

5.1. Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit

Aufgabe 1: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

- a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten, hebbare Lücken sowie Vorzeichenwechsel und zeichnen Sie eine Schaubildskizze.
- b) Von welchem $x > 0$ an wird die Abweichung (= Differenz) zwischen $f(x) = \frac{3x-3}{x+1}$ und ihrem Grenzwert $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ kleiner als $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $\varepsilon = 0,001$ und $\varepsilon = 10^{-6}$?

Aufgabe 2: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten für gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ strebendes x und berechnen Sie, falls möglich, die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Geben Sie außerdem an, für welche x der Abstand $|f(x) - a|$ kleiner als $\varepsilon = 0,0001$ wird.

- a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ c) $f(x) = \frac{3x^2-12}{x-1}$ e) $f(x) = 2^x$ g) $f(x) = \frac{2^x}{x^2}$ i) $f(x) = x \cdot \sin x$
- b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{3x^2-12}{x^2-1}$ f) $f(x) = 2^{-x}$ h) $f(x) = \frac{x^2}{2^x}$ j) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Aufgabe 3: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

Untersuchen Sie die Funktion f auf Definitionsbereich, Achsenschnittpunkte, Asymptoten sowie hebbare Lücken und zeichnen Sie eine Schaubildskizze.

- a) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{2^x-4}{x-2}$

Aufgabe 4: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf ihr Verhalten für gegen x_0 strebendes x . Berechnen Sie, falls möglich, den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

- a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ für $x_0 = 1$ g) $f(x) = \frac{2^x-8}{x-3}$ für $x_0 = 3$
- b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ für $x_0 = 1$ h) $f(x) = \frac{1}{2^x}$ für $x_0 = 0$
- c) $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ für $x_0 = 2$ i) $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2}$ für $x_0 = 0$
- d) $f(x) = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ j) $f(x) = \frac{x}{\log_2 x}$ für $x_0 = 0$
- e) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 3x+1 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$ für $x_0 = -1$ k) $f(x) = x^2 \cdot \log_2(x^2)$ für $x_0 = 0$
- f) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{für } x \leq 2 \\ -x+7 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ für $x_0 = 2$ l) $f(x) = x^2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x_0 = 0$

Aufgabe 5: Stetigkeit

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

- a) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ x^2-4x+4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$
- b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ d) $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{für } x \leq -2 \\ 2x-2 & \text{für } x > -2 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{für } x < -2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{für } x \geq -2 \end{cases}$

Aufgabe 6: Stetigkeit

Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Nahtstelle x_0 stetig ist.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 8 & \text{für } x \leq 3 \\ \frac{1}{2x-t} & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 & \text{für } x < -1 \\ 2x^2 - 4tx + 2t^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2tx - \frac{4t}{3} & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x+t} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{t}{2}x^2 + 2x - 5t & \text{für } x \leq 2 \\ -2x^2 + \frac{3t}{2}x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

5.1. Lösungen zu den Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit

Aufgabe 1: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

siehe Skript

Aufgabe 2: Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$

- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x < -9999$ oder $x > 10001$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x < -19999$ oder $x > 20001$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - 3x) = 0 \Rightarrow$ schiefe Asymptote $y = 3x$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 3$ mit $|f(x) - 3| < 0,0001$ für $x < -\sqrt{90001}$ oder $x > \sqrt{90001}$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x < \log_2 0,0001 \approx -13,28$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x > -\log_2 0,0001 \approx 13,28$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x < -7,48$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x > 22,23$
- $f(x) \rightarrow \pm \infty$ für $x \rightarrow \pm \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ mit $|f(x) - 0| < 0,0001$ für $x < -10000$ oder $x > 10000$

Aufgabe 3: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

siehe Skript

Aufgabe 4: Grenzwerte für $x \rightarrow x_0$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit **senkrechter Asymptote** $x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existiert nicht
- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit **hebbarer Lücke** $L(1|2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ mit **hebbarer Lücke** $L(2|12) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 12$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ mit **hebbarer Lücke** $L(x_0|3x_0^2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 3x_0^2$
- $D = \mathbb{R}$ aber **Sprungstelle** bei $x_0 = -1$ mit $f(-1) = -2$ und $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$
- $D = \mathbb{R}$ ist **stetig** mit $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit **hebbarer Lücke** $\approx L(3|5,545177) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 8 \cdot \ln(2) \approx 5,545177$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit **senkrechter Asymptote** $x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit **hebbarer Lücke** $L(0|0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- $D =]0; 1[\cup]1; \infty[$ mit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit **hebbarer Lücke** $L(0|0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$
- $D =]0; \infty[$ mit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Aufgabe 5: Stetigkeit

- f ist stetig auf $D = \mathbb{R}$
- $f = \operatorname{sgn}(x)$ ist stetig auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $D = \mathbb{R}$ mit Sprungstelle bei $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = f(0)$
- $D = \mathbb{R}$ mit Sprungstelle bei $x = -2$: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -6 \neq -5 = f(-2)$
- f ist stetig auf $D = \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit Sprungstelle bei $x = -2$ und senkrechter Asymptote bei $x = 3$

Aufgabe 6: Stetigkeit

- $t = \frac{113}{19}$
- $t_{1/2} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $t = \frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}$
- $t = 2$