4.8. Prüfungsaufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1: Schaubilder der trigonomtrischen Funktionen (2)

a) Zeichne den Graphen der Sinusfunktion im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ und gib fünf verschiedene Funktionswerte exakt an. (4)

b) Zeichne den Graphen der Kosinusfunktion im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ und gib fünf verschiedene Funktionswerte exakt an. (4)

Lösungen:

a) Siehe Skript mit $\sin(0°) = 0$, $\sin(30°) = \frac{1}{2}$, $\sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\sin(90°) = 1$. (4)

b) Siehe Skript mit $\cos(90°) = 1$, $\cos(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ und $\cos(90°) = 0$. (4)

Aufgabe 2: Trigonometrische Gleichungen (3)

Für welche x mit $0 \le x \le 2\pi$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

a) $\cos^2(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = \frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{2}\sin(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$

c) $\sin^2(x)^2 + \sin(x) - 2 = 0$

d) $\sin(x)\cdot(\sin(x) + 3) = 0$

e) $\cos^2(x) - \cos(x) = 0$

Lösungen

a) Substitution $\cos(x) = z \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}$ oder $\cos(x) = 1$

$\Rightarrow L = \{0; \frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi; 2\pi\}$

b) Substitution $\sin(x) = z \Leftrightarrow \frac{3}{2}z^2 - z - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$ oder $\sin(x) = 1$

$\Rightarrow L = \{\frac{1}{6}\pi; \frac{1}{2}\pi; \frac{5}{6}\pi\}$

c) Substitution $\sin(x) = z \Rightarrow z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \sin(x) = -2$ oder $\sin(x) = 1 \Rightarrow L = \{\frac{\pi}{2}\}$

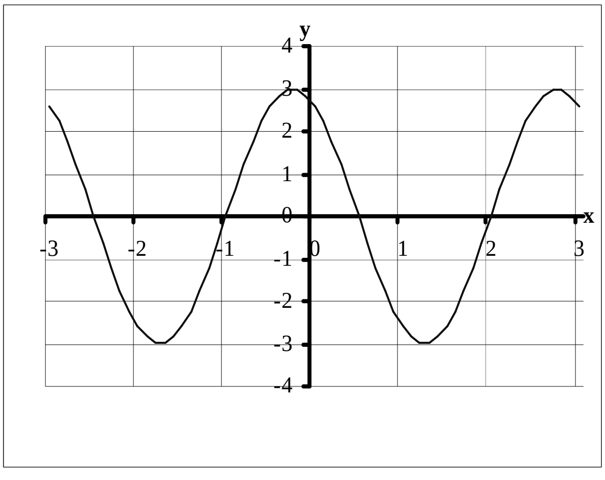
d) Substitution $\sin(x) = z \Rightarrow z\cdot(z + 3) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ oder $z = -3 \Leftrightarrow \sin(x) = -3$ oder $\sin(x) = 0 \Rightarrow L = \{0; \pi; 2\pi\}$

e) Substitution $\cos(x) = z \Leftrightarrow z(z - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$ oder $z = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ oder $\cos(x) = 1$

$\Rightarrow L = \{0; \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; 2\pi\}$

Aufgabe 3: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (2)

Bestimme die Funktionsgleichung der rechts skizzierten Funktion. (Hinweis: $f(-1) = f(2) = 0$)



Lösung

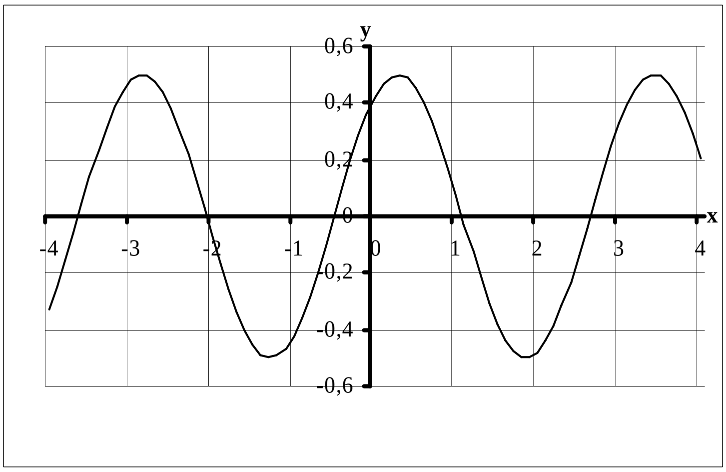
$f(x) = 3\cdot\sin(\frac{2}{3}\pi(x + 1))$

Aufgabe 4: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (2)

Bestimme die Periode p sowie die Nullstellen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 1)$ und skizziere ihr Schaubild im Bereich $[-p; p[$.

Lösung

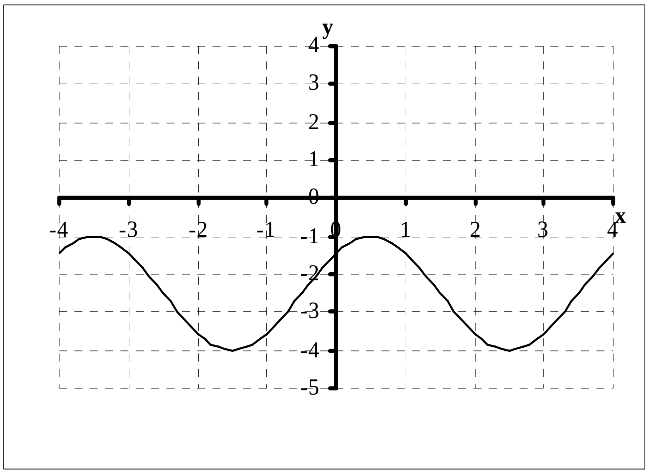
$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 1) = f(x) = \frac{1}{2}\sin[2(x + \frac{1}{2})]$ ⇒ Amplitude $A = \frac{1}{2}$, Periode $p = \pi$ und Phasenverschiebung um $\frac{1}{2}$ nach links ⇒ Nullstellen bei $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2} + \pi$:



Aufgabe 5: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

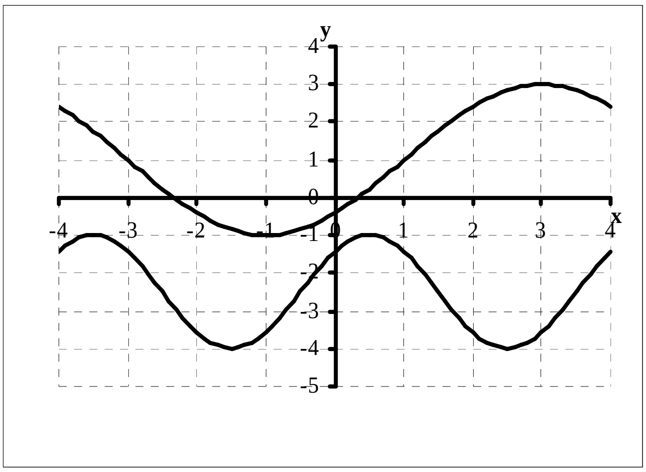
b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = 2\cdot\sin[\frac{\pi}{4}(x - 1)] + 1$ in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2}\cdot\sin[\frac{\pi}{2}(x + \frac{1}{2})] - \frac{5}{2}$. (4)

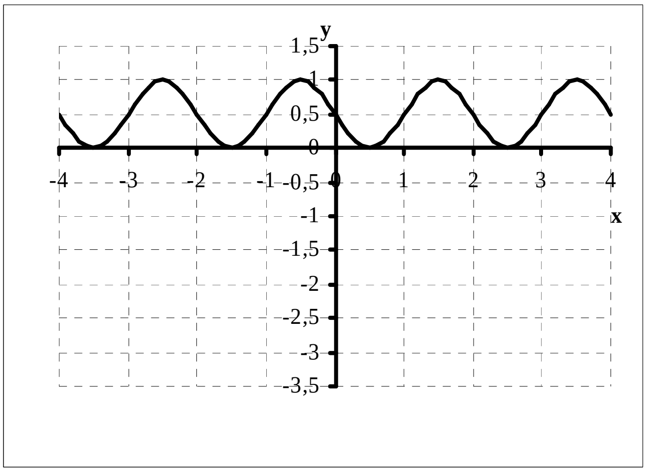
b) Skizze siehe rechts (4)



Aufgabe 6: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

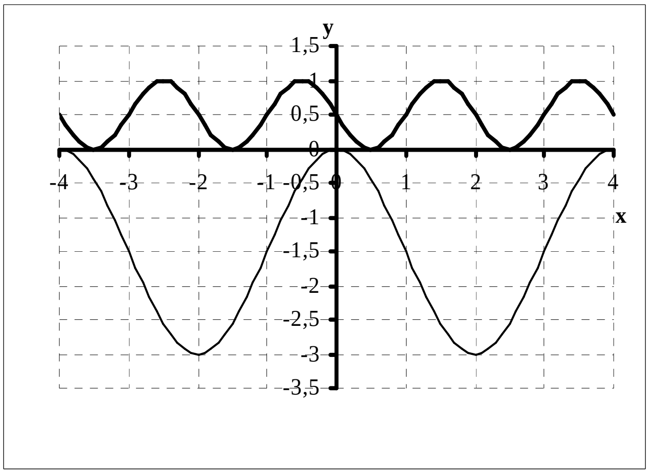
b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{3}{2}\cdot\sin[\frac{\pi}{2}(x + 1)] - \frac{3}{2}$ in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot\sin[\pi (x - 1)] + \frac{1}{2}$. (4)

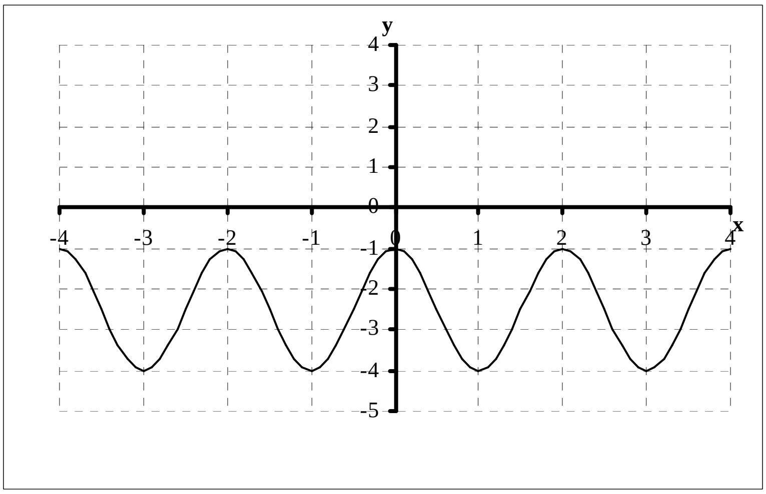
b) Skizze siehe rechts . (4)



Aufgabe 7: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

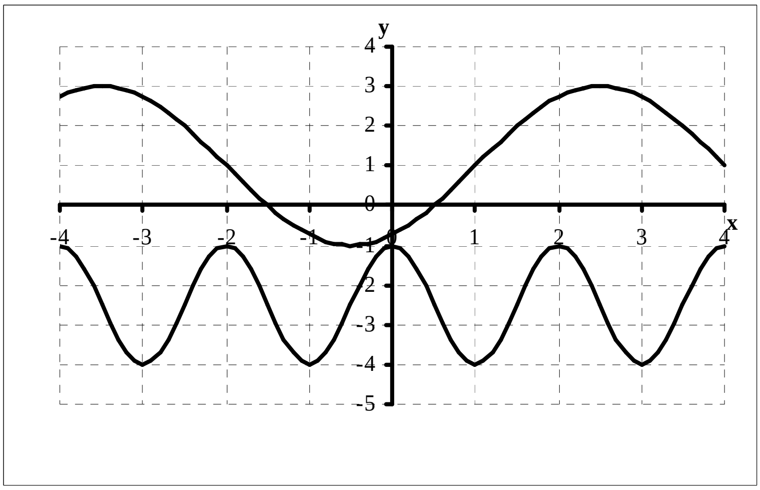
b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = 2\cdot\sin[\frac{\pi}{3}(x - 1)] + 1$ in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2}\cdot\sin[\pi (x + \frac{1}{2})] - \frac{5}{2}$. (4)

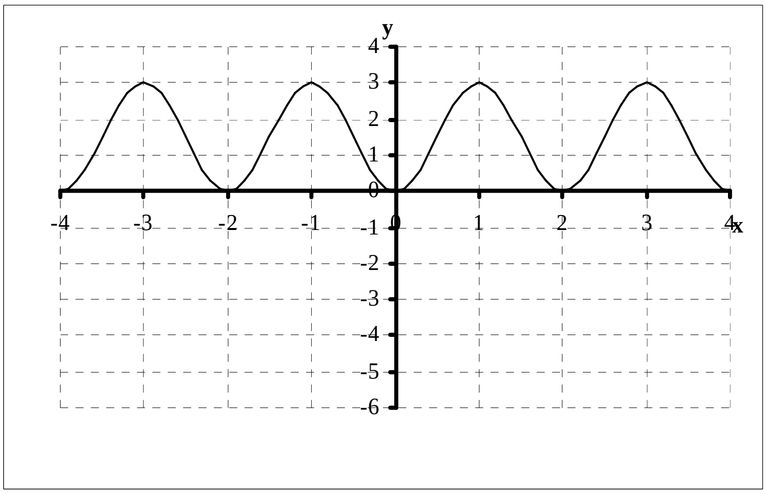
b) Skizze siehe rechts. (4)



Aufgabe 8: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (8)

a) Gib die Gleichung der rechts skizzierten Funktion an (4)

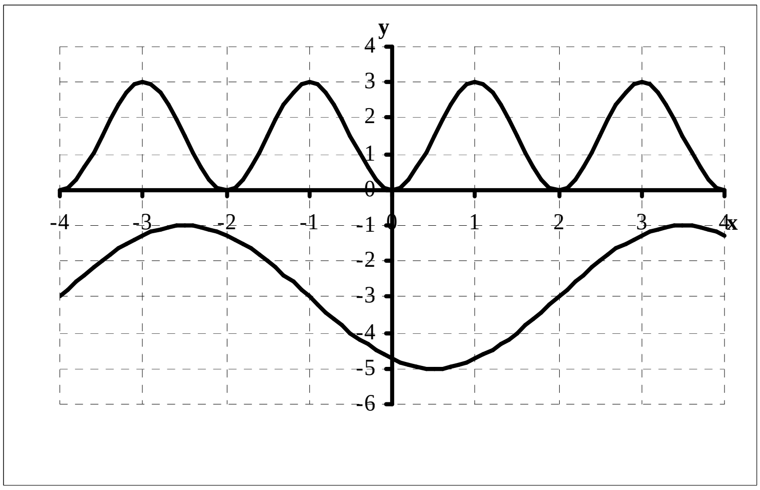
b) Skizziere das Schaubild der Funktion $f(x) = 2\cdot\sin[\frac{\pi}{3}(x - 2)] - 3$ in das Koordinatensystem aus a) (4)



Lösung

a) $f(x) = \frac{3}{2}\cdot\sin[\pi(x - \frac{1}{2})] + \frac{3}{2}$. (4)

b) Skizze siehe rechts (4)



Aufgabe 9: Verschiebung und Streckung trigonometrischer Funktionen (5)

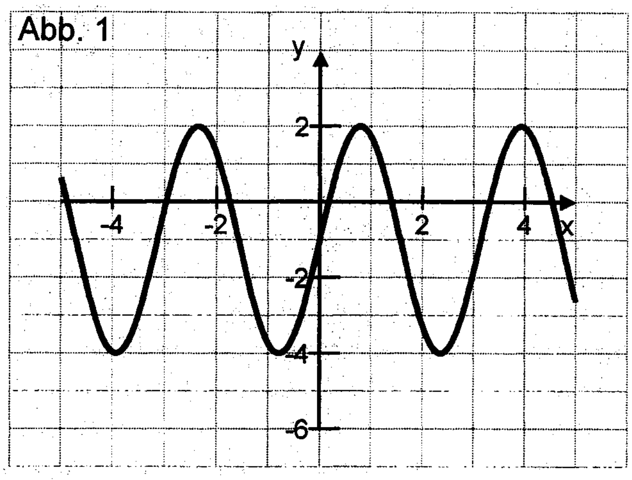
Gegeben sind die Funktion f mit f (x) = $-3\cdot\sin(2x) - 1$ sowie vier Schaubilder.

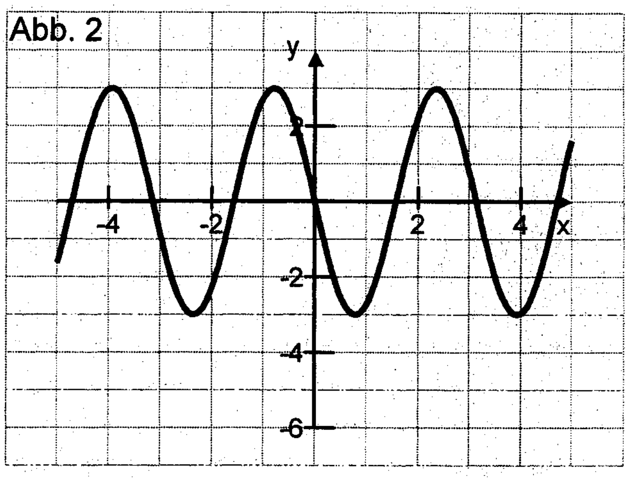
a) Geben Sie die charakteristischen Eigenschaften des Schaubilds von f an, die man ohne weitere Rechnung dem Funktionsterm entnehmen kann.

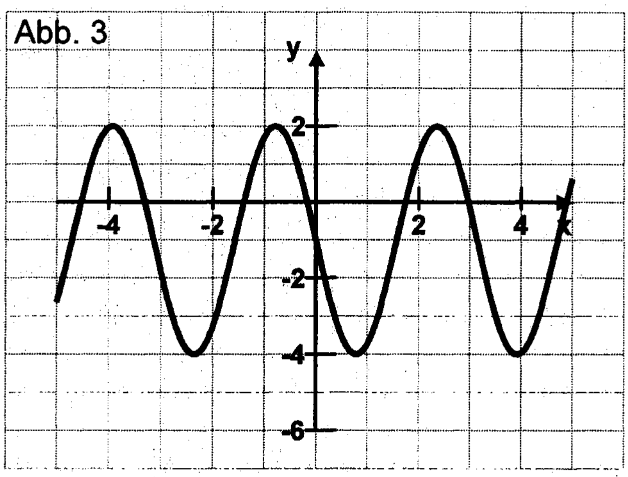
b) Welches Schaubild gehört zu f?

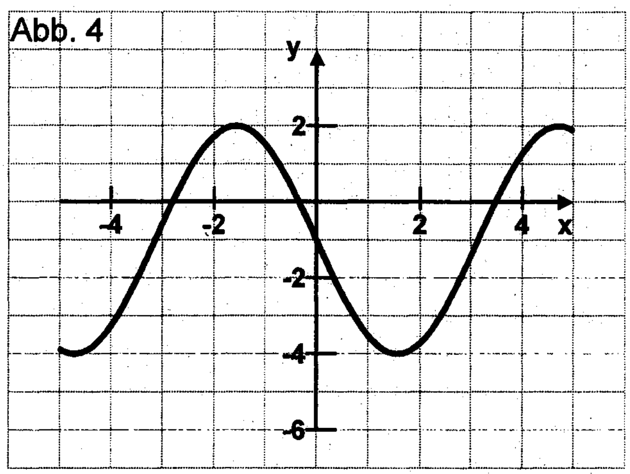
c) Geben Sie zu jedem anderen Schaubild mindestens eine Eigenschaft an, die mit den Funktionseigenschaften von f nicht vereinbar ist.

d)









Lösung

a) Amplitude 3 LE wegen Faktor −3, Periode p = π wegen Faktor 2, Verschiebung um 1 LE nach unten wegen Summand −1 und Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts oder links bzw. Spiegelung an y = −1 wegen Faktor−3.

b) Abb. 1: $y = 3\cdot\sin(2x) - 1$ (falsche Phase)
Abb. 2: $y = 3\cdot\sin(2x)$ (fehlende Verschiebung)
Abb. 3: $f(x) = 3\cdot\sin(2x) - 1$ (richtiges Bild)
Abb. 4: $y = 3\cdot\sin(x) - 1$ (falsche Periode)

Aufgabe 10: Trigonometrische und rationale Funktionen im Vergleich (4)
Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen jeweils mit sämtlichen Asymptoten:

Schaubild 1

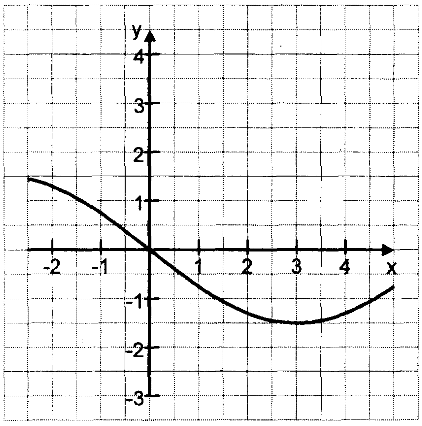


Schaubild 2

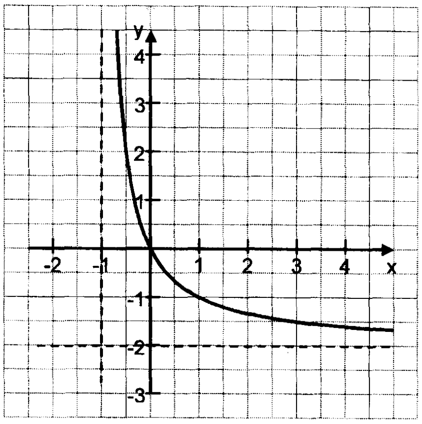


Schaubild 3

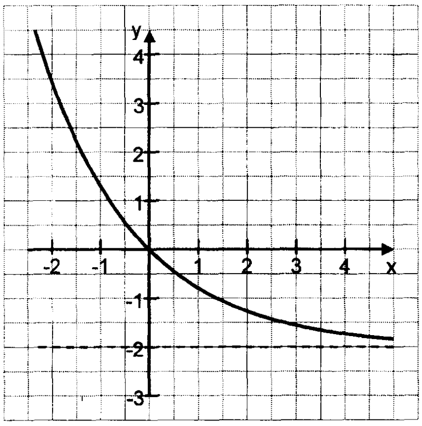
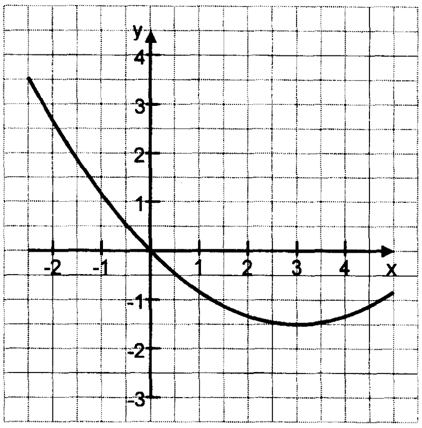


Schaubild 4



Drei dieser vier Schaubilder werden beschreiben durch die Funktionen f, g und h mit $f(x) = \frac{-2x}{x+a}$,
$g(x) = -2 + b \cdot e^{-0{,}5x}$ und $h(x) = c \cdot x^2 - x$.

a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h jeweils das passende Schaubild zu und begründen Sie. (3)
b) Bestimmen Sie die Werte für a und b. (2)

Lösung

a) f gehört zu Schaubild 2, da nur dieses Schaubild eine senkrechte Asymptote besitzt. g gehört zu Schaubild 3, da nur noch dieses Schaubild eine waagerechte Asymptote besitzt. h gehört zu Schaubild 4, da nur dieses Schaubild eine Parabel zweiter Ordnung zeigt.
b) Die senkrechte Asymptote $x = -1$ führt auf $a = 1$. $g(0) = 0$ führt auf $b = 2$.

Aufgabe 11: Funktionsanpassung bei rationalen und trigonometrischen Funktionen (4)
Geben Sie jeweils mit Begründung einen Funktionsterm der Funktionen f und g mit den folgenden Eigenschaften an:

a) Das Schaubild von f hat Asymptoten mit den Gleichungen $x = 2$ und $y = 1$
b) g ist periodisch mit der Periode π und hat den Wertebereich $[-3; 3]$

Lösung

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$, denn für $x \to \pm\infty$ strebt der echt gebrochenrationale Rest $\frac{1}{x-2}$ gegen Null und daher f(x) gegen den ganzrationalen Hauptteil 1. f hat also die waagrechte Asymptote $y = 1$. Für $x \to 2$ dagegen strebt der Rest $\frac{1}{x-2}$ gegen ∞. f hat also die senkrechte Asymptote $x = 2$.
b) $f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$ hat die Amplitude 3 und die Periodendauer $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$