

4.7. Aufgaben zum beschränkten Wachstum

Aufgabe 1: Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum beim radioaktiven Zerfall

Radon-222 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,6 Tagen in das sehr viel stabilere Isotop Polonium-218 ($t_{1/2} = 3$ Mio Jahre).

- Gib die tägliche Zerfallsrate p in % an.
- Wie viele Polonium-Atome sind nach 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 und 30 Tagen aus ursprünglich 1000 Radon-Atomen gebildet worden?
- Stelle ein Formel auf, mit der sich die Zahl $B(t)$ der nach t Tagen gebildeten Polonium-Atome berechnen lässt.
- Beschreibe das Verhalten von $B(t)$ für $t \rightarrow \infty$ und gib die **Sättigungsgrenze** S an.
- Zeige, dass der Zuwachs $B(t + 1) - B(t)$ proportional zum **Sättigungsmanko** $S - B(t)$ ist und berechne die Wachstumskonstante k : $B(t + 1) - B(t) = k \cdot [S - B(t)]$.

Aufgabe 2: Beschränktes Wachstum bei einer chemischen Reaktion

Ester sind weit verbreitete Aromastoffe, die sich aus je einem Molekül Alkohol und Säure unter Austritt eines Wassermoleküls bilden: $\text{Alkohol} + \text{Säure} \rightarrow \text{Ester} + \text{Wasser}$. Leider läuft die Reaktion nicht vollständig ab, d.h., es bleibt immer ein Rest an Alkohol und Säure übrig.

Bei der Reaktion von 1000 Alkoholmolekülen mit 1000 Säuremolekülen wurde die Zahl $B(t)$ der gebildeten Estermoleküle über die Zeit t in Minuten in die folgende Tabelle eingetragen:

t in Min	1	2	3	4	5	10	15
B(t)	130	226	296	349	388	475	494

- Trage die gegebenen Werte in ein Schaubild ein und bestimme die Sättigungsgrenze S .
- Berechne die Wachstumskonstante k aus den Tabellenwerten für $t = 1$ und 2 Minuten unter der Annahme eines beschränkten Wachstums.
- Berechne $B(10)$ und $B(15)$ mit der Formel für beschränktes Wachstum und vergleiche mit den Tabellenwerten. Warum ergeben sich Abweichungen?

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum bei Baumschäden

In einem Bestand von ursprünglich 10 000 Bäumen werden jedes Jahr 8 % der noch nicht geschädigten Bäume durch den Borkenkäfer befallen.

- Berechne die Zahl $B(t)$ der befallenen Bäume nach $t = 1, 2, 3, 4, 5, 10$, und 20 Jahren
- Nach wie vielen Jahren wären 90 % aller Bäume befallen?
- Zeige, dass die Zahl der kranken Bäume dem Gesetz des beschränkten Wachstums folgt und gib die Sättigungsgrenze S sowie die Änderungsrate p in % an.

Aufgabe 4: Berechnung von S und p bei beschränktem Wachstum einer Pilzkultur

Eine Petrischale mit einer Gesamtfläche von 40 cm^2 ist zur Zeit $t = 0$ bereits zur Hälfte mit einer Pilzkultur bedeckt. Für das weitere Wachstum wurde experimentell die Formel $B(t + 1) = 0,75 \cdot B(t) + 10$ ermittelt. Dabei ist $B(t)$ die nach t Tagen bedeckte Fläche in cm^2 .

- Berechne $B(t)$ für $t = 1, 2, 3, 4$ und 5 Tage.
- Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze S sowie den Änderungsfaktor k an. Bringe dazu die ermittelte Gleichung auf die Form $B(t + 1) - B(t) = k \cdot [S - B(t)]$

Aufgabe 5: Berechnung von S und p bei beschränkter Abnahme einer Bevölkerung

In einem Land mit 80 Millionen Einwohnern kommen jährlich auf 1000 Einwohner 8 Geburten und 11 Todesfälle im Jahr. Die Statistik gibt ferner an, dass im Durchschnitt jährlich 50 000 Personen auswandern und 200 000 Personen einwandern.

- Berechne die Einwohnerzahl $Z(t)$ nach $t = 1, 2$, und 3 Jahren
- Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze S sowie den Änderungsfaktor k an.
- Berechne die Einwohnerzahl $Z(t)$ nach $t = 10, 20$ und 50 Jahren

Aufgabe 6: Berechnung von S und p bei Tropfinfusion

Einem Patienten werden 5 mg eines Medikamentes pro Minute per Tropfinfusion ins Blut geleitet. Von der im Blut vorhandenen Menge werden jede Minute 4 % über die Nieren wieder ausgeschieden.

- Berechne den Gehalt $B(t)$ des Medikamentes im Blut für $t = 1, 2, 3$ und 4 Minuten.
- Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und gib die Sättigungsgrenze S sowie den Änderungsfaktor k an.

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum bei Marktsättigung

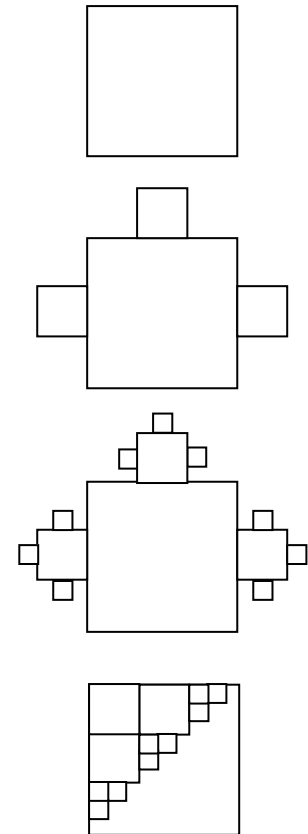
In einem Land werden pro Jahr 100 000 Rasierer verkauft. Eine koreanische Firma bringt nach einer dreimonatigen massiven Werbeaktion ein neues Modell unter einem "coolen" finnischem Label auf den Markt

- Was spricht für die Annahme, dass die Zahl $Z(t)$ der verkauften Artikel nach t Monaten nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums zunehmen wird?
- Im ersten Monat werden 20 000 Stück verkauft. Berechne die prozentuale Änderung p in % und gib die Sättigungsgrenze S an.
- Ist es aufgrund dieser Erfahrung realistisch anzunehmen, dass sich im ersten Halbjahr 50 000 Artikel verkaufen lassen?

Aufgabe 8: Lineares und beschränktes Wachstum im Vergleich

Aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 dm gehen auf die rechts angedeutete Weise neue Figuren hervor. Die im t -ten Schritt angefügten Quadrate sind jeweils nur ein Drittel so breit wie die im $(t - 1)$ -ten Schritt angefügten Quadrate.

- Berechne den Umfang $U(t)$ nach $n = 0, 1, 2, 3$ und 4 Schritten.
- Wie groß ist der Zuwachs $U(t + 1) - U(t)$ des Umfangs im $(t + 1)$ -ten Schritt? Um welche Wachstumsart handelt es sich?
- Stelle eine Formel auf, mit der sich $U(t)$ direkt aus t berechnen lässt.
- Berechne den Flächeninhalt $A(t)$ der Figur nach $t = 1, 2, 3$ und 4 Schritten.
- Bestimme die Sättigungsgrenze S und begründe anhand der untersten Figur, warum $A(t)$ beschränkt wächst.
- Wie groß ist der Zuwachs $A(t + 1) - A(t)$ des Umfangs im $(t + 1)$ -ten Schritt?
- Stelle eine Formel auf, mit der sich $A(t)$ direkt aus t berechnen lässt.
- Berechne $A(100)$ und $U(100)$ und vergleiche. Welche Aussage lässt sich aus diesem Beispiel über den Umfang und die Fläche natürlicher Gebilde wie z. B. des Landes Baden-Württemberg ableiten?



4.7. Lösungen zu den Aufgaben zum beschränkten Wachstum

Aufgabe 1: Exponentielle Abnahme und beschränktes Wachstum beim radioaktiven Zerfall

- a) Die Zahl $M(t)$ der Radon-Atome schrumpft exponentiell: $M(t) = M(0) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$ mit $M(0) = 1000$ und

$$M(3,6) = 500 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{p}{100}\right) = \sqrt[3,6]{\frac{500}{1000}} = 0,825 \Leftrightarrow M(t) = 1000 \cdot 0,825^t \text{ mit } p = 17,5 \Leftrightarrow M(t) \text{ nimmt jeden Tag um } 17,5 \% \text{ ab.}$$

- b) $B(t) = 1000 - M(t) \Leftrightarrow B(0) = 0; B(1) = 175; B(2) = 319; B(3) = 438; B(4) = 537; B(5) = 618; B(10) = 854; B(20) = 979; B(50) = 997$
c) $B(t) = 1000 \cdot (1 - 0,825^t)$
d) Für $t \rightarrow \infty$ strebt $B(t)$ gegen $S = 1000$
e) $B(t+1) - B(t) = M(t) - M(t+1) = 0,175 \cdot M(t) = 0,175 \cdot [1000 - B(t)] \Leftrightarrow k = 0,175$

Aufgabe 2: Beschränktes Wachstum bei einer chemischen Reaktion

- a) Aus dem Schaubild ergibt sich die Vermutung $S = 500$
b) $B(2) - B(1) = k \cdot [S - B(1)] \Leftrightarrow 226 - 130 = k \cdot [500 - 130] \Leftrightarrow k = \frac{96}{370} \approx 0,26$
c) $B(t) = 500 \cdot (1 - 0,74^t) \Leftrightarrow B(10) \approx 475$ und $B(15) \approx 494 \Leftrightarrow$ keine Abweichung, obwohl k ein Näherungswert ist!

Aufgabe 3: Beschränktes Wachstum bei Baumschäden

- a) Die Zahl der nach t Jahren noch nicht geschädigten Bäume ist $M(t) = 10\,000 \cdot 0,8^t$. Die Zahl der nach t Jahren befallenen Bäume ist $B(t) = 10\,000 - M(t) = 10\,000(1 - 0,8^t) \Leftrightarrow B(0) = 0; B(1) = 2000; B(2) = 3600; B(3) = 4880; B(4) = 5904; B(5) = 6723; B(10) = 8926$ und $B(20) = 9885$.
b) $M(t) = 0,1 \cdot M(0) \Rightarrow 10\,000 \cdot 0,8^t = 0,1 \cdot 10\,000 \Rightarrow t = \frac{\log 0,1}{\log 0,8} \approx 10,3$ Jahre
c) $B(t+1) - B(t) = M(t) - M(t+1) = 0,2 \cdot M(t) = 0,2 \cdot [10\,000 - B(t)] \Leftrightarrow k = 0,2$

Aufgabe 4: Berechnung von S und p bei beschränktem Wachstum einer Pilzkultur

- a) $B(0) = 20 \text{ cm}^2, B(1) = 25 \text{ cm}^2, B(2) = 28,8 \text{ cm}^2, B(3) = 31,6 \text{ cm}^2, B(4) = 33,7 \text{ cm}^2$ und $B(5) = 35,3 \text{ cm}^2$.
b) $B(t+1) - B(t) = -0,25 B(t) + 10 = 0,25[40 - B(t)] \Leftrightarrow S = 40$ und $k = 0,25 \Leftrightarrow B(t) = 40 - 20 \cdot 0,75^t$

Aufgabe 5: Berechnung von S und p bei beschränkter Schrumpfung einer Bevölkerung

- a) $Z(t+1) = 150\,000 + 0,997 \cdot Z(t) \Leftrightarrow Z(0) = 80 \text{ Mio}; Z(1) = 79,91 \text{ Mio}; Z(2) = 79,82 \text{ Mio}; Z(3) = 79,7 \text{ Mio}$.
b) $Z(t+1) - Z(t) = 150\,000 - 0,003 \cdot Z(t) = 0,003 \cdot [50 \text{ Mio} - Z(t)] \Leftrightarrow S = 50 \text{ Mio}$ und $k = 0,003$
c) $Z(t) = 50 \text{ Mio} + 0,997^t \cdot 30 \text{ Mio} \Leftrightarrow Z(10) = 79,1 \text{ Mio}, Z(20) = 78,25 \text{ Mio}$ und $Z(50) = 75,8 \text{ Mio}$

Aufgabe 6: Berechnung von S und p bei Tropfinfusion

- a) $B(t+1) = 5 \text{ mg} + 0,96 B(t) \Leftrightarrow B(0) = 5 \text{ mg}; B(1) = 9,8 \text{ mg}; B(2) = 14,41 \text{ mg}; B(3) = 18,83 \text{ mg}$ und $B(4) = 23,08 \text{ mg}$.
b) $B(t+1) - B(t) = 5 \text{ mg} - 0,04 \cdot B(t) = 0,04 \cdot [125 \text{ mg} - B(t)] \Leftrightarrow S = 125 \text{ mg}$ und $k = 0,04$

Aufgabe 7: Beschränktes Wachstum bei Marktsättigung

- a) Die Zahl im $t+1$ ten Monat neu verkauften Geräte $B(t+1) - B(t)$ ist vermutlich proportional zur Zahl der potentiellen Kunden $100\,000 - B(t)$, die im t -ten Monat noch kein Gerät gekauft hatten: $B(t+1) - B(t) = k(100\,000 - B(t)) \Leftrightarrow$ Beschränktes Wachstum mit Sättigungsgrenze $S = 100\,000$
b) $B(1) - B(0) = k \cdot (100\,000 - B(0))$ mit $B(1) = 20\,000$ und $B(0) = 0 \Leftrightarrow k = 0,2$
c) $B(t) = 100\,000(1 - 0,8^t) \Leftrightarrow B(6) \approx 73\,785 > 50\,000$.

Aufgabe 8: Lineares und beschränktes Wachstum im Vergleich

Alle Strecken in dm, alle Flächen in dm²:

a) $U(0) = 4, U(1) = 6, U(2) = 8, U(3) = 10$ und $U(4) = 12$

b) $U(t + 1) - U(t) = 2$ (**lineares Wachstum**)

c) $U(t) = 2t + 4$

d) $A(0) = 1, A(1) = 1 + \frac{1}{3} \approx 1,33, A(2) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \approx 1,44, A(3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \approx 1,48$ und $A(4) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 1,49$

e) Die Sättigungsgrenze ist $S = \frac{3}{2}$, weil die im $(t + 1)$ -ten Schritt hinzugefügten Quadrate immer nur zwei

Drittel der noch übrigen Fläche einnehmen: $A(t + 1) - A(t) = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{3}{2} - A(t) \right]$

f) $A(t + 1) - A(t) = 3^{t+1} \cdot \left(\frac{1}{3^{t+1}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^{t+1}$

g) $A(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^t$

h) $U(100) = 204$ und $A(100) \approx 1,5 \Leftrightarrow$ Der Umfang wächst unbeschränkt aber die Fläche nähert sich einem **Grenzwert**.