4.7. Prüfungsaufgaben zu Exponential- und Logarithmusfunktionen

Aufgabe 1: Funktionsanpassung bei Exponentialfunktionen (2)
Bestimme die Gleichung der Exponentialfunktion $f(x) = c\cdot a^x$, deren Schaubild durch die Punkte P und Q geht.

a) $P(1|2)$ und $Q(2|1)$

b) $P(1|2)$ und $Q(2|8)$

c) $P(-1|3)$ und $Q(1|1)$

Lösung:
a) $f(x) = 4\cdot 0{,}5^x$.
b) $f(x) = 0{,}5\cdot 4^x$.
c) $f(x) = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$

Aufgabe 2: Funktionsanpassung bei Potenz- und Exponentialfunktionen (2)
Bestimme die Gleichungen der Exponentialfunktion $f(x) = c\cdot a^x$ und der Potenzfunktion $g(x) = b\cdot x^n$, deren Schaubilder durch die Punkte P und Q gehen.

a) $P(1|\frac{3}{4})$ und $Q(2|3)$

b) $P(1|\frac{4}{3})$ und $Q(3|12)$

Lösung:
a) $f(x) = \frac{3}{16}\cdot 4^x$ und $g(x) = \frac{3}{4}\cdot x^2$

b) $f(x) = \frac{4}{9}\cdot 3^x$ und $g(x) = \frac{4}{3}\cdot x^2$

Aufgabe 3: Exponential- und Logarithmusfunktionen im Vergleich (12)
a) Zeichne die Schaubilder der Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = \log_2 x$ in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-5 \le x \le 5$ und $-5 \le y \le 5$. (2)
b) Gib den Definitionsbereich und den Wertebereich für beide Funktionen an. (4)
c) Gib die Achsenschnittpunkte beider Schaubilder an. (2)
d) In welcher geometrischen Beziehung stehen die beiden Schaubilder zueinander? (2)
e) Untersuche beide Schaubilder auf Asymptoten. (2)

Lösung
a) Schaubilder
b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, $D_g = \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, $W_g = \mathbb{R}$.
c) $f(x) = 3^x$ schneidet nur die y-Achse in $S_y(0|1)$. $f^{-1}(x) = \log_3(x)$ schneidet nur die x-Achse in $S_x(1|0)$.
d) Durch Spiegelung des Schaubildes von f an der Geraden y = x erhält man das Schaubild von g.
e) Die negative x-Achse ist Asymptote von $f(x) = 3^x$ und die negative y-Achse ist Asymptote von $f^{-1}(x) = \log_3(x)$.

Aufgabe 4: Exponential- und Logarithmusfunktionen im Vergleich (12)
a) Zeichne die Schaubilder der Funktionen $f(x) = 3^x$ und $f^{-1}(x) = \log_3 x$ in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-5 \le x \le 5$ und $-5 \le y \le 5$. (2)
b) Gib den Definitionsbereich und den Wertebereich der beiden Funktionen an. (4)
c) Gib die Achsenschnittpunkte beider Schaubilder an. (2)
d) In welcher geometrischen Beziehung stehen die beiden Schaubilder zueinander? (2)
e) Untersuche beide Schaubilder auf Asymptoten. (2)

Lösung
a) Schaubilder
b) $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, $D_g = \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, $W_g = \mathbb{R}$.
c) $f(x) = 3^x$ schneidet nur die y-Achse in $S_y(0|1)$. $f^{-1}(x) = \log_3(x)$ schneidet nur die x-Achse in $S_x(1|0)$.

d) Durch Spiegelung des Schaubildes von f an der Geraden y = x erhält man das Schaubild von g.
e) Die negative x-Achse ist Asymptote von $f(x) = 3^x$ und die negative y-Achse ist Asymptote von $f^{-1}(x) = \log_3(x)$.

Aufgabe 5: Umkehrfunktionen (4)
Vergleiche die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2^x$ sowie ihrer Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} im Hinblick auf Definitions- und Wertebereiche, Asymptoten und Achsenschnittpunkte anhand der untenstehenden Tabelle

Funktion	$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) =$	$g(x) = 2^x$	$g^{-1}(x) =$
D =				
W =				
Asymptoten				
Achsenschnittpunkte				

Lösung

Funktion	$f(x) = x^2$	$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = 2^x$	$g^{-1}(x) = \log_2(x)$
D =	$\mathbb{R}$	$[0; \infty[$	$\mathbb{R}$	$]0; \infty[$
W =	$[0; \infty[$	$[0; \infty[$	$]0; \infty[$	$\mathbb{R}$
Asymptoten	-	-	$y = 0$ für $x \to -\infty$	$x = 0$ für $y \to -\infty$
Achsenschnittpunkte	$S(0\|0)$	$S(0\|0)$	$S(0\|1)$	$S(1\|0)$

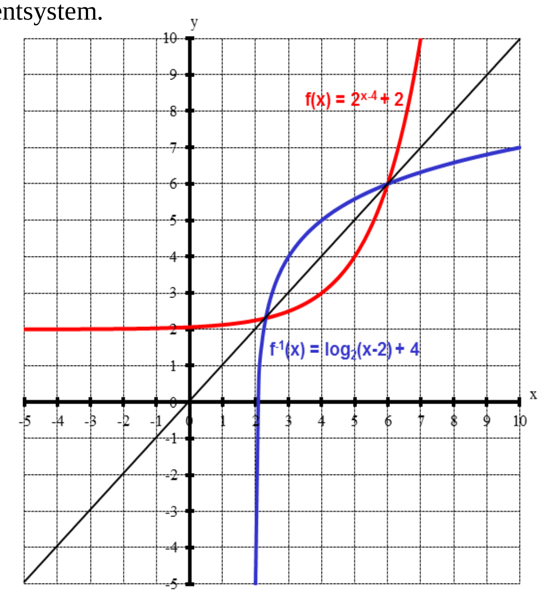
Aufgabe 6: Umkehrfunktionen (4)
Vergleiche die Schaubilder der Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = 3^x$ sowie ihrer Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1} im Hinblick auf Definitions- und Wertebereiche, Asymptoten und Achsenschnittpunkte anhand der untenstehenden Tabelle.

Funktion	$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) =$	$g(x) = 3^x$	$g^{-1}(x) =$
D =				
W =				
Asymptoten				
Achsenschnittpunkte				

Lösung

Funktion	$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$	$g(x) = 3^x$	$g^{-1}(x) = \log_3(x)$
D =	$\mathbb{R}$	$[0; \infty[$	$\mathbb{R}$	$]0; \infty[$
W =	$\mathbb{R}$	$[0; \infty[$	$]0; \infty[$	$\mathbb{R}$
Asymptoten	-	-	$y = 0$ für $x \to -\infty$	$x = 0$ für $y \to -\infty$
Achsenschnittpunkte	$S(0\|0)$	$S(0\|0)$	$S(0\|1)$	$S(1\|0)$

Aufgabe 7: Umkehrfunktionen (8)
Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} für $f(x) = 2^{x-4} + 2$ und gib die Definitionsbereiche für f und f^{-1} an. Zeichne f und f^{-1} mit ihren Asymptoten in ein gemeinsames Koordinatensystem.



Lösungen:
$f^{-1}(x) = \log_2(x-2) + 4$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $D_{f^{-1}} =]2; \infty[$ (4)
Beschriftete Zeichnung mit Asymptoten (4)