

4.7. Prüfungsaufgaben zum exponentiellen Wachstum

Aufgabe 1: Zinseszins (4)

Bestimme die fehlende Größe des Sparvertrags:

Anfangskapital	2000,00 €	500,00 €	8000,00 €	200,00€
Jahreszinssatz	5,9 %	4,0 %		
Laufzeit	15 Jahre		10 Jahre	30 Jahre
Endguthaben		1095,56 €	14876,69 €	630,23 €

Lösungen

Anfangskapital	2000,00 €	500,00 €	8000,00 €	200,00 €
Jahreszinssatz	5,9 %	4,0 %	6,4%	3,9 %
Laufzeit	15 Jahre	20 Jahre	10 Jahre	30 Jahre
Endguthaben	4725,74 €	1095,56 €	14876,69 €	630,23 €

Aufgabe 2: Zinseszins (4)

Bestimme die fehlende Größe des Sparvertrags:

Anfangskapital		1000,00 €	5000,00 €	20 000,00 €
Jahreszinssatz	4,2 %		4,4%	3,9 %
Laufzeit	12 Jahre	30 Jahre		18 Jahre
Endguthaben	491,51 €	2427,26 €	7690,86 €	

Lösungen

Anfangskapital	300,00 €	1000,00 €	5000,00 €	20 000,00 €
Jahreszinssatz	4,2 %	3,0 %	4,4%	3,9 %
Laufzeit	12 Jahre	30 Jahre	10 Jahre	18 Jahre
Endguthaben	491,51 €	2427,26 €	7690,86 €	39820,78 €

Aufgabe 3: Exponentielles Wachstum (4)

Die Bevölkerung Italiens umfasst zur Zeit $B(0) = 50$ Mio Menschen und schrumpft jedes Jahr um 2%.

- Wie hoch ist die Bevölkerung $B(t)$ nach t Jahren? (1)
- Um wie viel Prozent ändert sich die Bevölkerung alle zehn Jahre? (1)
- Nach wie vielen Jahren wird die Bevölkerung auf 40 Mio Menschen abgesunken sein? (2)

Lösung

- $B(t) = 50 \cdot 10^6 \cdot 0,98^t$. (1)
- Nach $t = 10$ Jahren vermindert sich die Bevölkerung um den Faktor $0,98^{10} = 0,817$, das entspricht einer Abnahme von $-18,3\%$. (1)
- $40 \cdot 10^6 = 50 \cdot 10^6 \cdot 0,98^x \Leftrightarrow 4 = 5 \cdot 0,98^x \Leftrightarrow t = \frac{\log \frac{4}{5}}{\log 0,98} = 11,04$ Jahre (2)

Aufgabe 4: Exponentielles Wachstum (4)

Eine Bakterienkultur bedeckt eine Fläche von $0,2 \text{ cm}^3$ und vermehrt sich jede Stunde um 5 %.

- Wie hoch ist die bedeckte Fläche $A(t)$ nach t Stunden? (1)
- Bestimme die tägliche Zuwachsrate in %. (1)
- Nach wie vielen Tagen wird eine Fläche von 80 cm^3 bedeckt sein? (2)

Lösung

- Ansatz $A(t) = A(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$. Mit $p = 5$ und $A(0) = 0,2 \text{ cm}^3$ erhält man $A(x) = 0,2 \text{ cm}^3 \cdot 1,05^t$. (1)
- Nach 1 Tag = 24 Stunden vermehrt sich die Fläche um den Faktor $1,05^{24} = 3,22 \Rightarrow 222\%$ Zuwachs pro Tag. (1)
- $A(t) = 80 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow 0,2 \text{ cm}^3 \cdot 1,05^t = 80 \text{ cm}^3 \Leftrightarrow 1,05^t = 400 \Leftrightarrow t = \frac{\log 400}{\log 1,05} = 122,8$ Stunden = 5,1 Tage (2)

Aufgabe 5: Exponentielles Wachstum (7)

In einer „steril“ verpackten Käseportion befinden sich zum Zeitpunkt der Verpackung 5000 Bakterien. Einen Tag später um die gleiche Zeit sind es schon 11000.

- Bestimme die stündliche Zuwachsrate in %. (2)
- Nach wieviel Stunden verdoppelt sich der Bestand jeweils? (2)
- Wie viele Bakterien sind unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums eine Woche nach der Verpackung in der Käseportion zu erwarten? (1)
- Wie viele Bakterien sind nach einer Woche zu erwarten, wenn sich die Vermehrungsrate der Bakterien durch gekühlte Lagerung halbiert hat? (2)

Lösung

a) $B(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \cdot B(0)$ mit $B(0) = 5000$, $B(1) = 11000$ und t in Tagen $\Rightarrow B(t) = 2,2^t \cdot 5000$. (1)

Nach 1 Stunde = $\frac{1}{24}$ Tag ändert sich B um den Faktor $2,2^{1/24} = 1,033$, d.h. um 3,3 %. (1)

b) $B(t') = 2 \cdot B(0) \Leftrightarrow 1,033^{t'} \cdot 5000 = 2 \cdot 5000 \Leftrightarrow 1,033^{t'} = 2 \Leftrightarrow t' = \frac{\log 2}{\log 1,033} \approx 21,3$ Stunden. (2)

c) $B(7 \text{ Tage}) = 2,2^7 \cdot 5000 \approx 1,24$ Millionen. (1)

d) Aus $1 + \frac{p}{100} = 2,2$ folgt $p = 120$ % pro Tag bei Raumtemperatur. (1)

Im Kühlschrank ist also $p'' = 60$ % pro Tag und $B''(7 \text{ Tage}) = 1,6^7 \cdot 5000 \approx 0,13$ Millionen (1)

Aufgabe 6: Exponentielles Wachstum (7)

In einer „steril“ verpackten Käsepackung wurden vier Wochen nach Verpackungsdatum 7,2 Millionen Bakterien pro Gramm und einen Tag später 7,9 Millionen Bakterien pro Gramm nachgewiesen.

- Bestimme die tägliche Zuwachsrate in %. (2)
- Wieviele Bakterien waren unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums bei der Verpackung in die Käseportion gelangt? (1)
- Wieviele Bakterien wären nach acht Wochen zu erwarten? (1)
- Nach wieviel Tagen verdoppelt sich der Bestand jeweils? (2)
- Bestimme die wöchentliche Zuwachsrate in % (1)

Lösung

a) $Z(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \cdot Z(0)$ mit $Z(28) = 7,2$ Millionen und $Z(29) = 7,9$ Millionen (1)

$\Rightarrow Z(t) \approx 1,0972^t \cdot 0,54$ Millionen $\Rightarrow p = 9,72$ % (1)

b) $Z(0) \approx 0,54$ Millionen (1)

c) $Z(56) \approx 1,0972^{56} \cdot 0,54$ Millionen = 96,4 Millionen (1)

d) $Z(t) = 2 \cdot Z(0) \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,0972} \approx 7,48$ Tage (2)

e) Nach einer Woche = t Tage ändert sich der Bestand um den Faktor $1,0972^7 = 1,814$, d.h. um 81,4 % (1)

Aufgabe 7: Exponentielles Wachstum (7)

Auf eine Südatlantikinsel wurde im Jahr 1695 eine unbekannte Zahl von Ziegen ausgesetzt. Im Jahr 1705 zählte man 25 Ziegen und zwei Jahre später 36 Ziegen.

- Bestimme die jährliche Zuwachsrate in %. (2)
- Wieviele Ziegen waren im Jahr 1695 ausgesetzt worden, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt? (1)
- Wieviele Ziegen wären im Jahr 1710 zu erwarten? (1)
- Bestimme die monatliche Zuwachsrate in % (1)
- Nach wievielen Monaten verdoppelte sich der Bestand jeweils? (2)

Lösung

- a) $Z(t) = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \cdot Z(0)$ mit $Z(10) = 25$ und $Z(12) = 36 \Rightarrow Z(t) = 1,2^t \cdot 4 \Rightarrow p = 20\%$. (2)
- b) $Z(0) = 4$ (1)
- c) $Z(15) = 1,2^{15} \cdot 4 = 61,6 \approx 62$ Ziegen (1)
- d) Nach 1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahre ändert sich der Bestand um den Faktor $1,2^{1/12} = 1,0153$, d.h., um 1,53 % (1)
- e) $Z(t') = 2 \cdot Z(0) \Rightarrow t' = \frac{\log 2}{\log 1,0153} = 45,6$ Monate (2)

Aufgabe 8: Exponentielle Abnahme (6)

Der Luftdruck p wird in Hektopascal (hPa) gemessen. Aus Messungen ist bekannt, dass er exponentiell mit der Höhe abnimmt, und zwar um durchschnittlich 12% pro Kilometer Höhenzunahme. Am 12. Februar 1999 betrug der Luftdruck auf Meereshöhe 1000 hPa.

- a) Gib eine Funktion an, mit der man an diesem Tag für die Höhe h (in km) über dem Meeresspiegel den Luftdruck p (in hPa) berechnen kann.
- b) Wie groß war an diesem Tag der Luftdruck in 4500 m Höhe über dem Meeresspiegel?
- c) Um wie viel Prozent hat der Druck gegenüber dem Wert auf Meereshöhe abgenommen?
- d) In welcher Höhe registrierte damals ein Wetterballon einen Luftdruck von 400 hPa?

Lösung:

- a) $p(h) = \left(1 - \frac{12}{100}\right)^h \cdot p(0) = 0,88^h \cdot 1000$ hPa mit h in Kilometern. (2)
- b) $p(4,5) = 955,7$ hPa (1)
- c) Abnahme um $\frac{1000 - 955,7}{1000} = 4,5\%$ (1)
- d) $400 \text{ hPa} = p(h) \Leftrightarrow 400 = 0,88^h \cdot 1000 \Leftrightarrow h = \frac{\ln 0,4}{\ln 0,88} \approx 7,16$ km (2)

Aufgabe 9: Zinseszins (2)

Eine maschinelle Anlage wurde drei Jahre hintereinander mit 12,5 % vom Restwert abgeschrieben. Nach der dritten Abschreibung beträgt der Restwert 85 750 €. Berechnen Sie den Anschaffungswert!

Lösung

$$85\,750 \text{ €} = B(0) \cdot 0,875^3 \Rightarrow B(0) = 128\,000 \text{ €}$$

Aufgabe 10: Bevölkerungswachstum (2)

Die Einwohnerzahl einer Stadt nahm in den letzten drei Jahren durchschnittlich um 5 % jährlich zu und beträgt heute 92 610. Wie groß war die Einwohnerzahl vor drei Jahren?

Lösung

$$92\,610 = B(0) \cdot 1,05^3 \Rightarrow B(0) = 80\,000 \text{ Einwohner}$$