

## 5.2. Differentialrechnung

### 5.2.1. Die mittlere Steigung einer Funktion zwischen zwei Punkten

Die **mittlere Steigung** der Funktion  $f(x)$  zwischen zwei Punkten  $P(x|f(x))$  und  $Q(x + \Delta x|f(x + \Delta x))$  ist definiert als

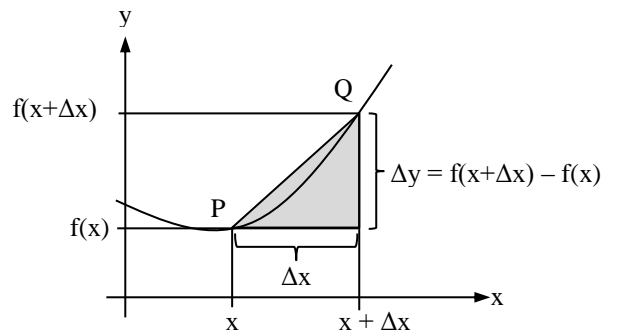
der **Differenzenquotient**

$$\frac{\text{Änderung in } y}{\text{Änderung in } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sie kann auch als **mittlere Änderungsrate** gedeutet werden, wenn  $x$  für die Zeit steht, insbesondere bei der

$$\text{mittleren Geschwindigkeit } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\text{Änderung des Ortes}}{\text{Änderung der Zeit}}$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 1 a)

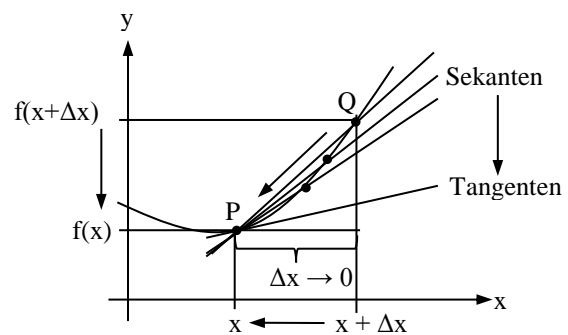


### 5.2.2. Die momentane Steigung einer Funktion in einem Punkt

Die **momentane Steigung** oder **Ableitung**  $f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$  im Punkt  $P(x|f(x))$  ist definiert als die Steigung der Tangente an  $y = f(x)$  in  $P$ .

**Graphisch** kann diese Tangente durch Sekanten durch die Punkte  $P(x|f(x))$  und  $Q(x + \Delta x|f(x + \Delta x))$  angenähert werden, wenn  $Q$  immer näher an  $P$  heranrückt.

**Rechnerisch** ist die Steigung der Tangente der Grenzwert der Sekantensteigungen für  $\Delta x \rightarrow 0$ :



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Die Ableitung wird häufig auch in **Differentialschreibweise** dargestellt:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{oder} \quad f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Alle diese Formulierungen werden zum Teil auch nebeneinander in mathematischen und physikalischen Texten verwendet:

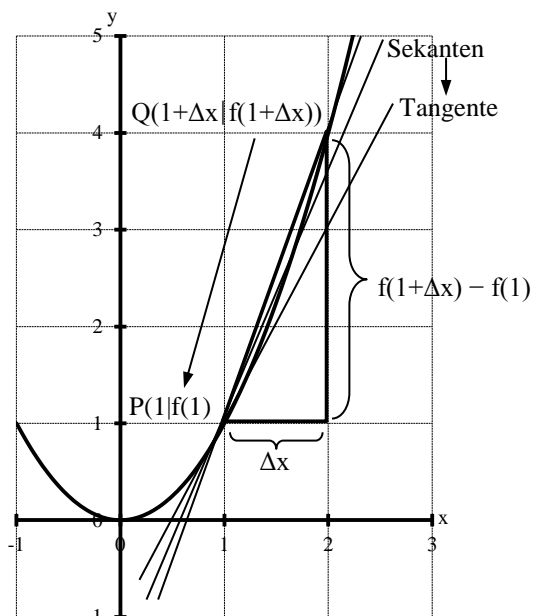
<b>mittlere Steigung</b>	= Sekantensteigung	= Differenzenquotient	= $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	= $\frac{\Delta f}{\Delta x}$	= $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
↓ $\Delta x \rightarrow 0$	↓ $\Delta x \rightarrow 0$	↓ $\Delta x \rightarrow 0$	↓ $\Delta x \rightarrow 0$	↓ $\Delta x \rightarrow 0$	↓ $\Delta x \rightarrow 0$
<b>momentane Steigung</b>	= Tangentensteigung	= Differentialquotient	= $\frac{dy}{dx}$	= $\frac{df}{dx}$	= $f'(x)$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 1 b), 2 und 3

**Beispiel: Steigung der Normalparabel  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x = 1$**

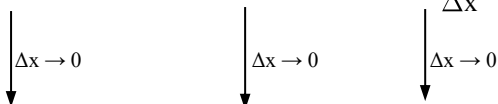
Die Steigung oder **Ableitung**  $f'(1)$  der Parabel  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x = 1$  bestimmt man **zeichnerisch**, indem man eine **Tangente** am Punkt  $P(1|f(1)) = P(1|1)$  anlegt und deren Steigung aus dem **Steigungsdreieck** abliest. **Rechnerisch** erhält man die Tangentensteigung als **Grenzwert** von Steigungen von **Sekanten** durch  $P(1|1)$  und  $Q(1+\Delta x|f(1+\Delta x))$  für  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1^2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) \\
 &= 2 + 0 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$



**Begriffe:**

$$\text{Differenzenquotient} = \text{Sekantensteigung} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$



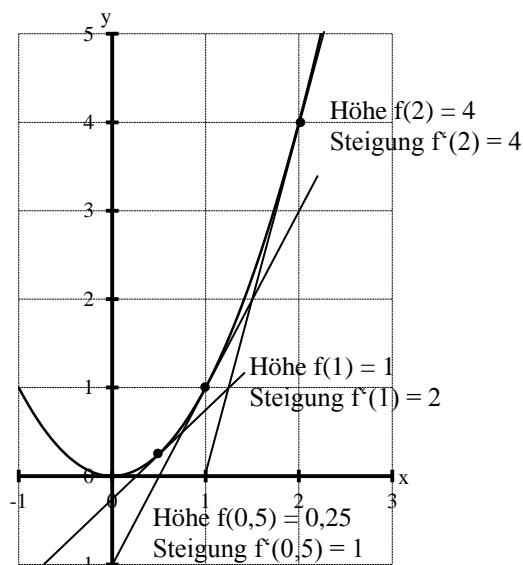
$$\text{Differentialquotient} = \text{Tangentensteigung} = f'(1)$$

Durch Einsetzen der Koordinaten des Berührungspunktes  $P(1|1)$  erhält man die Tangentengleichung  $t(x) = 2x - 1$ .

*Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 4*

**Beispiel: Steigung der Normalparabel  $f(x) = x^2$  an einer beliebigen Stelle  $x \in \mathbb{R}$ :**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\
 &= 2x + 0 \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$



Die Tangente an die Normalparabel  $f(x) = x^2$  am Punkt  $P(x|f(x))$  hat die Steigung  $f'(x) = 2x$ .

**Beispiel: Ableitung der kubischen Parabel  $f(x) = x^3$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$**

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (3x^2 + 3x \cdot \Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x) \\
 &= 3x^2 + 0 \\
 &= 3x^2.
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 5

### 5.2.3. Ableitung der ganzrationalen Funktionen

#### 5.2.3.1. Ableitung der Potenzfunktionen

Beispiele:

Satz:  $(x^n)' = nx^{n-1}$  für  $n \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$
$x^0$	0
$x^1$	$1x^0$
$x^2$	$2x^1$
$x^3$	$3x^2$
$x^4$	$4x^3$
$x^n$	$nx^{n-1}$

Beweis für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \dots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (n \cdot x^{n-1} + \dots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1})}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (n \cdot x^{n-1} + \dots + n \cdot x \cdot (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}) \\
 &= n \cdot x^{n-1} + \dots + 0 + 0 \\
 &= n \cdot x^{n-1}, \text{ qed}
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 6

#### 5.2.3.2. Konstante Faktoren

Beispiel: Bestimme die Ableitung von  $f(x) = \frac{1}{2}x^3$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$ .

Lösung:  $\left(\frac{1}{2}x^3\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x + \Delta x)^3 - \frac{1}{2}x^3}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 = \frac{1}{2}(x^3)'$

**Satz: Konstante Faktoren bleiben bei der Ableitung unverändert:**  $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ :

Beweis:  $(a \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot f(x + \Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x) = (a \cdot f(x))'$

### 5.2.3.3. Ableitung von Summen

**Beispiel:** Bestimme die Ableitung von  $f(x) = x^3 + x^2$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:**

$$(x^3 + x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x)^2 - (x^3 + x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} + \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) = 3x^2 + 2x = (x^3)' + (x^2)'$$

**Satz: In einer Summe werden die Summanden einzeln abgeleitet:**  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ .

**Beweis:**

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = f'(x) + g'(x)$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 7

### Satz: Ableitung ganzrationaler Funktionen

$(a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_1 x + a_1$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \neq 0$ .

**Beweis:**

Anwendung der vorangegangenen Sätze über die Ableitung von Potenzfunktionen, konstanter Faktoren und Summen.

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 8 - 10

### 5.2.4. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

**Satz: Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen sind**  $\sin'(x) = \cos(x)$  **und**  $\cos'(x) = -\sin(x)$

**Beweis:** Man benötigt die **Additionstheoreme**  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$  und  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) -$

$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$  sowie die **Grenzwerte**  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$  und  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$ :

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} & \text{und } \cos'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)}{\Delta x} \right) & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x) \cos(\Delta x) - \sin(x) \sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\cos(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \sin(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 & &= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 \\ &= \cos(x) & &= -\sin(x) \end{aligned}$$

Übung: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 11

### 5.2.5. Tangenten und Normalen

**Beispiel für die Bestimmung einer Tangente durch einen vorgegebenen Punkt:**

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten, die durch  $P(1|-7)$  an  $f(x) = x^2 - 4x$  gelegt werden können.

**Lösung:**

Zunächst sucht man die **x-Werte der Berührungspunkte** mit dem Ansatz

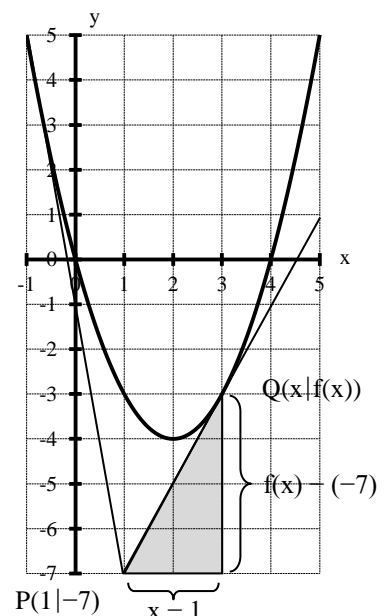
Tangentensteigung = Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - (-7)}{x - 1} &= f'(x) \\ \frac{x^2 - 4x - (-7)}{x - 1} &= 2x - 4 & | \cdot (x - 1) \\ x^2 - 4x + 7 &= 2x^2 - 6x + 4 & | -x^2 + 4x - 7 \\ 0 &= x^2 - 2x - 3 & | \text{p-q-Formel} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3$$

Die **y-Werte der Berührungspunkte** erhält man durch Einsetzen in  $f(x) = x^2 - 4x$ :

$$y_1 = f(x_1) = 5 \text{ und } y_2 = f(x_2) = -3$$



Die **Steigungen a der Tangenten** erhält man durch Einsetzen in  $f'(x) = 2x - 4$ :

$$a_1 = f'(x_1) = -6 \text{ und } a_2 = f'(x_2) = 2$$

Die **y-Achsenabschnitte b der Tangenten** erhält man durch Einsetzen des vorgegebenen Punktes in die Tangentengleichung  $y = ax + b$ :

$$b_1 = y - a_1x = -7 - (-6) \cdot 1 = -1 \text{ und } b_2 = y - a_2x = -7 + 2 \cdot 1 = -5$$

Es gibt also **zwei** Tangenten  $t_1(x) = -6x - 1$  mit Berührungspunkt  $B_1(-1|5)$  und  $t_2(x) = 2x - 5$  mit Berührungspunkt  $B_2(3|-3)$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 12 - 14

**Beispiel für die Bestimmung einer Normale durch einen vorgegebenen Punkt:**

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten, die durch  $P(2|\frac{1}{2})$  an  $f(x) = x^2 - 4x$  gelegt werden können

**Lösung:**

Zunächst sucht man die **x-Werte der Schnittpunkte** mit dem Ansatz

$$\text{Normalensteigung} = -\frac{1}{\text{Ableitung}}$$

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 2} = -\frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{x^2 - 4x - \frac{1}{2}}{x - 2} = -\frac{1}{2x - 4} \quad | \cdot (x - 2); \cdot (2x - 4)$$

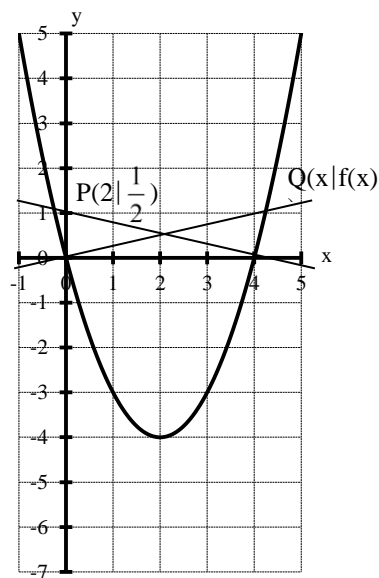
$$(x^2 - 4x - \frac{1}{2})(2x - 4) = -(x - 2) \quad | \text{ Klammern auflösen}$$

$$2x^3 - 12x^2 + 15x + 2 = -x + 2 \quad | + x - 2$$

$$2x^3 - 12x^2 + 16x = 0 \quad | 2x \text{ ausklammern}$$

$$2x(x - 6x + 8) = 0 \quad | p-q-Formel$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ und } x_3 = 4$$



Die **y-Werte der Schnittpunkte** erhält man durch Einsetzen in  $f(x) = x^2 - 4x$ :

$$y_1 = f(x_1) = 0, y_2 = f(x_2) = -4 \text{ und } y_3 = f(x_3) = 0$$

Die **Steigungen a der Normalen** erhält man durch Einsetzen in  $a = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{2x - 4}$ :

$$a_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{4}, a_2 \text{ ist nicht definiert, da die Normale senkrecht steht und } a_3 = -\frac{1}{f'(x_2)} = -\frac{1}{4}$$

Die **y-Achsenabschnitte b der Normalen** erhält man durch Einsetzen des vorgegebenen Punktes die Normalengleichung  $y = ax + b$

$$b_1 = y - a_1x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 2 = 0 \text{ und } b_3 = y - a_3x = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{4}) \cdot 2 = 1$$

Es gibt also **drei** Normalen

$$1. n_1(x) = \frac{1}{4}x \text{ mit Schnittpunkt } S_1(0|0),$$

$$2. n_2: x = 2 \text{ mit Schnittpunkt } S_2(2|-4) \text{ und}$$

$$3. n_3(x) = -\frac{1}{4}x + 1 \text{ mit Schnittpunkt } S_3(4|0)$$

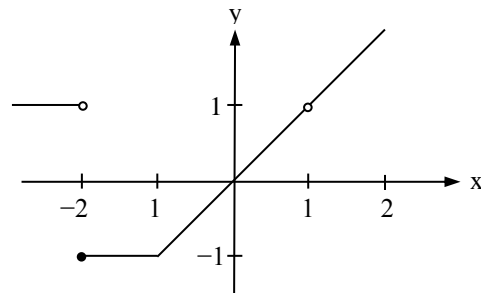
Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 15

## 5.2.6. Differenzierbarkeit und Stetigkeit an einer Stelle x

Beispiel: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 16 a)

Wir suchen die Ableitung  $f'(x)$  für die abschnittsweise definierte Funktion  $f$  mit Sprung- und Knickstelle sowie einer Lücke:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -2 \\ -1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{für } 1 < x \end{cases}$$



Die Ableitungen **auf** den Geradenstücken lassen sich leicht ablesen:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Interessanter sind hier die Ableitungen an den **Übergangsstellen**, nämlich

- der **Sprungstelle** bei  $x = -2$ ,
- der **Knickstelle** bei  $x = -1$  und
- der **Definitionslücke** bei  $x = 1$ .

### Sprungstelle bei $x = -2$ :

Die Ableitung an der Stelle  $x = -2$  ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten

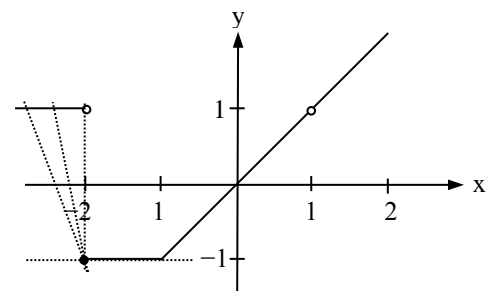
$$\frac{f(-2 + \Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{-1 - (-1)}{\Delta x} = 0 & \text{für } \Delta x > 0 \\ \frac{1 - (-1)}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x} & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases} \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0$$

$\Delta x$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
-0,1	-20
-0,01	-200
-0,001	-2000
-0	-
+0,001	0
+0,01	0
+0,1	0

Leider **existiert** in diesem Fall kein Grenzwert:

- Nähert man sich der  $-2$  **von rechts** ( $\Delta x > 0$ ), so hat der Differenzenquotient den konstanten Wert 0.
- Nähert man sich der  $-2$  dagegen **von links** ( $\Delta x < 0$ ), so strebt der Differenzenquotient gegen  $-\infty$ :

Wenn man die entsprechenden "Sekanten" in das Schaubild einzeichnet, erkennt man, dass die von links kommenden "Sekanten" schließlich fast senkrecht nach unten weisen, während die am rechten Ufer schneidenden "Sekanten" allesamt parallel zur  $x$ -Achse verlaufen:



Eine Steigung lässt sich an dieser Stelle also nicht angeben: die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $x = -2$  **nicht differenzierbar**.

### Knickstelle bei $x = -1$

Die Ableitung an der Stelle  $x_0 = -1$  ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{x - (-1)}{\Delta x} = 1 & \text{für } \Delta x > 0 \\ \frac{-1 - (-1)}{\Delta x} = 0 & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases} \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0$$

Auch in diesem Fall erhält man für  $\Delta x \rightarrow 0$  keinen eindeutigen Grenzwert: Die links von  $x = -1$  angelegten "Sekanten" sind Parallelen zur  $x$ -Achse, während die von rechts kommenden "Sekanten" allesamt die Steigung 1 haben. Auch an dieser Stelle lässt sich eine Steigung nicht eindeutig festlegen: die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $x = -1$  **nicht differenzierbar**.

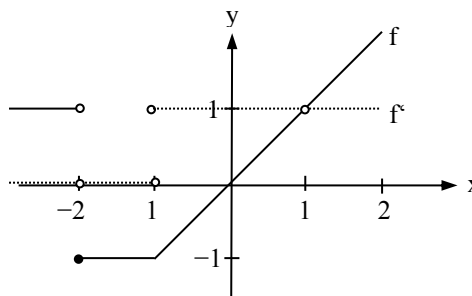
### Definitionslücke an der Stelle $x = 1$

Da  $f(x)$  nicht definiert ist, lässt sich der Differenzenquotient  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  und damit auch die Ableitung  $f'(x)$  nicht berechnen. Die Funktion  $f$  ist auch an der Stelle  $x = 1$  **nicht differenzierbar**.

### Ableitungsfunktion

Um den Verlauf der Steigung und die Stellen, an denen keine Steigung bestimmt werden kann, zu veranschaulichen, trägt man die Ableitungsfunktion  $f'(x)$  ebenfalls in das Koordinatensystem ein:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -2 \\ -1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{für } 1 < x \end{cases} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



besitzt also die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

### Differenzierbarkeit und Stetigkeit

- Die Funktion  $f$  heißt **differenzierbar** an der Stelle  $x$ , wenn  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$  existiert.

Ihr Schaubild ist dann **glatt** ohne Sprünge, Knicke oder Lücken.

Funktionen sind grundsätzlich **nicht differenzierbar** an **Sprungstellen**, **Knickstellen** und **Definitionslücken**.

- Die Funktion  $f$  heißt **stetig** an der Stelle  $x$ , falls  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x)$ .

Ihr Schaubild kann also **ohne abzusetzen** durchgezogen werden und hat keine Lücken

Funktionen sind grundsätzlich **nicht stetig** an **Sprungstellen** und **Definitionslücken**.

- Ist  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar, so gilt  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$  und sie ist dort auch stetig.**

**Die Umkehrung gilt nicht!**

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 16 b) – f)