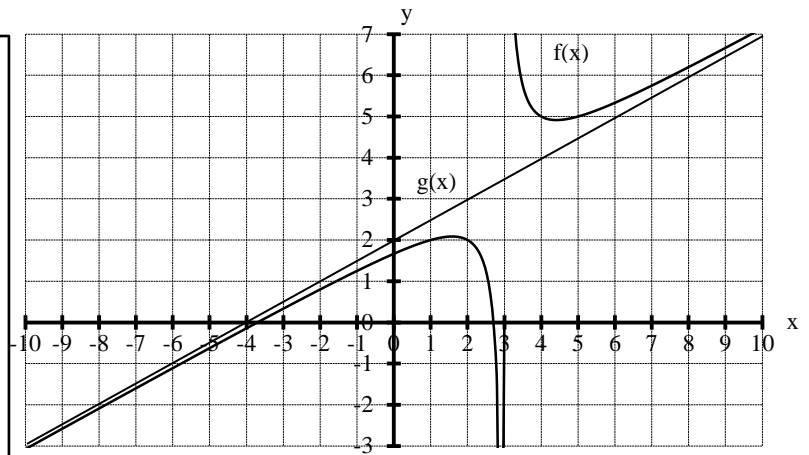
(NST nur im Zähler)

**senkrechte Asymptote:**  $x = 3$

(NST nur im Nenner)

**Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ :**

Für  $x \rightarrow \pm \infty$  strebt der echt gebrochenrationale Rest gegen Null:  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - h(x)] = 0$ . Das Schaubild wird dann nur noch durch den Hauptteil bestimmt. Der ganzrationale Hauptteil  $h(x) = x + 4$  ist für  $x \rightarrow \pm \infty$  eine **schiefe Asymptote**.



Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 8

#### 4.6.8. Näherungskurven

$$\begin{aligned} \text{Beispiel } f(x) &= \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x - 6} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-1)}{x-3} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{x^2 + x + 1}_{\substack{\text{Hauptteil} \\ h(x)}} + \underbrace{\frac{5}{x-3}}_{\substack{\text{Rest} \\ r(x)}} \end{aligned}$$

**Definitionsbereich:**  $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(NST im Nenner)

**Schnittpunkt mit der y-Achse:**  $N_y(0 | -\frac{2}{3})$

(x = 0 einsetzen)

**Schnittpunkte mit der x-Achse:**  $N_{x1}(-2|0), N_{x2}(1|0)$  und  $N_{x3}(2|0)$

(NST nur im Zähler)

**senkrechte Asymptote:**  $x = 3$

(NST nur im Nenner)

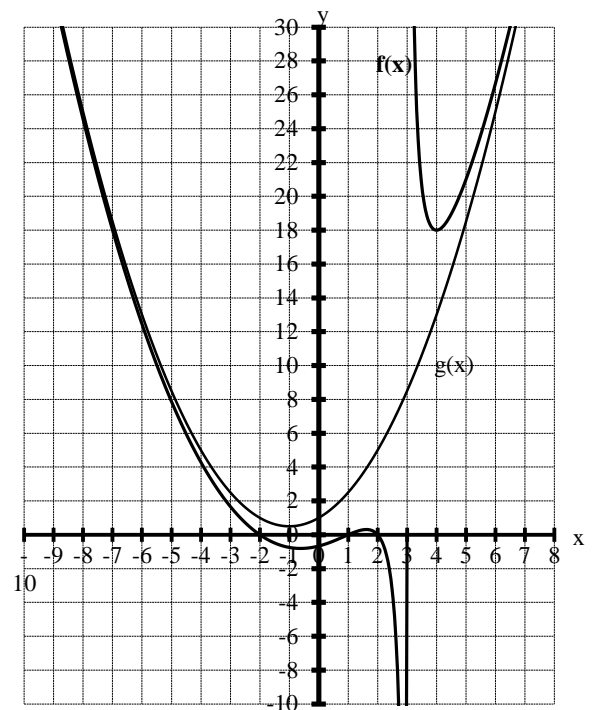
**Verhalten für  $x \rightarrow \pm \infty$ :**

Der echt gebrochenrationale Rest strebt für  $x \rightarrow \pm \infty$  gegen Null:  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - h(x)] = 0$ . Das Schaubild wird dann

nur noch durch den Hauptteil bestimmt. Der Hauptteil  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$  ist für  $x \rightarrow \pm \infty$  eine **Näherungskurve**. Mit

**quadratischer Ergänzung** erhält man  $h(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$ , d.h. die Näherungskurve ist eine nach oben geöffnete **Parabel**

mit Formfaktor  $a = \frac{1}{2}$  und Scheitelpunkt  $S(-1 | \frac{1}{2})$ .



### Aufspaltung rationalen Funktionen in ganzrationalen Hauptteil und echt gebrochenrationalen Rest

Jede rationale Funktion lässt sich mit Hilfe einer **Polynomdivision** als Summe aus einem **ganzrationalen Hauptteil**  $h(x)$  und einem **echt gebrochenrationalen Rest**  $r(x)$  schreiben:  $f(x) = h(x) + r(x)$ . Da der Rest  $r(x)$  für  $x \rightarrow \pm \infty$  gegen Null strebt, bildet der Hauptteil  $y = h(x)$  eine **Näherungskurve** von  $f$ :  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - h(x)] = 0$ .

### Grad der Näherungskurve

Sei  $f(x) = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$  eine rationale Funktion mit Zählergrad  $n$  und Nennergrad  $m$ . Dann gilt für

$n < m$ : **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung  $h(x) = 0$

$n = m$ : **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung  $h(x) = \frac{a_m}{b_n}$

$n > m$ : **ganzrationale Näherungskurve**  $h(x)$  vom Grad  $n - m$

Übungen: Aufgaben zu rationalen Nr. 9 und 10

## 4.6.9. Bestimmung von Funktionsgleichungen

### Beispiel: Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ ist nicht vorgegeben

Gib die Gleichung einer rationalen Funktion an, deren Schaubild bei  $x = -4$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, bei  $x = 5$  eine hebbare Lücke und bei  $x = 1$  eine senkrechte Asymptote ohne Vorzeichenwechsel besitzt.

### Lösung: Ansatz in Produktform

NST mit VZW bei  $x = -4 \Rightarrow$  Faktor  $(x + 4)$  im Zähler

hebbare Lücke bei  $x = 5 \Rightarrow$  Faktor  $(x - 5)$  im Zähler und im Nenner

senkrechte Asymptote ohne VZW bei  $x = 1 \Rightarrow$  Faktor  $(x - 1)^2$  im Nenner

$$\Rightarrow \text{Z.B. } f(x) = \frac{(x+4)(x-5)}{(x-5)(x-1)^2} = \frac{x^2 - x - 20}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}$$

### Beispiel: Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ ist vorgegeben

Gib die Gleichung einer rationalen Funktion an, deren Schaubild eine Näherungskurve mit der Gleichung  $y = -x^2 + 2$ , bei  $x = -6$  eine senkrechte Asymptote mit Vorzeichenwechsel und bei  $x = 5$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.

### Lösung: Ansatz als ganzrationaler Hauptteil mit echt gebrochenrationalem Rest

Näherungskurve  $y = -x^2 + 2 \Rightarrow$  ganzrationaler Hauptteil  $-x^2 + 2$

Senkrechte Asymptote mit VZW bei  $x = -6 \Rightarrow$  echt gebrochenrationaler Rest  $\frac{a}{x+6}$  mit  $a \neq 0$

Nullstelle mit VZW bei  $x = 5 \Rightarrow f(5) = 0$

$$\Rightarrow \text{Ansatz } f(x) = -x^2 + 2 + \frac{a}{x+6} \text{ mit } f(5) = 0 \Leftrightarrow -25 + 2 + \frac{a}{11} = 0 \Leftrightarrow a = 253$$

$$\Rightarrow \text{Z.B. } f(x) = -x^2 + 2 + \frac{253}{x+6} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 2x + 265}{x+6}$$

Übungen: Aufgaben zu rationalen Funktionen Nr. 11