5.2. Prüfungsaufgaben zu Tangentenproblemen

Aufgabe 1a: Funktionsgleichung und Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)
Welche Tangenten können durch P(1|–4) an die Parabel p gelegt werden, welche durch die Punkte A(1|0), B(4|3) und C(5|8) verläuft? Skizziere die Parabel und alle möglichen Tangenten in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösungen
$p(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)^2 - 1$ (2)
$t_1(x) = 2x - 6$ durch $B_1(3|0)$ und $t_2(x) = -6x + 2$ durch $B_2(-1|8)$ (4)
Zeichnung (2)

Aufgabe 1b: Funktionsgleichung und Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)
Welche Tangenten können durch P(–1| $\frac{16}{3}$) an die Parabel p gelegt werden, welche durch die Punkte A(–2|2), B(3|–3) und C(4|–6) verläuft? Skizziere die Parabel und alle möglichen Tangenten in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösungen
$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2 = -\frac{1}{3}(x + 1)^2 + \frac{7}{3}$ (2)
$t_1(x) = 2x + \frac{22}{3}$ durch $B_1(-4|-\frac{2}{3})$ und $t_2(x) = -2x + \frac{10}{3}$ durch $B_2(2|-\frac{2}{3})$ (4)
Zeichnung (2)

Aufgabe 1c: Funktionsgleichung und Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)
Welche Tangenten können durch P(–1| $\frac{16}{3}$) an die Parabel p gelegt werden, welche durch die Punkte A(–4|3), B(–3| $\frac{1}{2}$) und C(–2|–1) verläuft? Skizziere die Parabel und alle möglichen Tangenten in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Lösungen
$p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{3}{2}$ (2)
$t_1(x) = -x - \frac{5}{2}$ durch $B_1(-2|-\frac{1}{2})$ und $t_2(x) = x - \frac{1}{2}$ durch $B_2(0|-\frac{1}{2})$ (4)
Zeichnung (2)

Aufgabe 1d: Tangenten durch Punkte außerhalb der Kurve (8)
Bestimme die Gleichungen aller Tangenten, die durch P(0|7) an $f(x) = \frac{1}{x - 2} + 3$ gelegt werden können und zeichne alles in ein Koordinatensystem.

Lösungen
$t_1(x) = -x + 7$ durch P(3|4) und $t_2(x) = -4x + 7$ durch $B_2(\frac{3}{2}|1)$ (4)
Zeichnung (4)

Aufgabe 2a: Tangenten durch Punkte auf und außerhalb der Kurve (10)
a) Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Parabel $f(x) = 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$ die Steigung 16 hat. (3)
b) Bestimme die Gleichung der Tangenten an der Parabel $f(x) = 4x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$. (1)
c) Welche Tangenten können durch den Punkt P(1|−32) an die Parabel $f(x) = 4x^2$ gelegt werden? (6)

Lösungen
a) $f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{4x^2 - 16}{x - 2} = \lim_{x\to 2} 4(x + 2) = 4(2 + 2) = 16$ (3)
b) $t(x) = 16x - 16$ (1)

c) $\frac{f(x)-(-32)}{x-1}$ = f'(x) ⇔ $\frac{4x^2+32}{x-1}$ = 8x ⇔ $4x^2 + 32 = 8x^2 - 8x$ ⇔ $x^2 - 2x - 8 = 0$ (2)

⇒ $t_1(x) = -16x - 16$ durch $B_1(-2|16)$ und $t_2(x) = 32x - 64$ durch $B_2(4|64)$ (4)

Aufgabe 2b: Tangenten durch Punkte auf und außerhalb der Kurve (10)

a) Zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass die Parabel $f(x) = 3x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$ die Steigung 18 hat. (3)

b) Bestimme die Gleichung der Tangenten an der Parabel $f(x) = 3x^2$ an der Stelle $x_0 = 3$. (1)

c) Welche Tangenten können durch den Punkt P(2|−36) an die Parabel $f(x) = 3x^2$ gelegt werden? (6)

Lösungen

a) $f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2-27}{x-3} = \lim_{x\to 3} 3(x+3) = 3(3+3) = 18$ (3)

b) $t(x) = 18x - 27$ (1)

c) $\frac{f(x)-(-36)}{x-2}$ = f'(x) ⇔ $\frac{3x^2+36}{x-2}$ = 6x ⇔ $3x^2 + 36 = 6x^2 - 12x$ ⇔ $x^2 - 4x - 12 = 0$ (2)

⇒ $t_1(x) = -12x - 12$ durch $B_1(-2|12)$ und $t_2(x) = 36x - 108$ durch $B_2(6|108)$ (4)

Aufgabe 3a: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (6)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die am Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$ an der Stelle $x_0 = 3$ angelegt werden kann.

Lösung

Berührpunkt P(3|f(3)) = P(3|0) (1)

$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ ⇒ Steigung a = f'(3) = 2 (1)

⇒ $t(x) = 2x - 6$ (1)

Aufgabe 3b: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (6)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die am Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - 2x^2$ an der Stelle $x_0 = -2$ angelegt werden kann.

Lösung

Berührpunkt P(−2|f(−2)) = P(−2|−7) (1)

$f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - 4x$ ⇒ Steigung a = f'(−2) = 6 (1)

⇒ $t(x) = 6x + 5$ (1)

Aufgabe 4a: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (3)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die man an der Stelle $x_0 = \frac{2}{3}\pi$ an dem Schaubild von f(x) = sin(x) anlegen kann.

Lösung

$t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (3)

Aufgabe 4b: Tangenten durch Punkte auf der Kurve (3)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die man an der Stelle $x_0 = \frac{4}{3}\pi$ an dem Schaubild von f(x) = sin(x) anlegen kann.

Lösung

$t(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (3)

Aufgabe 5a: Wendetangenten (7)

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Wendepunkten von $f(x) = \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3$.

Lösung:

Ableitungen $f'(x) = \frac{9}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2$ und $f''(x) = \frac{27}{4}x^2 + 9x = 9x(\frac{3}{4}x + 1)$ (2)

$\Rightarrow$ Wendetangenten $t_1(x) = 0$durch $W_1(0|0)$ und $t_2(x) = \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$ durch $W_2(-\frac{4}{3}|-\frac{16}{9})$ (3)

Aufgabe 5b: Wendetangenten (7)

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Wendepunkten von $f(x) = \frac{9}{4}x^4 + 3x^3$.

Lösung:

Ableitungen $f'(x) = 9x^3 + 9x^2$ und $f''(x) = 27x^2 + 18x = 18x(\frac{3}{2}x + 1)$ (2)

$\Rightarrow$ Wendetangenten $t_1(x) = 0$durch $W_1(0|0)$ und $t_2(x) = \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ durch $W_2(-\frac{2}{3}|-\frac{4}{9})$ (3)

Aufgabe 5c: Wendetangenten (7)

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Wendepunkten von $f(x) = \frac{9}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^3$.

Lösung:

Ableitungen $f'(x) = \frac{9}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2$ und $f''(x) = \frac{27}{8}x^2 - \frac{9}{2}x = \frac{9}{2}x(\frac{3}{4}x - 1)$ (2)

$\Rightarrow$ Wendetangenten $t_1(x) = 0$durch $W_1(0|0)$ und $t_2(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{9}$ durch $W_2(\frac{4}{3}|-\frac{8}{9})$ (3)

Aufgabe 6: Wendetangenten mit Parameter (5)

Zeige, dass sich alle Wendetangenten von $f_t(x) = \frac{1}{t^3} \cdot \left(x^3 - 3tx^2 + 4t^3\right)$ für $t > 0$.in einem Punkt schneiden.

Lösung:

Ableitungen: $f_t(x) = \frac{1}{t^3}\left(x^3 - 3tx^2 + 4t^3\right)$, $f_t'(x) = \frac{1}{t^3}\left(3x^2 - 6tx\right)$, $f_t''(x) = \frac{1}{t^3}\left(6x - 6t\right)$ (2)

$\Rightarrow$ Wendepunkte: ($f_t''(x) = 0$ mit VZW) $W_t(t|2)$ mit Wendetangente $y = -\frac{3}{t}x + 5$. (2)

Alle Wendetangenten schneiden die y–Achse in S(5|0).. (1)

Aufgabe 7a: Tangenten mit vorgegebener Steigung (6)
Gegeben ist die Parabel $f(x) = 2x^2 - 18x + 9$
a) Gib die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung −2 an, die an das Schaubild von f gelegt werden können. (3)
b) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes von f mit Hilfe der Ableitung. (3)

Lösungen

a) $f'(x) = -2 \Leftrightarrow 4x - 18 = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ Berührpunkt $P(4|f(4)) = P(4|-31) \Rightarrow t(x) = -2x - 23$ (3)

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(\frac{9}{2}|f(\frac{9}{2})) = S(\frac{9}{2}|-\frac{63}{2})$ (3)

Aufgabe 7b: Tangenten mit vorgegebener Steigung (6)
Gegeben ist die Parabel $f(x) = -2x^2 + 18x - 9$
a) Gib die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung 2 an, die an das Schaubild von f gelegt werden können. (3)
b) Berechne die Koordinaten des Scheitelpunktes von f mit Hilfe der Ableitung. (3)

Lösungen:

a) $f'(x) = 2 \Leftrightarrow -4x + 18 = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow$ Berührpunkt $P(4|f(4)) = P(4|31) \Rightarrow t(x) = 2x + 23$ (3)

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(\frac{9}{2}|f(\frac{9}{2})) = S(\frac{9}{2}|\frac{63}{2})$ (3)

Aufgabe 7c: Tangenten mit vorgegebener Steigung (4)

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung 3, die an das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ angelegt werden können.

Lösung

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 = 3 \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Berührpunkt $P(1|f(1) = P(1|\frac{8}{3}) \Rightarrow t(x) = 3x - \frac{1}{3}$. (4)

Aufgabe 7d: Tangenten mit vorgegebener Steigung (4)

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten mit der Steigung 3, die an das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 3x$ angelegt werden können.

Lösungen

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow 2x(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Berührpunkt $P(0|f(0) = P(0|0) \Rightarrow t(x) = 3x$ (4)

Aufgabe 7e: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)

Bestimme die Gleichungen **aller** Tangenten t(x), die durch den Punkt $P(0|0)$ an das Schaubild der Funktion $f(x) = -\frac{x^2}{4}(x-6)$ gelegt werden können.

Lösungen:

$t(x) = 0$ mit Berührpunkt $P(0|0)$ (3)

$t(x) = \frac{9}{4}x$ mit Berührpunkt $P(3|\frac{27}{4})$ (3)

Aufgabe 7f: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)

Bestimme die Gleichungen **aller** Tangenten t(x), die durch den Punkt $P(6|0)$ an das Schaubild der Funktion $f(x) = -\frac{x^2}{4}(x-6)$ gelegt werden können.

Lösung

$t(x) = 0$ mit Berührpunkt $P0|0)$ und (3)

$t(x) = -9x + 54$ mit Berührpunkt $P(6|0)$ (3)

Aufgabe 7g: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten t(x), die durch den Punkt $P(0|4)$ an das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ gelegt werden können.

Lösung

$t(x) = -4x + 4$ mit Berührpunkt $P(1|0)$ (3)

$t(x) = \frac{11}{4}x + 4$ mit Berührpunkt $P(-\frac{1}{2}|\frac{21}{8})$ (3)

Aufgabe 7h: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten t(x), die durch den Punkt $P(0|6)$ an das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$ gelegt werden können.

Lösung

$t_1(x) = -3x + 6$ mit Berührpunkt $B_1(2|0)$ (3)

$t_2(x) = \frac{15}{4}x + 6$ und Berührpunkt $B_2(-1|\frac{9}{4})$. (3)

Aufgabe 7i: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (6)

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten t(x), die durch den Punkt $P(1|-\frac{1}{2})$ an das Schaubild der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x$ gelegt werden können.

Lösung

$t(x) = -\frac{1}{2}x$ mit Berührpunkt $P(0|0)$ (3)

$t(x) = \frac{23}{8}x - \frac{27}{8}$ mit Berührpunkt $P(\frac{3}{2}|\frac{15}{16})$ (3)

Aufgabe 7j: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)

Welche Tangenten können durch $P(-\frac{2}{3}|-1)$ an das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$ gelegt werden?

Lösung

Ansatz $\frac{f(x)-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}x^3+x^2+\frac{3}{2}x+1}{x+\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{3}x^2 + \frac{17}{6}x + 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ (1)

$\Leftrightarrow 0= \frac{1}{3}x(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{3}x(x + 2)^2 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ (2)

$\Rightarrow t_1(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$ an $P_1(-2|-\frac{1}{3})$ und $t_2(x) = \frac{3}{2}x$ an $P_2(0|0)$ (3)

Aufgabe 7k: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)

Welche Tangenten können durch $P(\frac{2}{3}|1)$ an das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x$ gelegt werden?

Lösung

Ansatz $\frac{f(x)-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{3}{2}x-1}{x-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{17}{6}x - 1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ (1)

$\Leftrightarrow 0= \frac{1}{3}x(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{3}x(x - 2)^2 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ (2)

$\Rightarrow t_1(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$ an $P_1(2|\frac{1}{3})$ und $t_2(x) = \frac{3}{2}x$ an $P_2(0|0)$ (3)

Aufgabe 7l: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)

Vom Punkt $P(0|5)$ aus werden Tangenten an das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$ gelegt. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Tangenten und die Koordinaten der Berührpunkte. (8)

Lösung

$\frac{f(x)-5}{x-0}$ = f'(x) ⇔ $\frac{\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4-5}{x}$ = $\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x$ ⇔ 0 = $\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+1$ (4)

⇒ Tangenten $t_1(x) = -\frac{3}{2}x+5$ mit $B_1(2|2)$ und $t_2(x) = -\frac{15}{8}x+5$ mit $B_2(-1|\frac{25}{8})$. (4)

Aufgabe 7m: Tangenten durch Punkt außerhalb der Kurve (8)

Vom Punkt P(0|−5) aus werden Tangenten an das Schaubild von $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ gelegt. Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Tangenten und die Koordinaten der Berührpunkte. (8)

Lösung

$\frac{f(x)+5}{x-0}$ = f'(x) ⇔ $\frac{\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2-4+5}{x}$ = $\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$ ⇔ 0 = $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2-1$ (4)

⇒ Tangenten $t_1(x) = -\frac{3}{2}x-5$ mit $B_1(-2|-2)$ und $t_2(x) = -\frac{15}{8}x-5$ mit $B_2(1|-\frac{25}{8})$. (4)

Aufgabe 7n: Tangenten durch vorgegebenen Schnittpunkt auf der Kurve (8)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt P(0 | 0) an einen **weiteren** Punkt des Schaubildes von $f(x) = \frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^3$ angelegt werden kann

Lösung:

$\frac{f(x)-0}{x-0}$ = f'(x) ⇔ $\frac{9}{16}x^3+\frac{3}{2}x^2 = \frac{9}{4}x^3+\frac{9}{2}x^2$ ⇔ $\frac{27}{16}x^3+3x^2 = 0$ (3)

⇒ $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{16}{9}$ ⇒ $t_1(x) = 0$ und $t_2(x) = \frac{128}{81}x$ (3)

Aufgabe 8a: Tangenten durch vorgegebenen Schnittpunkt auf der Kurve (8)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt P(0 | 0) an einen **weiteren** Punkt des Schaubildes von $f(x) = \frac{9}{4}x^4 + 3x^3$ angelegt werden kann

Lösung:

$\frac{f(x)-0}{x-0}$ = f'(x) ⇔ $\frac{9}{4}x^3+3x^2 = 9x^3+9x^2$ ⇔ $\frac{27}{4}x^3+6x^2 = 0$ (3)

⇒ $x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{8}{9}$ ⇒ $t_1(x) = 0$ und $t_2(x) = \frac{64}{81}x$ (3)

Aufgabe 8b: Tangenten durch vorgegebenen Schnittpunkt auf der Kurve (8)

Bestimme die Gleichung der Tangente, die durch den Punkt P(0 | 0) an einen **weiteren** Punkt des Schaubildes von $f(x) = \frac{9}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^3$ angelegt werden kann

Lösung:

$\frac{f(x)-0}{x-0}$ = f'(x) ⇔ $\frac{9}{32}x^3-\frac{3}{4}x^2 = \frac{9}{8}x^3-\frac{9}{4}x^2$ ⇔ $\frac{27}{32}x^3-\frac{3}{2}x^2 = 0$ (3)

⇒ $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{16}{9}$ ⇒ $t_1(x) = 0$ und $t_2(x) = -\frac{64}{81}x$ (3)

Aufgabe 9a: Tangenten mit vorgegeben Steigung und durch Punkte außerhalb der Kurve (9)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

a) Bestimme den Tiefpunkt des Schaubildes von f mit Hilfe der 1. Ableitung. (2)
b) Bestimme die Gleichung der Tangente mit der Steigung 1, die an das Schaubild von f gelegt werden kann. (3)
c) Bestimme die Gleichung **aller** Tangenten, die durch den Punkt $P(1|-1)$ an das Schaubild von f gelegt werden können. (4)

Lösung

a) $f'(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow T(2|-1)$ (2)

b) $f'(x) = x - 2 = 1 \Rightarrow B_1(3|-\frac{1}{2})$ mit $t_1(x) = x - \frac{7}{2}$ (3)

c) $\frac{f(x)+1}{x-1} = f'(x) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 1$ mit $B_2(0|1)$ und $t_3(x) = -1$ mit $B_3(2|-1)$ (4)

Aufgabe 9b: Tangenten mit vorgegeben Steigung und durch Punkte außerhalb der Kurve (9)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

a) Bestimme den Tiefpunkt des Schaubildes von f mit Hilfe der 1. Ableitung. (2)
b) Bestimme die Gleichung der Tangente mit der Steigung 1, die an das Schaubild von f gelegt werden kann. (3)
c) Bestimme die Gleichung **aller** Tangenten, die durch den Punkt $P(-1|1)$ an das Schaubild von f gelegt werden können. (4)

Lösung

a) $f'(x) = x + 2 = 0 \Rightarrow T(-2|1)$ (2)

b) $f'(x) = x + 2 = 1 \Rightarrow B_1(-1|\frac{3}{2})$ mit $t_1(x) = x + \frac{5}{2}$ (3)

c) $\frac{f(x)-1}{x+1} = f'(x) \Rightarrow t_1(x) = 2x + 3$ mit $B_2(0|3)$ und $t_3(x) = 1$ mit $B_3(-2|1)$ (4)

Aufgabe 9c: Tangenten mit vorgegeben Steigung und durch Punkte außerhalb der Kurve (9)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x$

a) Bestimme den Tiefpunkt des Schaubildes von f mit Hilfe der 1. Ableitung. (2)
b) Bestimme die Gleichung der Tangente mit der Steigung −2, die an das Schaubild von f gelegt werden kann. (3)
c) Bestimme die Gleichung **aller** Tangenten, die durch den Punkt $P(0|1)$ an das Schaubild von f gelegt werden können. (4)

Lösung

a) $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow T(2|1)$ (2)

b) $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1 = -2 \Rightarrow B_1(6|-3)$ mit $t_1(x) = -2x + 9$ (3)

c) $\frac{f(x)-1}{x} = f'(x) \Rightarrow t_1(x) = 2x + 1$ mit $B_2(-2|-3)$ und $t_3(x) = 1$ mit $B_3(2|1)$ (4)

Aufgabe 10a: Tangenten mit Parameter (4)

Bestimme die Gleichungen der Tangenten g_t, die am Schaubild von $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ durch den Punkt $P(0|-t)$ mit $t > 0$ angelegt werden können.

Lösung

Ansatz $\frac{0{,}5x^2 + t}{x} = x \Rightarrow g_t(x) = \pm\sqrt{2t}\cdot x - t$ mit Berührpunkt $B_t(\pm\sqrt{2t}\ |2t)$ (4)

Aufgabe 10b: Tangenten mit Parameter (4)

Bestimme die Gleichungen der Tangenten g_t, die am Schaubild von $f(x) = -x^2$ durch den Punkt $P(0|t)$ mit $t > 0$ angelegt werden können.

Lösung

Ansatz $\frac{-x^2 - t}{x} = -2x \Rightarrow g_t(x) = \pm 2\sqrt{t} \cdot x + t$ mit Berührpunkt $B_t(\pm\sqrt{t}\ |-t)$ (4)

Aufgabe 11a: Tangenten an Kurvenscharen (4)
Für welche t hat $f_t(x) = x^3 - x^2 + (t^2 - t)x + 5$ an der Stelle $x = 0$ einen Hoch- oder Tiefpunkt?

Lösung

$f_t'(x) = 3x^2 - 2x + t^2 - t$ mit $f_t'(0) = t^2 - t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ (4)

Aufgabe 11b: Tangenten an Kurvenscharen (4)
Für welche t hat $f_t(x) = 2x^3 - 3x^2 + (t^2 + t)x + 5$ an der Stelle $x = 1$ einen Hoch- oder Tiefpunkt?

Lösung

$f_t'(x) = 6x^2 - 6x + t^2 + t$ mit $f_t'(1) = t^2 + t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ und $t_2 = -1$ (4)

Aufgabe 12a: Wendetangente mit Parameter (4)

Zeigen Sie, dass sich alle Wendetangenten von $f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 - 3tx^2 + 4t^3)$ in einem Punkt schneiden.

Lösung

Alle Tangenten $g_t(x) = -\frac{3}{t}x - 5$ durch $W_t(-t|-2)$ schneiden die y–Achse in $S(0|-5)$ (4)

Aufgabe 12b: Wendetangente mit Parameter (4)

Zeigen Sie, dass sich alle Wendetangenten von $f_t(x) = \frac{1}{t^3}(x^3 + 3tx^2 - 4t^3)$ in einem Punkt schneiden.

Lösung

Alle Tangenten $g_t(x) = -\frac{3}{t}x + 5$ durch $W_t(t|2)$ schneiden die y–Achse in $S(0|5)$ (4)

Question 13a: Given gradients of a family of functions (5)

a) Find the value of t so that the gradient of the tangent line to the graph of $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 + tx - 1$ at $x = -2$ is 1. (2)

b) Find the point where $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ has a horizontal tangent line. Why is this point special? (3)

Solutions

a) $f_t'(x) = x + t$ with $f_t'(-2) = 1 \Leftrightarrow -2 + t = 1 \Rightarrow t = 3$. (2)

b) $f'(x) = -x + 2$ with $f'(x) = 0$ gives $x = 2$ with $y = f(2) = 2 \Rightarrow S(2|2)$ is a <u>Maximum</u> of the <u>inverted parabola</u> f (3)

Question 13b: Given gradients of a family of functions (2)
a) Find the value of t so that the gradient of the tangent line to the graph of $f_t(x) = 3x^2 + tx - 1$ at $x = 1$ is -2. (2)
b) Find the point where $f(x) = 2x^2 - 3x$ has a horizontal tangent line. Why is this point special? (3)

Solutions

$f_t'(x) = 6x + t$ with $f_t'(1) = -2 \Leftrightarrow 6\cdot 1 + t = -2 \Rightarrow t = -8$.
(2)

$f'(x) = 4x - 3$ with $f'(x) = 0$ gives $x = \frac{3}{4}$ with $y = f(\frac{3}{4}) = -\frac{9}{8} \Rightarrow S(\frac{3}{4}|-\frac{9}{8})$ is a <u>Minimum</u> of the <u>parabola</u> f (3)