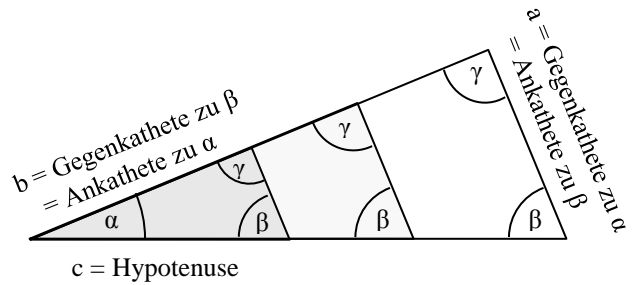


4.8. Trigonometrische Funktionen

4.8.1. Definitionen

Nach dem **Winkelsummensatz** ist in beliebigen Dreiecken $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, im **rechtwinkligen Dreieck** gilt wegen $\gamma = 90^\circ$ daher $\alpha + \beta = 90^\circ$.

In einem rechtwinkligen Dreieck werden die **Form** und nach dem **Strahlensatz** auch die **Seitenverhältnisse** also schon durch einen **einzig** Winkel α oder β festgelegt. Die folgenden Definitionen die **trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse** sind also eindeutig:



$$\text{Sinus: } \sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$$

$$\text{Kosinus: } \cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$$

$$\text{Tangens: } \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

Um nun mit Hilfe der im Taschenrechner gespeicherten Winkelfunktionen alle Seiten und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, genügt die Angabe einer Seite und einer weiteren Größe (Seite oder Winkel).

Beispiel 1

Gegeben sind $a = 4 \text{ cm}$ und $\alpha = 40^\circ$. Berechne die restlichen Größen b , c und β .

Lösung

$$\text{Winkelsumme: } \beta = 90^\circ - \alpha = \underline{50^\circ}$$

$$\text{Sinus: } \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \underline{c} = \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{4 \text{ cm}}{\sin(40^\circ)} \approx \underline{6,22 \text{ cm}}$$

$$\text{Pythagoras: } a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \underline{b} = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \underline{4,77 \text{ cm}}$$

Beispiel 2

Gegeben sind $a = 5 \text{ cm}$ und $c = 8 \text{ cm}$. Berechne die restlichen Größen b , α und β .

Lösung

$$\text{Sinus: } \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \underline{\alpha} = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx \underline{38,7^\circ}$$

$$\text{Winkelsumme: } \beta = 90^\circ - \alpha = \underline{51,3^\circ}$$

$$\text{Pythagoras: } a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \underline{c} = \sqrt{a^2 + b^2} = \underline{\sqrt{89} \text{ cm}}$$

Übungen. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 1

4.8.2. Grundlegende Beziehungen

Satz

Im rechtwinkligen Dreieck ($0 \leq \alpha, \beta \leq 90^\circ$) gelten die folgenden Beziehungen:

$$1. \sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$2. \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{c}{c} \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$3. \text{Pythagoras: } a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow [\sin(\alpha)]^2 + [\cos(\alpha)]^2 = 1$$

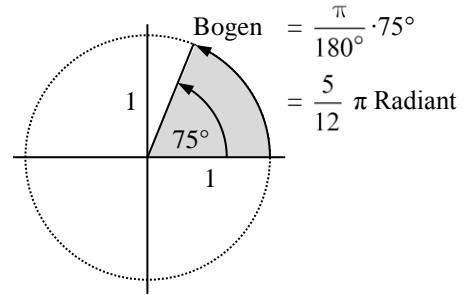
Übungen. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 2 - 5

4.8.3. Das Bogenmaß

Definition

Die zum Winkel α gehörenden Bogenlänge des Einheitskreises mit Radius $r = 1$ heißt **Bogenmaß** des Winkels. Eine volle Drehung von 360° entspricht dem Umfang $2\pi = 2\pi$ des Einheitskreises. Eine halbe Umdrehung von 180° hat entsprechend die Bogenlänge π . Allgemein gilt für die Umrechnung von Grad (**Degree**) in Bogenmaß (**Radiant**):

$$\text{Winkel } \alpha \text{ in Bogenmaß} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{Winkel } \alpha \text{ in Grad.}$$

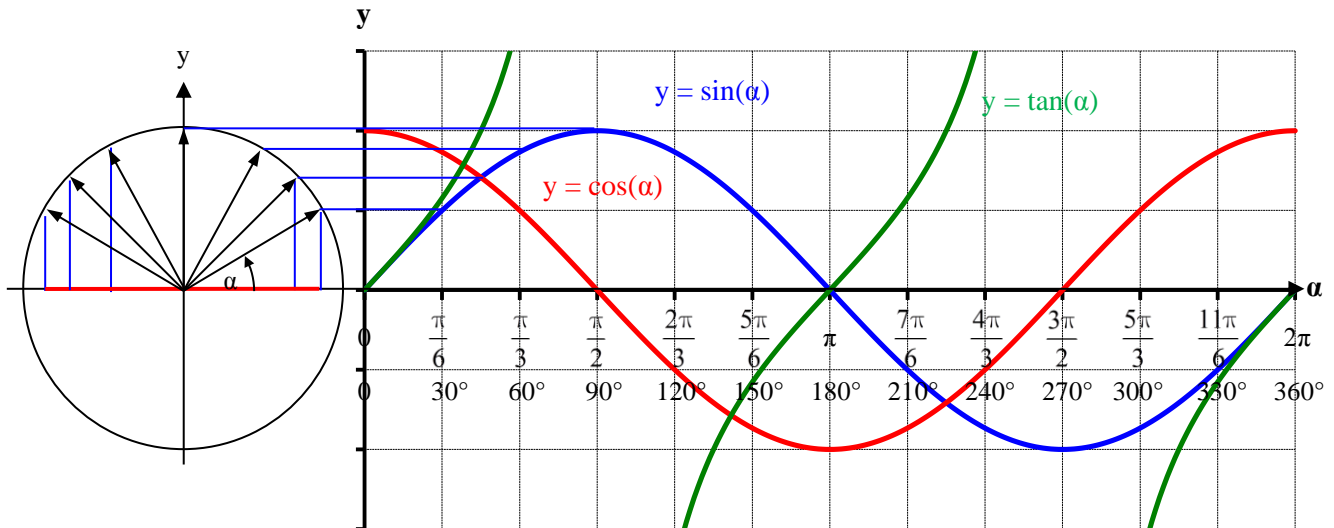


Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 6

4.8.4. Schaubilder der trigonometrischen Funktionen

Definition

Sei $P(x|y)$ der Endpunkt eines Zeigers von der Länge 1, der sich um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ von der positiven x -Achse aus nach links ($\alpha > 0$) oder rechts ($\alpha < 0$) gedreht hat. Dann definiert man die **Winkelfunktionen** $\sin(\alpha) = y$, $\cos(\alpha) = x$ und $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$

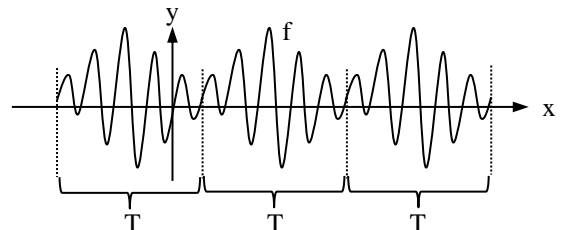


Beispiel: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen Nr. 1

4.8.5. Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Definition: Eine Funktion f heißt **periodisch** mit der **Periode** T , wenn sich ihr Verlauf nach jeweils dieser Periode T wiederholt, d.h., wenn

$$f(x) = f(x + T) \text{ für alle } x \in D.$$



Beispiel: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen Nr. 2

Funktion $f(\alpha) =$	Symmetrie $f(-\alpha) =$	Nachbarwinkel $f(\pi - \alpha) =$	Periode $T =$	Definitionsbereich $D =$	Wertebereich $W =$
$\sin(\alpha)$	$-f(\alpha)$ (ungerade)	$f(\alpha)$	2π	\mathbb{R}	$[-1;1]$
$\cos(\alpha)$	$f(\alpha)$ (gerade)	$-f(\alpha)$	2π	\mathbb{R}	$[-1;1]$
$\tan(\alpha)$	$-f(\alpha)$ (ungerade)	$-f(\alpha)$	π	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + z \cdot \pi : z \in \mathbb{Z} \}$	\mathbb{R}

4.8.6. Winkelgeschwindigkeit und Amplitude

Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 a)

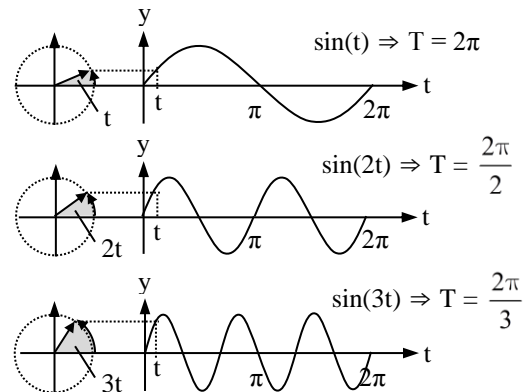
Winkelgeschwindigkeit und Periode

Der Zeiger dreht sich mit der konstanten

Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\alpha}{t}$. Der Winkel zur Zeit t ist dann $\alpha = \omega \cdot t$ und der senkrechte Ausschlag des Zeigers wird zu $y(t) = \sin(\alpha) = \sin(\omega \cdot t)$.

Für eine volle Umdrehung um den Winkel $\alpha = 2\pi$ benötigt der Zeiger genau eine **Periode** T .

Die Winkelgeschwindigkeit ist also $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Je größer die Winkelgeschwindigkeit ω , desto schneller dreht sich der Zeiger und desto kürzer wird die Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



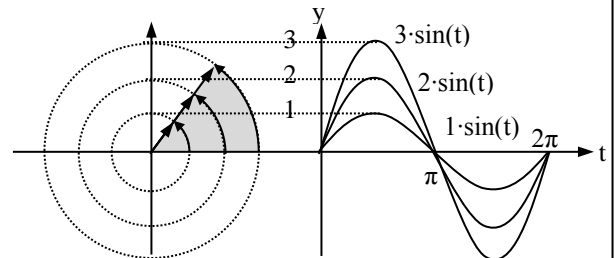
Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 b)

Die Amplitude

Die Länge des Zeigers bestimmt den maximalen Ausschlag der Sinusfunktion und wird als **Amplitude (Verstärkung)** A bezeichnet.

Der Ausschlag eines Zeigers mit der Länge A und der Winkelgeschwindigkeit ω ist dann

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



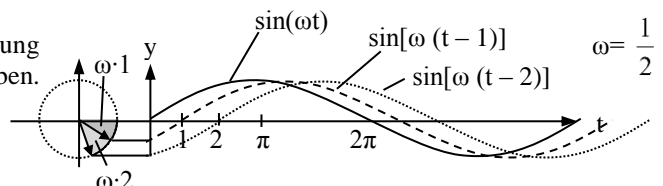
4.8.7. Ruhelage und Phase

Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 c)

Die Phase

Wenn der Zeiger um die **Phase** t_0 verspätet mit der Drehung beginnt, ist der Graph um t_0 in Richtung der t -Achse verschoben. Seine Gleichung ist dann

$$y(t) = A \cdot \sin[\omega(t - t_0)]$$



Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 d)

Die Ruhelage

Wird der Zeiger vertikal in eine neue **Ruhelage** y_0 verschoben, so verschiebt sich der Graph entsprechend um y_0 in Richtung der y-Achse. Seine Gleichung ist dann

$$y(t) = A \cdot \sin[\omega(t - t_0)] + y_0$$

mit

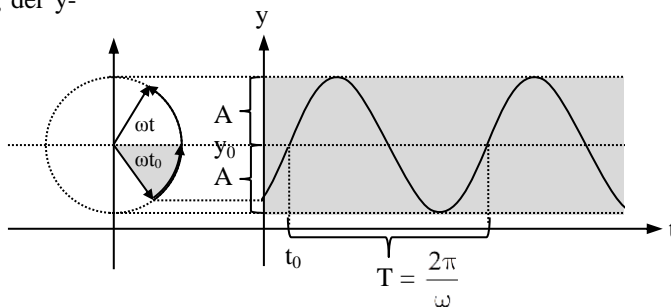
A = Amplitude = Zeigerlänge

ω = Winkelgeschwindigkeit des Zeigers

T = Periode = Dauer eines Umlaufs

t_0 = Phase = Verspätung des Zeigers

y_0 = vertikale Verschiebung des Zeigers



Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 8

4.8.8. Der Sinussatz

Sinussatz:

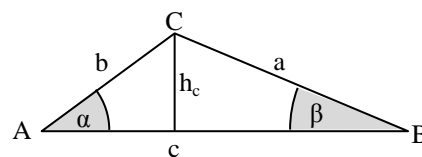
In beliebigen Dreiecken gilt $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.

Veranschaulichung:

Je größer der Winkel, desto länger die gegenüberliegende Seite.

Beweis für spitze Winkel (für stumpfe Winkel mit $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$):

$$b \cdot \sin(\alpha) = h_c = a \cdot \sin(\beta) \Leftrightarrow b \cdot \sin(\alpha) = a \cdot \sin(\beta) \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$



Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 9 und 10

4.8.9. Der Kosinussatz:

Kosinussatz

In beliebigen Dreiecken gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$

Veranschaulichung:

Der Kosinussatz ist die **Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras** für Winkel $\gamma \neq 90^\circ$:

a) Für **spitze** Winkel $\gamma < 90^\circ$ ist $\cos(\gamma) > 0$

⇒ Korrekturglied $-2ab \cdot \cos(\gamma) < 0$,

⇒ c ist **kürzer** als bei Pythagoras. (**helles Dreieck**)

b) Für **rechte** Winkel $\gamma = 90^\circ$ ist $\cos(\gamma) = 0$

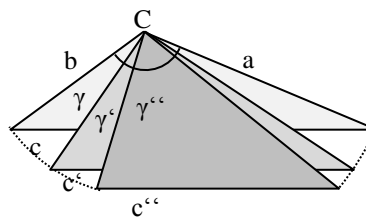
⇒ Korrekturglied $-2ab \cdot \cos(\gamma) = 0$,

Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$. (**mittleres Dreieck**)

c) Für **stumpfe** Winkel $\gamma > 90^\circ$ ist $\cos(\gamma) < 0$

⇒ Korrekturglied $-2ab \cdot \cos(\gamma) > 0$,

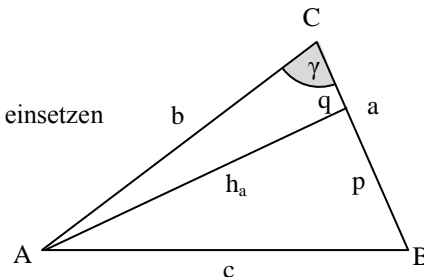
⇒ c ist **länger** als bei Pythagoras (**dunkles Dreieck**)



Beweis für spitze Winkel (für stumpfe Winkel analog mit $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)$):

$$\begin{aligned} c^2 &= h_a^2 + p^2 \\ &= (b \cdot \sin(\gamma))^2 + (a - q)^2 \\ &= (b \cdot \sin(\gamma))^2 + a^2 - 2aq + q^2 \\ &= b^2 \cdot (\sin(\gamma))^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) + b^2 \cdot (\cos(\gamma))^2 \\ &= b^2 \cdot [(\sin(\gamma))^2 + (\cos(\gamma))^2] + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \end{aligned}$$

$| h_a = b \cdot \sin(\gamma)$ bzw. $p = a - q$ einsetzen
 $|$ Klammern auflösen
 $| q = b \cdot \cos(\gamma)$
 $| b^2$ ausklammern
 $|$ Pythagoras



Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 11 und 12