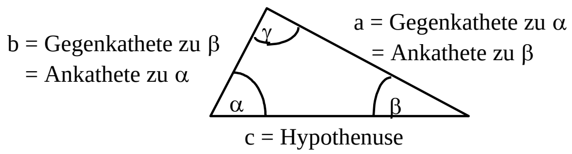
4.8. Trigonometrische Funktionen

4.8.1. Definitionen



Nach dem **Winkelsummensatz** ist in beliebigen Dreiecken $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, im **rechtwinkligen Dreieck** gilt wegen $\gamma = 90°$ daher $\alpha + \beta = 90°$
Nach dem **Strahlensatz** sind rechtwinklige Dreiecke **ähnlich**, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen. Die folgende Definition ist also eindeutig:

Definition
Im rechtwinkligen Dreieck ($0 \leq \alpha, \beta \leq 90°$) sind die trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens durch die folgenden Seitenverhältnisse definiert:
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$ und $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$.

Übungen. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 1

4.8.2. Grundlegende Beziehungen

Satz
Im rechtwinkligen Dreieck ($0 \leq \alpha, \beta \leq 90°$) gelten die folgenden Beziehungen:
1. $\sin(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(90° - \alpha)$
2. $\sin(\beta) = \cos(\alpha) = \cos(90° - \beta)$
1. $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{c}{c}\,\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
2. Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow [\sin(\alpha)]^2 + [\cos(\alpha)]^2 = 1$

Übungen. Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 2 - 5

4.8.3. Das Bogenmaß

Definition
Die zum Winkel α gehörenden Bogenlänge des Einheitskreises heißt **Bogenmaß** des Winkels. Für die Umrechnung von Grad (**Degree**) in Bogenmaß (**Radiant**) gilt:
Winkel α in Bogenmaß = $\frac{\pi}{180}$ ·Winkel α in Grad.

Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 6

4.8.4. Schaubilder der trigonometrischen Funktionen

Definition
Sei P(x|y) der Endpunkt eines Zeigers von der Länge 1, der sich um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ von der positiven x-Achse aus nach links ($\alpha > 0$) oder rechts ($\alpha < 0$) gedreht hat. Dann definiert man die **Winkelfunktionen** $\sin(\alpha) = x$, $\cos(\alpha) = y$ und $\tan(\alpha) = \frac{x}{y}$

Beispiel: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen Nr. 1

4.8.5. Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen

Definition
Eine Funktion f heißt **periodisch** mit der **Periode** T, falls $f(x) = f(x + T)$ für alle $x \in D$.

Beispiel: Schaubilder der trigonometrischen Funktionen Nr. 2

Funktion f(x) =	**Symmetrie f(-x) =**	**Nachbarwinkel f(π - x) =**	**Periode T =**	**Definitionsbereich D =**	**Wertebereich W =**
sin(x)	-f(x) (ungerade)	f(x)	2π	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
cos(x)	f(x) (gerade)	-f(x)	2π	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
tan(x)	-f(x) (ungerade)	-f(x)	π	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + z\cdot\pi: z \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

4.8.6. Streckung und Verschiebung

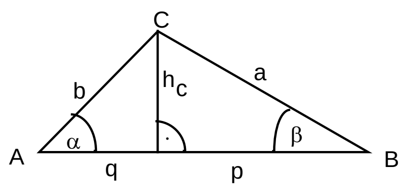
Beispiele: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 a)

Streckung und Verschiebung der trigonometrischen Funktionen
Das Schaubild von $f(x) = A\cdot\sin[\omega(x - x_0)] + y_0$ entsteht aus dem Schaubild von $y = \sin(x)$ durch
- Streckung in y-Richtung um die **Amplitude** A.
- Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{\omega}$ auf die **Periode** $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Verschiebung in x-Richtung um y_0
- Verschiebung in x-Richtung um die **Phase** x_0.

Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 7 b) - d) und Nr. 8

4.8.7. Der Sinussatz

Sinussatz:
In beliebigen Dreiecken gilt $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$.
Beweis für spitze Winkel (für stumpfe Winkel analog):
$h_C = b\cdot\sin(\alpha) = a\cdot\sin(\beta) \Leftrightarrow b\cdot\sin(\alpha) = a\cdot\sin(\beta) \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$.



Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 9 und 10

4.8.8. Der Kosinussatz:

Kosinussatz
In beliebigen Dreiecken gilt $c^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$
Beweis für spitze Winkel (für stumpfe Winkel analog):

$$\begin{aligned}
a^2 &= h_c^2 + p^2 && \mid h = b\cdot\sin(\alpha) \text{ bzw. } p = c - q \text{ einsetzen}\\
&= (b\cdot\sin(\alpha))^2 + (c - q)^2 && \mid \text{Klammern auflösen}\\
&= (b\cdot\sin(\alpha))^2 + c^2 - 2cq + q^2 && \mid q = b\cdot\cos(\alpha)\\
&= b^2\cdot(\sin(\alpha))^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha + b^2\cdot(\cos(\alpha))^2 && \mid b^2 \text{ ausklammern}\\
&= b^2\cdot[(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2] + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha) && \mid \text{Pythagoras}\\
&= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen Nr. 11 und 12