5.1. Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

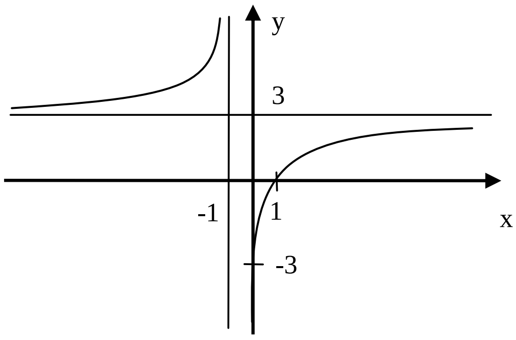
5.1.1. Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Beispiel: Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit Nr. 1 a)

Beispiel $f(x) = \frac{3x-3}{x+1} = \frac{3(x-1)}{x+1} = 3 - \frac{6}{x+1}$

Wertetabelle und Verhalten für $x \to \pm\infty$

x	$3 - \frac{6}{x+1}$
$-\infty$	3
↑	↑
−10000	3,000
−1000	3,006
−100	3,060
100	2,941
1000	2,994
10000	2,999
↓	↓
$+\infty$	3



$f(x) \to 3$ für $x \to \pm\infty$ bzw. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$

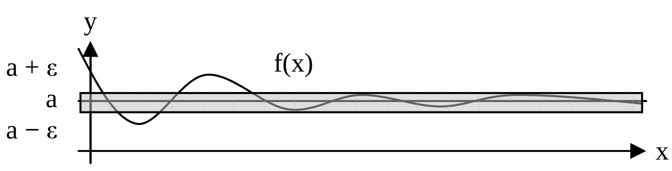
Definition: Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$
Eine Funktion f strebt für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ gegen den **Grenzwert** (lat. limes) a, wenn die Funktionswerte f(x) für genügend kleine bzw. große x beliebig nahe an die Zahl a herankommen.
Schreibweise: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.
Das Schaubild von f besitzt dann für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ eine **waagrechte Asymptote** $y = a$.

Beispiel: Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit Nr. 1 b)

Der Ausdruck „**beliebig nahe**" lässt sich mit Hilfe des aus der Technik bekannten Begriffs der **Abweichung** bzw. Fehlertoleranz zwischen Sollwert = Grenzwert a und Istwert = Funktionswert f(x) präzisieren: Für beliebig kleine ε gibt es ein $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$ so dass die Abweichung $|3 - f(x)|$ für alle x jenseits von x_ε kleiner als ε wird:

$$3 - f(x) < \varepsilon \Leftrightarrow 3 - \frac{3x-3}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{6}{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 6 < \varepsilon x + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{6}{\varepsilon} - 1 < x \Rightarrow L = [\frac{6}{\varepsilon}; +\infty[$$

Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$
Die Funktion f(x) hat für $\begin{Bmatrix} x \to +\infty \\ x \to -\infty \end{Bmatrix}$ den **Grenzwert (Limes)** a, wenn für jedes noch so kleine vorgegebene ε > 0 ein entsprechendes x_ε existiert, so dass für alle $\begin{Bmatrix} x > x_\varepsilon \\ x < x_\varepsilon \end{Bmatrix}$ der Abstand $|f(x) - a| < \varepsilon$ wird.
Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.



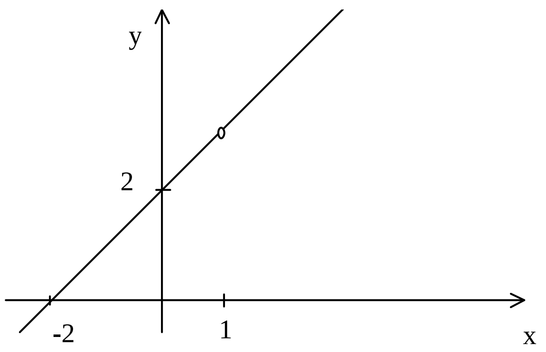
Übungen: Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit Nr. 2

5.1.2. Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

Beispiel: Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit Nr. 3 a)

Beispiel 1: $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$

hebbare Lücke $L(1|3)$
(Nennernullstelle, die gleichzeitig Zählernullstelle ist)
Die y-Koordinate der hebbaren Lücke wurde in 4.6.4. durch Einsetzen in die **stetige Fortsetzung** $\bar{f}(x) = x + 2$ ermittelt: $\bar{f}(1) = 3$. Da die stetige Fortsetzung für alle $x \neq 1$ mit f übereinstimmt, müsste sie eigentlich auch für $x = 1$ den passensten Wert liefern.



Diese Überlegung lässt sich ebenfalls mit Hilfe des **Grenzwertbegriffs** präzisieren: Die y-Koordinate lässt sich als **Grenzwert** der y-Werte von f(x) für gegen 1 strebendes x betrachten:

$$y_0 = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Die Bedingung $x \neq 1$ ist bei der Grenzwertermittlung erfüllt, da x beliebig nahe an die 1 heranrutscht, die 1 aber niemals ganz erreicht!

Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$
Die Funktion f hat für $x \to x_0$ den **Grenzwert** a, falls die Funktionswerte f(x) beliebig nahe an die Zahl a herankommen, wenn x gegen x_0 läuft. **Schreibweise**: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Beispiel: Aufgaben zu Grenzwerten und Stetigkeit Aufgabe 3 b)

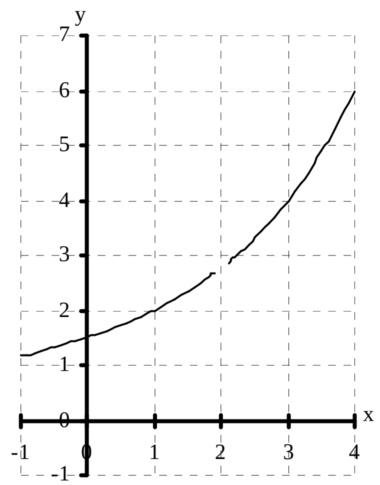
Beispiel 2: $f(x) = \frac{2^x - 4}{x - 2}$

An der Stelle $x_0 = 2$ befindet sich eine **hebbare Lücke.** (Zählernullstelle und gleichzeitig Nennernullstelle) Da man den Faktor $(x - 2)$ nicht kürzen kann, muss man für die Berechnung der y-Koordinate der hebbaren Lücke auf den **Grenzwert** zurückgreifen

$y_0 = \lim_{x\to 2} f(x) = 2{,}772....$

Sein exakter Wert lässt sich nicht feststellen (!) Er lässt sich auf **beliebig viele Stellen** genau bestimmen, indem man den Abstand zwischen x und x_0 weiter verringert.

x	f(x)
−1	1,17
0	1,5
1	2
1,9	2,679
1,99	2,763
1,999	2,771
1,9999	2,772
2	-
2,0001	2,772
2,001	2,773
2,01	2,782
2,1	2,871
3	4



Bemerkung: Der Grenzwert lässt sich mit Hilfe der **Grenzwertsätze** und der **Potenzreihenentwicklung** von $2^x = e^{x\cdot \ln 2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(x\cdot \ln 2)^n}{n!}$ auf den **natürlichen Logarithmus** zurückführen: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \lim_{x\to 2} \frac{2^{x-2} - 1}{x - 2} = 4\cdot \ln 2 \approx 2{,}77259...$ Das ist aber nur eine elegante Umformulierung, die auch keinen exakteren Wert liefert!

*Übungen**:** Aufgaben zur Grenzwerten und Stetigkeit Nr. 4*

5.1.3. Stetigkeit

Wird $f(x) = \frac{2^x - 4}{x - 2}$ an der Stelle $x_0 = 2$ durch einen „unpassenden“ Funktionswert ergänzt, z.B. $\bar{f}(2) = 2{,}7$, so ergibt sich eine **Unstetigkeit**: Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \bar{f}(x) = 2{,}772......$ existiert in diesem Fall zwar nach wie vor, er stimmt aber nicht mehr mit dem „unpassenden“ Funktionswert $\bar{f}(2) = 2{,}7$ überein. Beim Zeichnen müsste man an der Stelle $x_0 = 2$ **absetzen**, um einen isolierten Punkt $P(2|2{,}7)$ einzuzeichnen.

Definition: Stetigkeit
Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle $x_0 \in D$ falls der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ selbst übereinstimmt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Anschauliche Deutung
Eine Funktion ist stetig auf einem Intervall $[a; b] \subset D$, falls sich das Schaubild in diesem Bereich **ohne Absetzen des Stiftes** zeichnen lässt.

Übungen: Aufgaben zur Grenzwerten und Stetigkeit Nr. 5 und 6