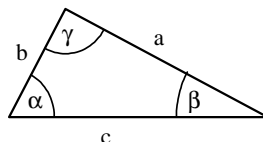


4.8. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Dreiecksberechnung

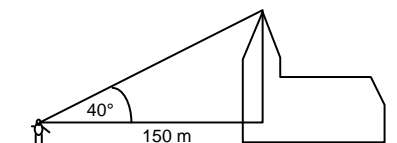
Berechne die fehlenden Größen im rechtwinkligen Dreieck.
Alle Längen seien in cm angegeben.



Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
a	4		36	4,5		2,5	8,6	5	3,9	27,2	17,3	
b			13,20		7,2			2				
c		8,61		7,6			13,2		4,6			35,2
α	48°				54°						23°	
β		64°				56°				36°		53°

Aufgabe 2: Längenberechnungen

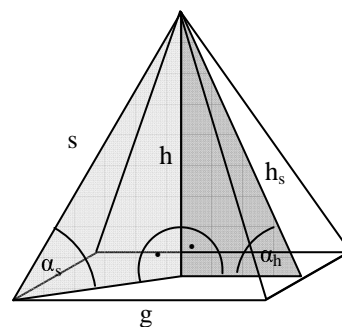
- Wie hoch ist ein Kirchturm, dessen Spitze für einen Beobachter mit Augenhöhe 1,5 m aus einer Entfernung von 150 m unter einem Winkel von 40° erscheint?
- Eine 7,5 m hohe Leiter lehnt in 6,6 m Höhe an der Wand. Wie groß ist der Anstellwinkel und wie weit steht sie von der Wand entfernt?
- Ein Mast soll mit 20 m langen Seilen abgesichert werden. In welcher Höhe müssen sie am Mast angebracht werden, wenn ihr Neigungswinkel 65° sein soll? In welcher Entfernung zum Mast müssen sie am Boden befestigt werden?
- Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten 27,5 m lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $38,5^\circ$ einfallen?
- Wie weit fliegt ein Drachenflieger, der in 25 m Höhe unter einem Gleitwinkel von 8° startet?
- Von der Spitze eines 28,6 m hohen Turmes erscheint die Breite des 6 m entfernten Flusses unter einem Sehwinkel von 17° . Wie breit ist der Fluss?
- Für einen 12 m entfernten Beobachter mit der Augenhöhe 1,6 m erscheint der Fahnenmast auf der Spitze eines 15 m hohen Turmes unter dem Sehwinkel von $6,5^\circ$. Wie lang ist der Fahnenmast?



Aufgabe 3: Pyramiden

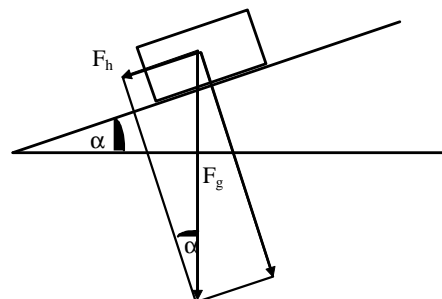
Berechne die fehlenden Größen. Alle Längen sind in cm angegeben.

Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
g	5			8				10	
s	4	6							9
h		4	4		5		5		
h_s			5			7			
α_s				70°			45°		60°
α_h					45°	60°		50°	



Aufgabe 4: Kräftezerlegung an der schiefen Ebene

Ein Junge der Masse $m = 20$ kg sitzt auf einer Rutsche mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30^\circ$. Senkrecht nach unten wirkt auf ihn die Gewichtskraft $F_g = m \cdot g$ mit der Schwerebeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Berechne die Hangabtriebskraft F_h , die ihn in Rutschrichtung beschleunigt.



Aufgabe 5: Schnittwinkel von Geraden

Berechne die Schnittwinkel der folgenden Geraden

- $g_1(x) = x - 1$ und $g_2(x) = \frac{1}{2}x + 1$
- $g_1(x) = 2x - 3$ und $g_2(x) = x$
- $g_1(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ und $g_2(x) = -2x + 4$
- $g_1(x) = -x + 5$ und $g_2(x) = 3x - 2$

Aufgabe 6: Bogenmaß

Ergänze die folgende Tabelle:

Grad	0°		45°		90°		135°		180°		360°		57,29°	70°	
Bogenmaß		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{\pi}{9}$			2

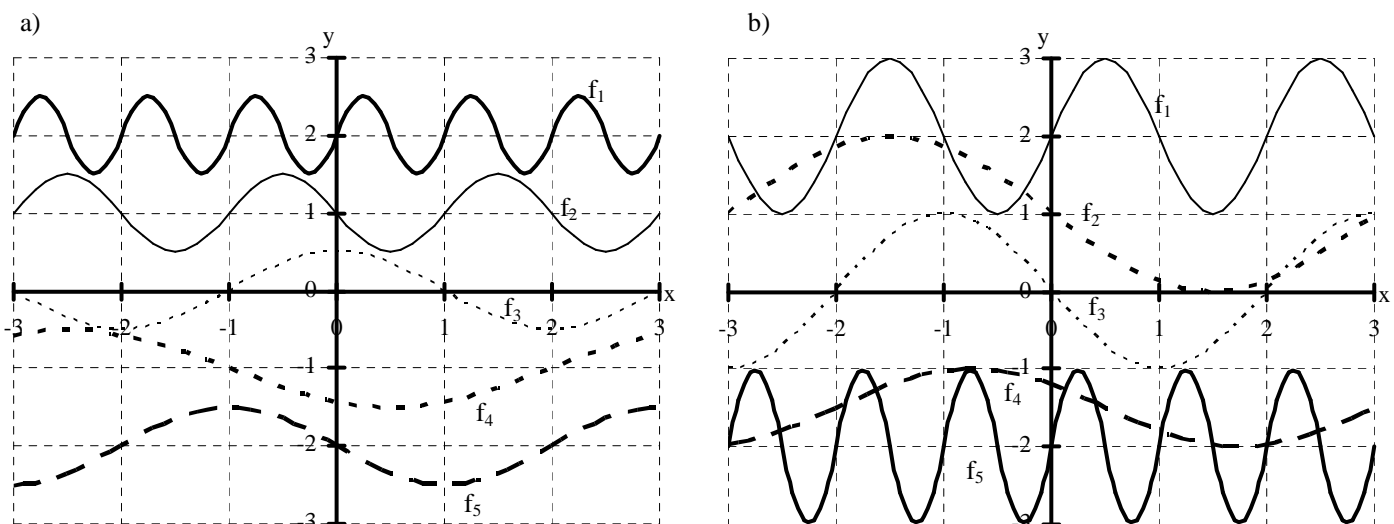
Aufgabe 7: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen

Bestimme die Periode p , die Hoch- und Tiefpunkte sowie die Achsenschnittpunkte der folgenden Funktionen
 Skizziere jeweils die Schaubilder von $f_1 - f_3$ in ein gemeinsames Koordinatensystem mit $-4 \leq x \leq 4$

- a) $f_1(x) = \sin[2\pi x]$ b) $f_1(x) = \sin[2\pi x] + 2$ c) $f_1(x) = \sin[2\pi(x - 1)] + 2$ d) $f_1(x) = \frac{3}{2} \sin\left[\frac{\pi}{3}(x - 2)\right] + 2$
- $f_2(x) = \sin[\pi x]$ $f_2(x) = \sin\left[\frac{\pi}{3}x\right]$ $f_2(x) = \sin\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ $f_2(x) = \frac{1}{2} \sin\left[\frac{2\pi}{3}(x - 1)\right]$
- $f_3(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2}x\right]$ $f_3(x) = \sin\left[\frac{2\pi}{3}x\right] - 2$ $f_3(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(x + 1)\right] - 2$ $f_3(x) = \frac{3}{2} \sin[\pi(x + 1)] - 2$

Aufgabe 8: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen

Bestimme die Gleichungen der Funktionen $f_1 - f_5$:



Aufgabe 9: Sinussatz

Bestimme die restlichen Größen eines Dreiecks, wenn die folgenden Größen bekannt sind:

- a) $a = 14,3$ m; $c = 27,9$ m und $\gamma = 82,1^\circ$ b) $a = 13$ m; $b = 27$ m und $\alpha = 27^\circ$

Aufgabe 10: Sinussatz

Zeige, dass die Winkelhalbierende in einem Dreieck stets die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Aufgabe 11: Sinussatz und Kosinussatz

Bestimme jeweils die fehlenden Größen im Dreieck ABC:

- a) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, a = 3$ cm
 b) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 40^\circ$
 c) $a = 3$ cm; $b = 4$ cm; $c = 5$ cm

Aufgabe 12: Kosinussatz

Um einem Felsen auszuweichen, geht ein Vermessungstrupp von einem Punkt A zunächst 85 m genau nach Norden bis B und von hier aus 102 m in Richtung Nord $52,2^\circ$ Ost bis C. Wie weit sind A und C voneinander entfernt?

4.8. Lösungen zu den Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Dreiecksberechnung

Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
a	4	3,77	36	4,5	9,91	2,5	8,6	5	3,9	27,2	17,3	21,18
b	3,6	7,74	13,2	6,12	7,2	3,71	10,01	2	2,44	19,76	40,75	28,11
c	5,38	8,61	38,34	7,6	12,25	4,47	13,20	5,38	4,6	33,62	44,28	35,2
α	48°	26°	69,86	36,31°	54°	34°	40,66	68,20	57,98°	54°	23°	37°
β	42°	64°	20,13	53,69°	36°	56°	49,34	21,80	32,02°	36°	67°	53°

Beispielrechnung zu a):

$$\beta = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

$$c = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \text{ cm}}{0,74} \approx 5,38 \text{ cm}$$

$$b = c \cdot \cos(\beta) = 5,38 \text{ cm} \cdot 0,67 \approx 3,6 \text{ cm}$$

Aufgabe 2: Längenberechnung

a) Höhe $h = 1,5 \text{ m} + 150 \text{ m} \cdot \tan(40^\circ) = 126,5 \text{ m}$.

b) Anstellwinkel $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6,6}{7,5}\right) \approx 61,64^\circ$ und Entfernung $d \approx \sqrt{7,5^2 - 6,6^2} \approx 3,56 \text{ m}$

c) Höhe $h = 20 \text{ m} \cdot \sin(65^\circ) \approx 18,12 \text{ m}$ und Entfernung $d = 20 \text{ m} \cdot \cos(65^\circ) \approx 8,45 \text{ m}$

d) Höhe $h = 27,5 \text{ m} \cdot \tan(38,5^\circ) \approx 21,87 \text{ m}$

e) Flugweite $s = \frac{25 \text{ m}}{\tan(8^\circ)} \approx 1777,88 \text{ m}$

f) Das diesseitige Ufer erscheint unter dem Winkel von $\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{6 \text{ m}}{28,6 \text{ m}}\right) \approx 11,84^\circ$ und ist $d_1 = 6 \text{ m}$ entfernt.

Das jenseitige Ufer erscheint dann unter dem Winkel $\alpha_2 = 17^\circ + 11,84^\circ = 28,84^\circ$ und ist $d_2 = 28,6 \text{ m} \cdot \tan(28,84^\circ) \approx 15,75 \text{ m}$ entfernt. Der Fluss ist also $d_2 - d_1 = 9,75 \text{ m}$ breit.

g) Das untere Ende der Fahnenstange erscheint unter dem Winkel von $\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{13,4 \text{ m}}{12 \text{ m}}\right) \approx 48,15^\circ$ und ist $h_1 =$

13,4 m über der Augenhöhe des Beobachters. Das obere Ende erscheint dann unter dem Winkel $\alpha_2 = 6,5^\circ + 48,15^\circ = 54,65^\circ$ und ist $d_2 = 12 \text{ m} \cdot \tan(54,65^\circ) \approx 16,92 \text{ m}$ über der Augenhöhe des Beobachters. Die

Fahnenstange ist also $h_2 - h_1 = 3,52 \text{ m}$ hoch

Aufgabe 3: Pyramiden

Teil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
g	5	6,32	6	8	10	7	7,07	10	6,36
s	4	6	5,83	16,53	8,66	7,83	7,07	9,25	9
h	1,87	4	4	15,54	5	6,06	5	5,96	7,79
h_s	3,12	5,10	5	16,05	7,07	7	6,12	7,78	8,42
α_s	27,87°	41,81°	43,32°	70°	35,37°	50,71°	45°	40,12°	60°
α_h	36,82°	51,66°	53,13°	75,52°	45°	60°	54,78°	50°	67,70°

Beispielrechnung zu a)

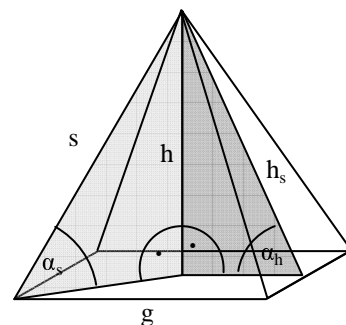
Grundflächendiagonale $d = \sqrt{g^2 + g^2} = \sqrt{2} g = \sqrt{2} \cdot 4 \approx 5,65 \text{ cm}$ (Grundfläche)

Höhe $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx \sqrt{4^2 - \left(\frac{5,65}{2}\right)^2} \approx 1,87 \text{ cm}$ (helles Dreieck)

Seitenhöhe $h_s = \sqrt{h^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2} \approx \sqrt{1,87^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \approx 3,12 \text{ cm}$ (dunkles Dreieck)

Eckwinkel $\alpha_s = \sin^{-1}\left(\frac{h}{s}\right) \approx \sin^{-1}\left(\frac{1,87 \text{ cm}}{4 \text{ cm}}\right) \approx 27,87^\circ$ (helles Dreieck)

Flächenwinkel $\alpha_h = \sin^{-1}\left(\frac{h}{h_s}\right) \approx \sin^{-1}\left(\frac{1,87 \text{ cm}}{3,12 \text{ cm}}\right) \approx 36,82^\circ$ (dunkles Dreieck)



Aufgabe 4: Kräftezerlegung an der schiefen Ebene

$$F_h = F_g \cdot \sin(\alpha) = mg \cdot \sin(\alpha) = 98,1 \text{ N (entspricht der Gewichtskraft von ca. 10 kg)}$$

Aufgabe 5: Schnittwinkel von Geraden

a) $\alpha = 45^\circ - 26,5^\circ = 18,5^\circ$

c) $\alpha = -33,69^\circ - (-63,43^\circ) = 29,74^\circ$

b) $\alpha = 63,43^\circ - 45^\circ = 18,43^\circ$

d) $\alpha = 71,57^\circ - (-45^\circ) = 116,57^\circ$ bzw. $63,43^\circ$

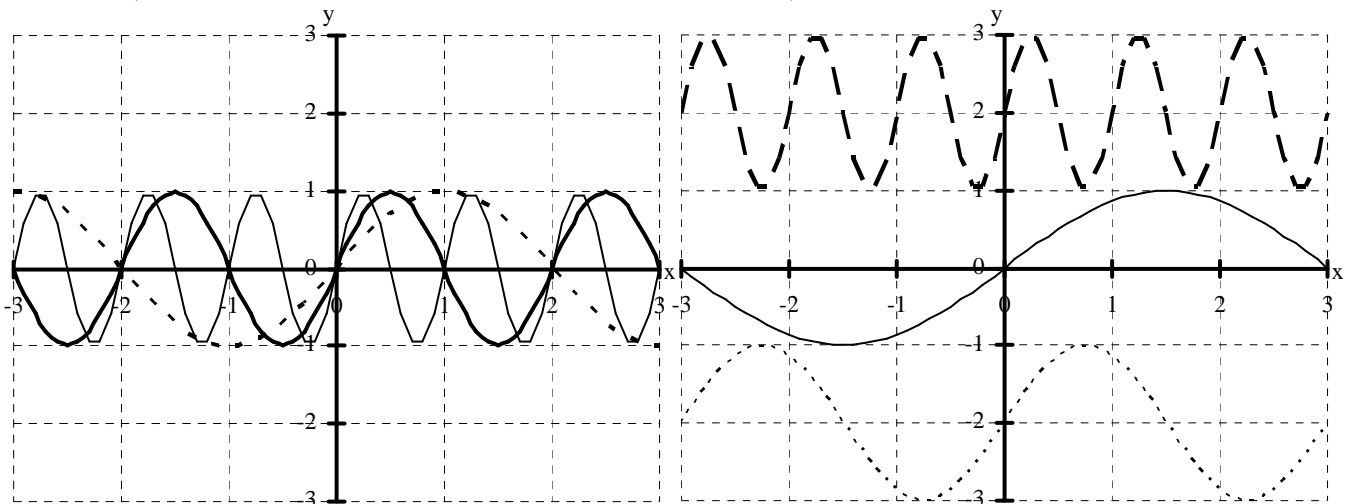
Aufgabe 6: Bogenmaß

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°	20°	57,29°	70°	114,59°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{9}$	1	$\frac{7\pi}{18}$	2

Aufgabe 7: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen

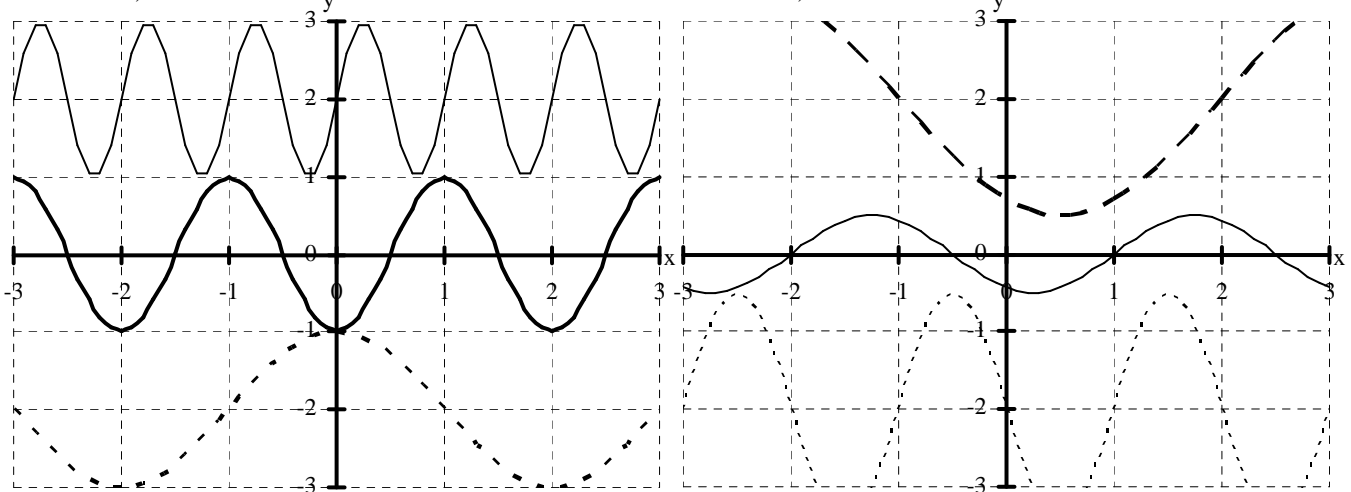
Teil a)

Teil b)



Teil c)

Teil d)



Aufgabe 8: Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen

a) $f_1(x) = \frac{1}{2} \sin[2\pi x] + 2$

b) $f_1(x) = \sin[\pi x] + 2$

$f_2(x) = \frac{1}{2} \sin[\pi(x-1)] + 1$

$f_2(x) = \sin\left[\frac{\pi}{3}(x+3)\right] + 1$

$f_3(x) = \frac{1}{2} \sin\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]$

$f_3(x) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(x+2)\right]$

$f_4(x) = \frac{1}{2} \sin\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right] - 1$

$f_4(x) = \sin\left[\frac{2\pi}{5}(x+2)\right] - \frac{3}{2}$

$f_5(x) = \frac{1}{2} \sin\left[\frac{\pi}{2}(x-2)\right] - 2$

$f_5(x) = \sin[2\pi x] - 2$

Aufgabe 9: Sinussatz

a) $\sin(\alpha) = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 0,51 \Rightarrow \alpha = 30,5^\circ$ (Sinussatz)

$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 67,39^\circ$ (Winkelsummensatz)

$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 26,00 \text{ m}$ (Sinussatz)

b) $\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a} = 0,94 \Rightarrow \beta = 70,54^\circ$ (Sinussatz)

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 82,46^\circ$ (Winkelsummensatz)

$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 28,38 \text{ m}$ (Sinussatz)

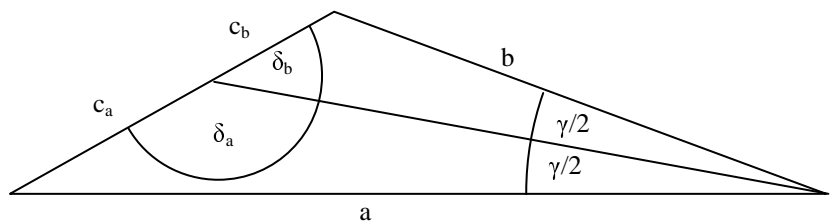
Aufgabe 10: Sinussatz

Im unteren Dreieck gilt $\frac{\sin(\delta_a)}{\sin(\gamma/2)} = \frac{a}{c_a}$

Im oberen Dreieck gilt $\frac{\sin(\delta_b)}{\sin(\gamma/2)} = \frac{b}{c_b}$

Wegen $\delta_a + \delta_b = 180^\circ$ gilt aber $\sin(\delta_a) = \sin(\delta_b)$ und damit folgt

$$\frac{b}{c_b} = \frac{a}{c_a} \Leftrightarrow \frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}, \text{ qed.}$$



Aufgabe 11: Sinussatz und Kosinussatz

a) $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$ (Winkelsummensatz)

$b = a \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 5,2 \text{ cm}$ (Sinussatz)

$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 6 \text{ cm}$ (Sinussatz)

b) $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos(\gamma)} = 3,9 \text{ cm}$ (Kosinussatz)

$\sin(\alpha) = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} = 0,99 \Rightarrow \alpha = 81,4^\circ$ (Sinussatz)

$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 58,6^\circ$ (Winkelsummensatz)

c) $\cos(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36,8^\circ$ (Kosinussatz)

$\cos(\beta) = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac} = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = 53,1^\circ$ (Kosinussatz)

$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$ (Winkelsummensatz)

Aufgabe 12: Kosinussatz

$\beta = 180^\circ - 52,2^\circ = 127,8^\circ$ (Nachbarwinkel)

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(\beta)} = 167,88 \text{ m.}$ (Kosinussatz)