

5.2. Aufgaben zur Differentialrechnung

Aufgabe 1: Differentialquotient

Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente am Schaubild von f an der Stelle x . Vereinfache den Differenzenquotienten mit Polynomdivision bei d) - f) und mit der 3. binomische Formel bei a) - c) und h) - i)

- a) $f(x) = x^2$ für $x = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ für $x = 2$ g) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x = 2$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ für $x = 3$ e) $f(x) = x^3 - 1$ für $x = -1$ h) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x = 1$
c) $f(x) = x^2 - 1$ für $x = -2$ f) $f(x) = x^3 - 1$ für $x = 1$ i) $f(x) = \sqrt{x}$ für $x = 4$

Aufgabe 2: Ableitungsfunktion

Bestimme die Ableitungsfunktion $f'(x)$ für alle $x \in D$.

- a) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^4$ e) $f(x) = x^{-2}$
b) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = x^{-1}$ f) $f(x) = x^{0,5}$

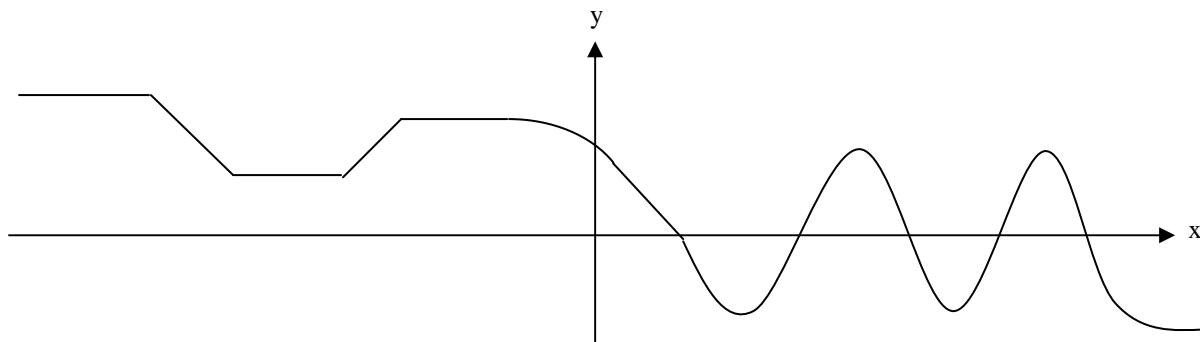
Aufgabe 3: Ableitungsregel für Potenzfunktionen

Bestimme die Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregel für Potenzfunktionen.

- a) $f(x) = x^{33}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
b) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 4: Graphisches Differenzieren

Skizziere den Verlauf der Ableitungsfunktion $f'(x)$.



Aufgabe 5: Ableitungsregeln für trigonometrische Funktionen

Bestimme die Funktionsgleichung der Tangente am Schaubild von f an der Stelle x mit Hilfe der Ableitungsregeln für die trigonometrischen Funktionen.

- a) $f(x) = \sin(x)$, $x = \frac{\pi}{4}$ b) $f(x) = \sin(x)$, $x = \frac{\pi}{2}$ c) $f(x) = \cos(x)$, $x = \frac{\pi}{6}$ d) $f(x) = \cos(x)$, $x = \frac{\pi}{3}$

Aufgabe 6: Faktor- und Summenregel

Bestimme die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe des Differentialquotienten.

- a) $f(x) = \frac{1}{5}x^2$ b) $f(x) = \frac{1}{5}x^3$ c) $f(x) = x^3 + x^2$ d) $f(x) = x^2 - x$

Aufgabe 7: Faktor- und Summenregel

Bestimme die Ableitung $f'(x)$ der folgenden Funktionen mit Hilfe der Faktor- und Summenregeln.

- a) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 54$ e) $f(x) = 3(x+2)^2 + 4$ g) $f(x) = 5 \cdot \sin(x)$
b) $f(x) = 3x + 4$ d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 10$ f) $f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3$ h) $f(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$

Aufgabe 8: Schnittwinkel von Kurven

Der Schnittwinkel zweier Kurven ist definiert als der kleiner der Winkel, den die Tangenten der beiden Kurven im Schnittpunkt einschließen. In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneiden sich die Schaubilder von f und g ?

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = -x^2 - x$

c) $f(x) = x^3 + 1$ und $g(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -2x^2 + x$ und $g(x) = -x^3 - x^2$

d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ und $g(x) = x^2 + x + 1$

Aufgabe 9: Tangenten mit vorgegebener Steigung

Bestimme alle Punkte $(x_0|y_0)$ an denen eine Tangente mit der Steigung $a = 2$ an die Schaubilder der folgenden Funktionen angelegt werden kann. Gib die Gleichungen aller möglichen Tangenten an und skizziere das Schaubild.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 4$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + 1$

e) $f(x) = -\frac{1}{2x} + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{4}{3}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$

Aufgabe 10: Tangenten durch vorgegebene Punkte

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten t durch den Punkt P am Schaubild der Funktion f :

a) $f(x) = x^2$ durch $P(1|-3)$

d) $f(x) = x^3 - 4x$ durch $P(-1|4)$

b) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ durch $P(-3|-6)$

e) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 4x - 3$ durch $P(0|-3)$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 11$ durch $P(1|2)$

f) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2$ durch $P(0|6)$

Aufgabe 11: Tangentenprobleme mit Parametern

a) Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten t durch den Punkt $P(u|0)$ mit $u \in \mathbb{R}$ am Graphen der Funktion $f(x) = x^2$.

b) Für welche t hat $f_t(x) = -2x^3 + tx^2$ an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ eine waagrechte Tangente?

c) Für welche t hat $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 2x$ **keine** waagrechte Tangente?

d) Für welche t steht die Tangente an der Parabel $f(x) = tx^2$ im Punkt $P(t|f(t))$ **senkrecht** zur Tangente im Punkt $Q(-t|f(-t))$?

Aufgabe 12: Hüllkurven von Geradenscharen

Zeige, dass die folgenden Geradenscharen keine gemeinsamen Punkte besitzen. Zeichne die Schaubilder für die angegebenen t in ein gemeinsames Koordinatensystem. Wie lautet die Gleichung der Hüllkurve $f(x)$? Welche Gemeinsamkeiten haben die Geraden und die Hüllkurven in den Punkte $P(t|f_t(t))$? Was ist eine Hüllkurve?

a) $g_t(x) = 2tx - t^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ für $t \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; \pm \frac{1}{2}, 0\}$

b) $g_t(x) = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$ mit $t \in \mathbb{R}^*$ für $t \in \{4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\}$

c) $g_t(x) = (3t^2 - 4)x - 2t^3$ mit $t \in \mathbb{R}$ für $t \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 2,5; \pm 1; \pm 0,5, 0\}$

Aufgabe 13: Normalen durch vorgegebene Punkte

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Normalen n am Schaubild der Funktion f

1. durch den gegebenen **Schnittpunkt S auf** der Kurve

2. durch den **Punkt P außerhalb** der Kurve:

a) $f(x) = x^2$ durch $S(2|4)$ bzw. durch $P(0|\frac{3}{2})$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ durch $S(2|\frac{1}{4})$ bzw. durch $P(0|\frac{1}{2})$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ durch $S(3|\frac{1}{3})$ bzw. durch $P(\frac{5}{2}|\frac{5}{2})$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ durch $S(4|2)$ bzw. durch $P(\frac{3}{2}|0)$

Aufgabe 14: Differenzierbarkeit

Bestimme die Vorschrift und den Definitionsbereich der Ableitungsfunktion $f'(x)$ und zeichne f und f' in ein gemeinsames Koordinatensystem.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -2 \\ -1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ 0,5x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{für } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

5.2. Lösungen zu den Aufgaben zur Differentialrechnung

Aufgabe 1: Differentialquotient

- a) $t(x) = 2x - 1$ c) $t(x) = -4x - 5$ e) $t(x) = 3x + 1$ g) $t(x) = -\frac{1}{4}x + 1$ i) $t(x) = \frac{1}{4}x + 1$
 b) $t(x) = 3x - \frac{9}{2}$ d) $t(x) = 6x - 8$ f) $t(x) = 3x - 3$ h) $t(x) = -2x + 3$

Aufgabe 2: Ableitungsfunktionen

a) und b) siehe Skript

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3 \cdot \Delta x + 6x^2 \cdot \Delta x^2 + 4x \cdot \Delta x^3 + \Delta x^4 - x^4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (4x^3 + 6x^2 \Delta x + 4x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2 \Delta x + 4x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3) = 4x^3. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x - x - \Delta x}{x \cdot (x+\Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x \cdot (x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

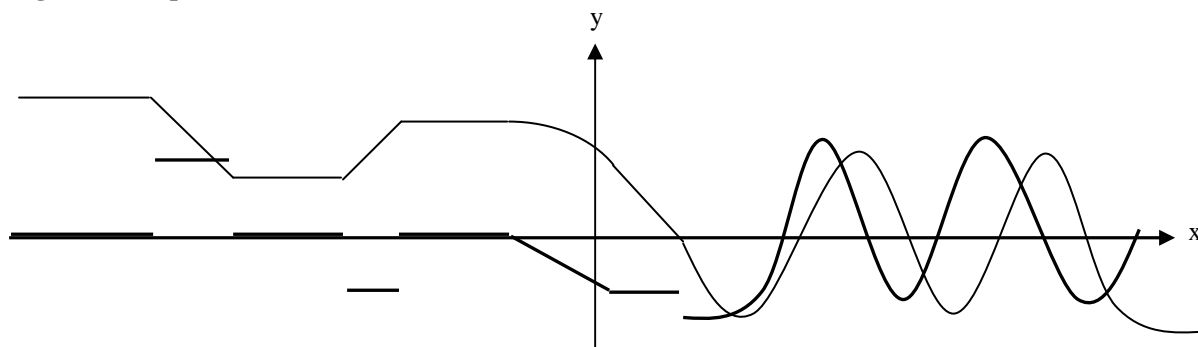
$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x^2 - x^2 - 2x \cdot \Delta x - \Delta x^2}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{-\Delta x(2x + \Delta x)}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2x + \Delta x)}{(x+\Delta x)^2 \cdot x^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{x + \Delta x - x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Ableitungsregel für Potenzfunktionen

- a) $f'(x) = 33x^{32}$ c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
 b) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ d) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ f) $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Aufgabe 4: Graphisches Differenzieren



Aufgabe 5: Ableitungsregeln für trigonometrische Funktionen

- a) $t(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $t(x) = 1$ d) $t(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$

Aufgabe 6: Faktor- und Summenregel

- a) $f'(x) = \frac{2}{5}x$ b) $f'(x) = \frac{3}{5}x^2$ c) $f'(x) = 3x^2 + 2x$ d) $f'(x) = 2x - 1$

Aufgabe 7: Faktor- und Summenregel

- a) $f'(x) = 3$ c) $f'(x) = 6x - 7$ e) $f'(x) = 6(x + 2)$ g) $f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$
 b) $f'(x) = 3$ d) $f'(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ f) $f(x) = \frac{3}{4}(x - 1)^2$ h) $f'(x) = -2\sin(x) - 3\cos(x)$

Aufgabe 8: Schnittwinkel

- a) $S_1(-\frac{1}{2} | \frac{1}{4})$ mit $\alpha_1 = 45^\circ$ und $S_2(-1 | 0)$ mit $\alpha_2 = 45^\circ$.
b) $S(0 | 0)$ mit $\alpha = 45^\circ$
c) $S_1(0 | 1)$ mit $\alpha_1 = 63,44^\circ$ und $S_2(\sqrt{2} | 2\sqrt{2} + 1)$ mit $\alpha_2 = 17,10^\circ$ und $S_3(-\sqrt{2} | -2\sqrt{2} + 1)$ mit $\alpha_3 = 17,10^\circ$
d) $S_1(0 | 1)$ mit $\alpha_1 = 18,43^\circ$ und $S_2(-1 | 1)$ mit $\alpha_2 = 0^\circ$ (Berührungspunkt!)

Aufgabe 9: Tangenten mit vorgegebener Steigung

- a) $t(x) = 2x + 4$ durch $P(0 | 4)$
b) $t_1(x) = 2x + 3$ durch $P_1(-1 | 1)$ und $t_2(x) = 2x - \frac{23}{3}$ durch $P_2(3 | -\frac{5}{3})$
c) $t_1(x) = 2x + \frac{7}{12}$ durch $P_1(-1 | -\frac{17}{12})$, $t_2(x) = 2x + 1$ durch $P_2(0 | 1)$ und $t_3(x) = 2x - \frac{5}{3}$ durch $P_3(2 | \frac{7}{3})$
d) $t(x) = 2x + \frac{1}{8}$ durch $P(\frac{1}{16} | \frac{1}{4})$
e) $t(x) = 2x + 3$ durch $P(-\frac{1}{2} | 2)$ und $t(x) = 2x - 1$ durch $P(\frac{1}{2} | 0)$
f) $t(x) = 2x + 2$ durch $P(-1 | 0)$

Aufgabe 10: Tangenten durch vorgegebene Punkte

- a) $t_1(x) = -2x - 1$ mit Berührungspunkt $B(-1 | 1)$ und $t_2(x) = 6x - 9$ mit Berührungspunkt $B(3 | 9)$.
b) $t_1(x) = 2x$ mit dem Berührungspunkt $B(-1 | -2)$ und $t_2(x) = -6x - 24$ mit dem Berührungspunkt $B(-5 | 6)$.
c) $t_1(x) = 16x - 14$ mit Berührungspunkt $B(5 | 66)$ und $t_2(x) = 2$ mit Berührungspunkt $B(-3 | 2)$
d) $t_1(x) = -4x$ mit Berührungspunkt $B(0 | 0)$ und $t_2(x) = \frac{11}{4}x + \frac{27}{4}$ mit Berührungspunkt $B(-\frac{3}{2} | \frac{21}{8})$.
e) $t_1(x) = -4x - 3$ mit Berührungspunkt $B(0 | -3)$ und $t_2(x) = -13x - 3$ mit Berührungspunkt $B(-3 | 36)$
f) $t(x) = \frac{11}{2}x + 6$ mit Berührungspunkt $B(-2 | -5)$

Aufgabe 11: Tangentenprobleme mit Parameter

- a) $t_1(x) = 0$ mit Berührungspunkt $B(0 | 0)$ und $t_{u2}(x) = 4ux - 4u^2$ mit Berührungspunkt $B(2u | 4u^2)$
b) Die Ableitung $f_t'(x) = -6x^2 + 2tx$ muss an der Stelle $x = \frac{1}{3}$ Null sein: $0 = f_t'(\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t \Rightarrow t = 1$.
c) $0 = f_t'(x) = x^2 - 2tx + 2 \Rightarrow x = t \pm \sqrt{t^2 - 2} \Rightarrow$ **keine** Lösung für $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$
d) Die Steigung der ersten Tangenten ist $2t$, die der zweiten $2t \cdot (-t) = -2t^2$. Die beiden Geraden stehen senkrecht aufeinander, falls $2t^2 = -\frac{1}{-2t^2}$, d.h. für $t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Es gibt nur **scheinbar** zwei Lösungen!)

Aufgabe 12: Hüllkurven von Geradenscharen

Alle Geraden der Schar sind Tangenten der Hüllkurve an den Punkten $P(t | f_t(t))$, d.h., sowohl die Funktionswerte als auch die Steigungen stimmen an der Stelle $x = t$ überein: $f(t) = g_t(t)$ und $f'(t) = g_t'(t)$.

- a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = x^3 - 4x$

Aufgabe 13: Normalen durch vorgegeben Punkte

- a) $n_0(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$ durch $S(2|4)$, $n_{1/2}(x) = \pm \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ durch $S_{1/2}(\pm 1|1)$ und $n_3: x = 0$ durch $S_3(0|0)$
- b) $n_0(x) = 9x - \frac{80}{3}$ durch $S(3|\frac{1}{3})$, $n_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$ durch $S_1(\frac{1}{2}|2)$, $n_2(x) = x$ durch $S_2(\pm 1|\pm 1)$ (doppelt!) und $n_3(x) = 4x - \frac{15}{2}$ durch $S_3(2|\frac{1}{2})$
- c) $n_0(x) = 4x - \frac{31}{4}$ durch $S(2|\frac{1}{4})$ und $n_{1/2}(x) = \pm \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ durch $S_{1/2}(\pm 1|1)$
- d) $n_0(x) = -4x + 18$ durch $S(4|2)$ und $n_1(x) = -2x + 3$ durch $S_1(1|1)$ ($n_2(x) = 0$ durch $S(0|0)$ ist keine Normale, da die Ableitung der Wurzelfunktion in $S(0|0)$ nicht definiert ist!)

Aufgabe 14: Differenzierbarkeit

- a) $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$
- d) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R}$
- b) $f'(x) = \text{sgn}(x)$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- e) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R}$
- c) $f'(x) = 0$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- f) $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{für } x \leq -1 \\ -2x & \text{für } x > -1 \end{cases}$ mit $D = \mathbb{R}$