

4.7. Exponential- und Logarithmusfunktionen

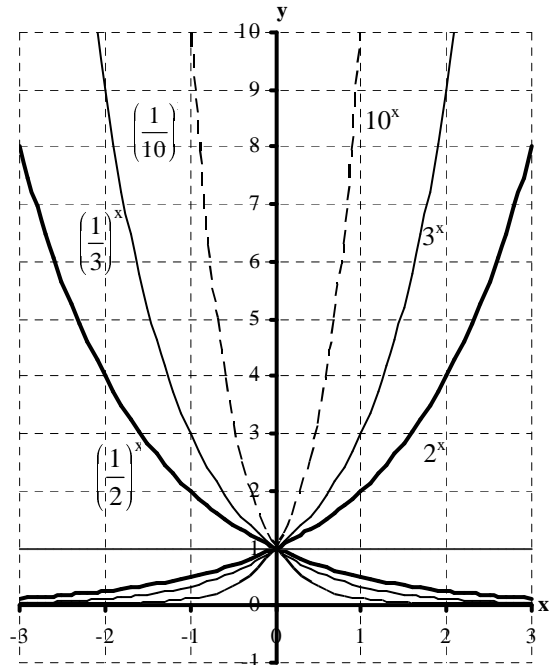
4.7.1. Exponentialfunktionen

Definition:

Die Funktion $f(x) = c \cdot a^x$ mit $D = \mathbb{R}$, $c \neq 0$ und $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ heißt **Exponentialfunktion** zur Basis a . Die Exponentialfunktion zur Basis $a = e$ mit der **Eulerschen Zahl** $e = 2,718\dots$ heißt **natürliche Exponentialfunktion** und wird auch als $\exp(x)$ geschrieben: $e^x = \exp(x)$.

Beispiele:

x	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	2^x	3^x	10^x
-3	1000	27	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{1000}$
-2	100	9	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{100}$
-1	10	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$
0	1	1	1	1	1	1
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3	10
2	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	4	9	100
3	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{8}$	8	27	1000



Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- **Wertebereich:** $W = \mathbb{R}^+$
- **Waagrechte Asymptoten:** $a^x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$ und $a > 1$ bzw. für $x \rightarrow +\infty$ und $a < 1$
- **Symmetrie:** Spiegelt man das Schaubild von $y = a^x$ an der y-Achse, so erhält man das Schaubild von

$$y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

- **Gemeinsamer Punkt:** Die Schaubilder aller Exponentialfunktionen gehen durch den Punkt $P(0|1)$
- **Wachstum:** Jede Exponentialfunktion wächst schließlich stärker als alle Potenzfunktionen:

$$a^x > b^n \Leftrightarrow x > n \frac{\log b}{\log a}$$

Beispiel zur Bestimmung einer Funktionsgleichung

Bestimme die Gleichung der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$, deren Schaubild durch $P(2|4)$ und $Q(3|1)$ geht.

Lösung

Durch Einsetzen der Koordinaten der beiden Punkte in den Ansatz $y = c \cdot a^x$ erhält man zwei Gleichungen für zwei Unbekannte c und a :

$$P(2|4): \left| \begin{array}{l} 4 = c \cdot a^2 \\ 1 = c \cdot a^3 \end{array} \right.$$

$$Q(3|1): \left| \begin{array}{l} 1 = c \cdot a^3 \end{array} \right.$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem löst man am besten mit dem Gleichsetzungsverfahren:

$$\left| \begin{array}{l} c = \frac{1}{4} a^2 \\ c = a^3 \end{array} \right.$$

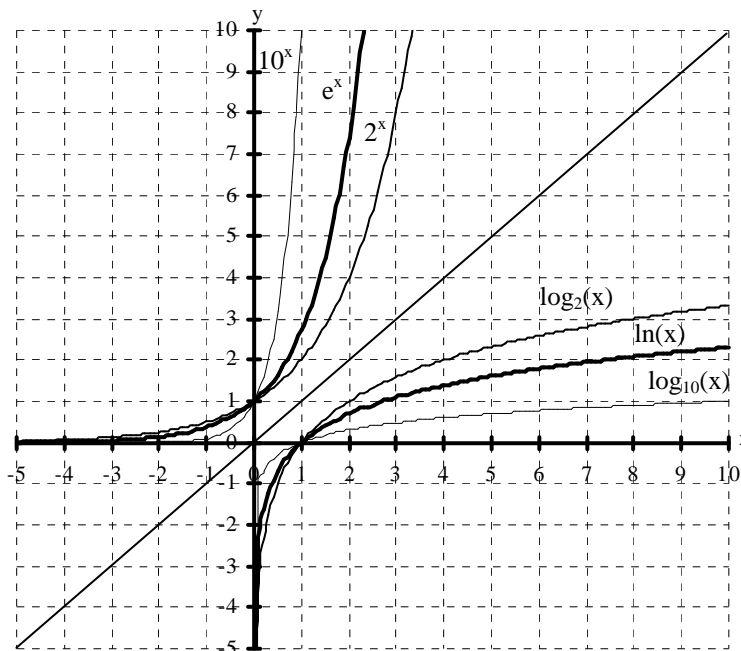
$$a^3 = \frac{1}{4} a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow c = a^3 = \frac{1}{64}$$

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{64} \cdot 0,25^x$.

4.7.2. Logarithmusfunktionen

Wertetabelle und Schaubilder von Logarithmusfunktionen:

x	$\log_2 x$	x	$\log_{10} x$
$\frac{1}{1000}$	-3	$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{100}$	-2	$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{10}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1
1	0	1	0
10	1	2	1
100	2	4	2
1000	3	8	3



Eigenschaften:

$f^{-1}(x) = \log_a(x)$ ist die **Umkehrfunktion** zu $f(x) = a^x$, d.h., man erhält

- das **Schaubild** von f^{-1} aus dem Schaubild von f durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden und
- die **Funktionsgleichung** von f^{-1} aus der Funktionsgleichung $y = f(x)$ durch Auflösen nach x und Vertauschung von x und y .

Insbesondere gilt:

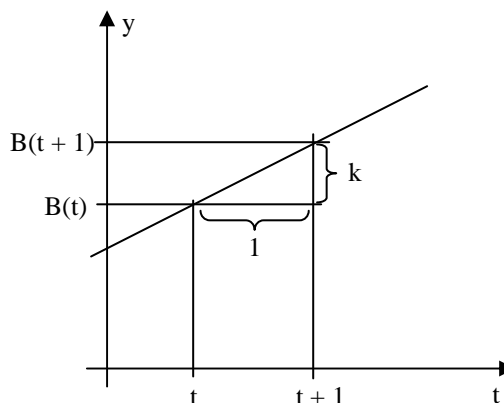
- Die negative y -Achse ist senkrechte **Asymptote**
- Alle Schaubilder gehen durch den Punkt $(1|0)$

4.7.3. Lineare Änderungen (siehe auch 4.1.)

Beispiel: 4.1. Aufgaben zu linearen Funktionen Nr. 2

Lineare Änderung (siehe auch 4.1.3.)

1. Eine Größe B ändert sich **linear**, wenn nach t Zeitschritten gilt $B(t) = k \cdot t + B(0)$ mit dem konstanten **Änderungsfaktor** $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und dem **Anfangswert** $B(0) \in \mathbb{R}$.
2. Ihre **Änderung** ist konstant: $B(t+1) - B(t) = k$.
3. Ihr **Schaubild** ist eine Gerade mit der Steigung k , die die y -Achse bei $B(0)$ schneidet.
4. **Achtung:** Der Änderungsfaktor k hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!

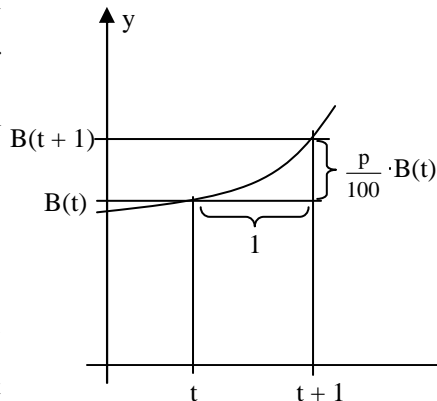


4.7.4. Exponentielle Änderungen

Beispiel: Aufgaben zu exponentielle Änderungen Nr. 6

Exponentielle Änderung

1. Eine Größe B ändert sich **exponentiell**, wenn nach t Zeitschritten gilt $B(t) = (1 + \frac{p}{100})^t \cdot B(0)$ mit der **prozentualen Änderungsrate** $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und dem **Anfangswert** $B(0) \in \mathbb{R}$.
2. Ihre **Änderung** ist proportional zum **Bestand**:
 $B(t+1) - B(t) = k \cdot B(t)$.
 Der **Änderungsfaktor** ist $k = \frac{p}{100}$.
3. Ihr **Schaubild** ist eine Kurve, die die y -Achse bei $B(0)$ schneidet:
4. **Achtung:** Die prozentuale Änderungsrate hängt von der gewählten Zeiteinheit ab!



Beispiel zur Umrechnung der Änderungsrate auf andere Zeiteinheiten:

Eine Anlage wird mit 5 % monatlich verzinst. Berechne die Zinsrate bezogen auf

- a) ein Jahr
- b) einen Tag.

Hinweis: Banken rechnen mit 12 Monaten zu 30 Tagen.

Lösung:

Der Wachstumsfaktor ist $(1 + \frac{p}{100}) = 1,05$ bezogen auf 1 Monat.

- a) Bezogen auf 1 Jahr = 12 Monate ist $(1 + \frac{p}{100})^{12} = 1,05^{12} = 1,79 \Rightarrow$ jährliche Zinsrate 79 %
- b) Bezogen auf 1 Tag = $\frac{1}{30}$ Monat ist $(1 + \frac{p}{100})^{1/30} = 1,05^{1/30} = 1,0016 \Rightarrow$ tägliche Zinsrate 0,16 %

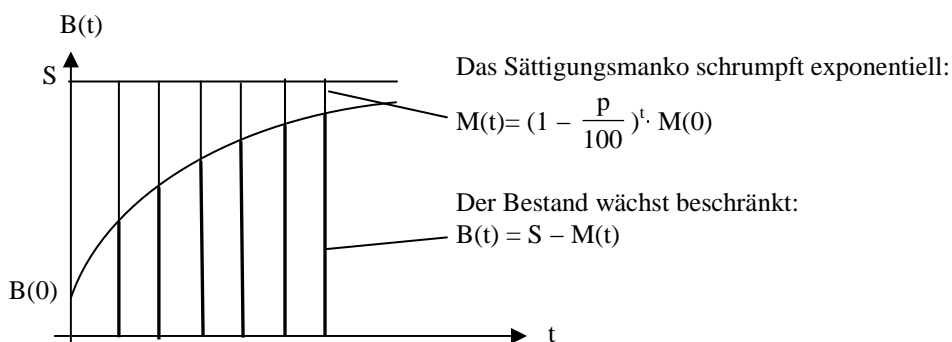
Übungen: Aufgaben zu exponentiellen Änderungen Nr. 7 - 13

4.7.5. Beschränkte Änderungen

Beispiel: Aufgaben zu beschränkten Änderungen Nr. 1

Beschränkte Änderung

1. Eine Größe $B(t)$ ändert sich **beschränkt mit der Sättigungsgrenze** $S \in \mathbb{R}$, wenn das **Sättigungsmanko** $M(t) = S - B(t)$ **exponentiell abnimmt**: $B(t) = S - M(t)$ mit $M(t) = (1 - \frac{p}{100})^t \cdot M(0)$ mit $p > 0$ (!)
2. Ihre **Zunahme des Bestandes** ist proportional zum **Sättigungsmanko**: $B(t+1) - B(t) = k \cdot [S - B(t)]$.
3. Ihr **Schaubild** ist eine Kurve, die die y -Achse bei $B(0) = S - M(0)$ schneidet und sich der **Sättigungsgrenze** S asymptotisch nähert:



Beispiel für den Nachweis eines beschränkten Wachstums und Berechnung von S und k:

Für die zeitliche Entwicklung eines Bestandes $B(t)$ nach t Zeitschritten wurde die Beziehung $B(t + 1) = 0,8 \cdot B(t) + 10$ mit $B(0) = 20$ ermittelt. Zeige, dass es sich um beschränktes Wachstum handelt und berechne S und k .

Lösung:

Die Gleichung lässt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} B(t + 1) &= 0,8 \cdot B(t) + 10 && | - B(t) \\ B(t + 1) - B(t) &= -0,2 B(t) + 10 && | \text{Änderungsfaktor ausklammern} \\ &= 0,2 \left[-B(t) + \frac{10}{0,2} \right] \\ &= 0,3 [50 - B(t)] \\ &= k \cdot [S - B(t)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = 50 \text{ und } k = 0,3 \Rightarrow B(t) = 50 - 0,3^t \cdot 30$$

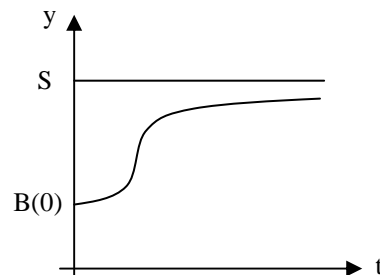
Übungen: Aufgaben zu beschränkten Änderungen Nr. 2 - 8

4.7.6. Logistisches Wachstum

Einführung. Aufgaben zum logistischen Wachstum Aufgabe 1

Logistisches Wachstum

1. Eine Größe $B(t)$ wächst **logistisch**, wenn ihre **Änderung** proportional zum **Bestand $B(t)$** und zum **Sättigungsmanko $S - B(t)$** ist: $B(t + 1) - B(t) = k \cdot B(t) \cdot [S - B(t)]$
2. Ihr **Schaubild** ist eine S-Kurve, die die y-Achse bei $B(0)$ schneidet und sich der **Sättigungsgrenze S** asymptotisch nähert:



Übungen: Aufgaben zu logistischen Wachstum Aufgaben 2 - 4