

## 5.2. Differentialrechnung

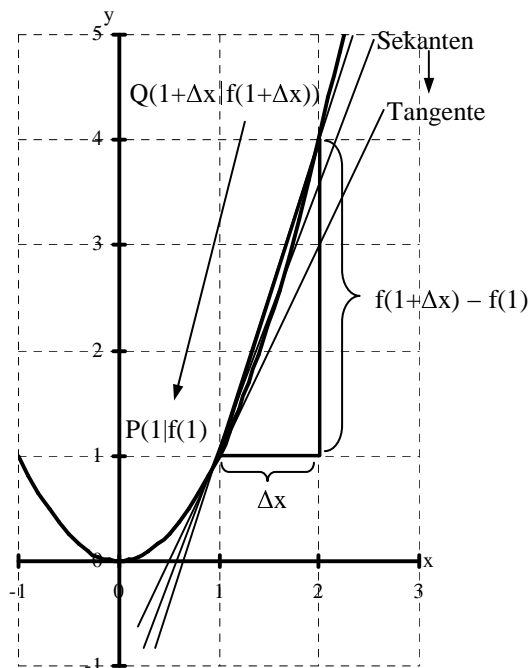
### 5.2.1. Steigung einer Kurve an der Stelle x

Beispiel: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 1 a)

**Beispiel: Steigung der Normalparabel  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x = 1$**

Die Steigung oder **Ableitung**  $f'(1)$  der Parabel  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x = 1$  bestimmt man grafisch, indem man eine **Tangente** am Punkt  $P(1|f(1)) = P(1|1)$  anlegt und deren Steigung aus dem **Steigungsdreieck** abliest. Rechnerisch erhält man die Tangentensteigung als **Grenzwert** von Steigungen von **Sekanten** durch die Punkte  $P(1|1)$  und  $Q(1+\Delta x|f(1+\Delta x))$  für  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1^2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) \\ &= 2 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$



**Begriffe:**

$$\text{Differenzenquotient} = \text{Sekantensteigung} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \Delta x \rightarrow 0 & \downarrow \Delta x \rightarrow 0 & \downarrow \Delta x \rightarrow 0 \\ \text{Differentialquotient} = \text{Tangentensteigung} = f'(1) & & \end{array}$$

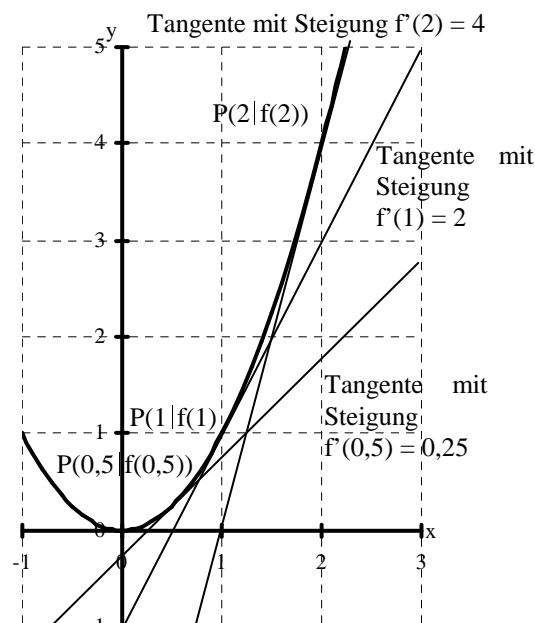
Durch Einsetzen der Koordinaten des Berührungspunktes  $P(1|1)$  erhält man die Tangentengleichung  $t(x) = 2x - 1$ .

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 1

**Beispiel: Steigung der Normalparabel  $f(x) = x^2$  an einer beliebigen Stelle  $x \in \mathbb{R}$ :**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) \\ &= 2x + 0 \\ &= 2x \end{aligned}$$

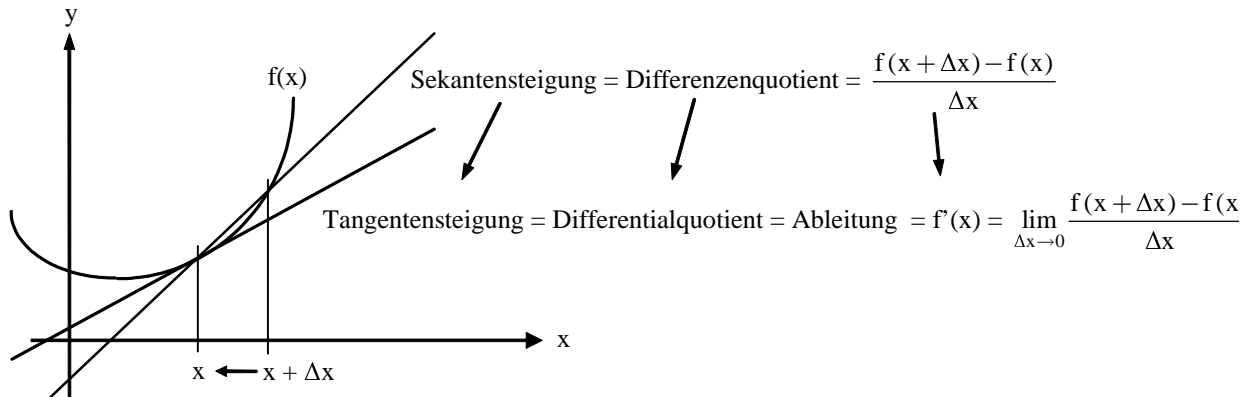
Die Tangente an die Normalparabel  $f(x) = x^2$  am Punkt  $P(x|f(x))$  hat die Steigung  $f'(x) = 2x$ . Die Steigungsfunktion  $f'(x)$  lässt sich aus der Originalfunktion  $f(x)$  ableiten und heißt daher auch **Ableitungsfunktion**.



Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 2 und 3

### Steigung einer Kurve (Ableitung)

Die Steigung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  wird als Steigung der **Tangente**  $t(x)$  definiert, die das Schaubild im Punkt  $P(x|f(x))$  berührt. Man bezeichnet die so definierte Steigung als  $f'(x)$  (**Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x$ ). Das Berechnen der Ableitung nennt man auch **Differenzieren**. Um die Tangente zu bestimmen, die das Schaubild am Punkt  $P(x|f(x))$  berührt, betrachtet man **Sekanten**, die das Schaubild an den Punkten  $P(x|f(x))$  und  $Q(x+\Delta x|f(x+\Delta x))$  schneiden, wobei man  $x$  immer näher an  $x_0$  heranwandern lässt. Die Tangentensteigung (**Differentialquotient**) lässt sich dann als **Grenzwert** der Sekantensteigungen (**Differenzenquotienten**) für  $\Delta x \rightarrow 0$  berechnen.



### Beispiel: Ableitung der kubischen Parabel $f(x) = x^3$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x \cdot \Delta x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x) \\
 &= 3x^2 + 0 \\
 &= 3x^2.
 \end{aligned}$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 4

### 5.2.2. Ableitung von Potenzfunktionen

#### Satz: Ableitung der Potenzfunktionen

$$(x^n)' = nx^{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{R}$$

#### Beweis für $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (\Delta x)^{k-1} \\
 &= \binom{n}{1} x^{n-1} \\
 &= nx^{n-1}.
 \end{aligned}$$

#### Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^0$	0
$x^1$	$1x^0$
$x^2$	$2x^1$
$x^3$	$3x^2$
$x^4$	$4x^3$
$x^n$	$nx^{n-1}$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 5

### 5.2.3. Ableitung von ganzrationalen Funktionen

**Beispiel:** Bestimmen Sie die Ableitung von  $f(x) = \frac{1}{2}x^3$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:** 
$$\left(\frac{1}{2}x^3\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+\Delta x)^3 - \frac{1}{2}x^3}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 = \frac{1}{2}(x^3)'$$

**Satz: konstante Faktoren bleiben bei der Ableitung unverändert:**  $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$ :

**Beweis:** 
$$(a \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot f(x+\Delta x) - a \cdot f(x)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \cdot f'(x) = (a \cdot f(x))'$$

**Beispiel:** Bestimmen Sie die Ableitung von  $f(x) = x^3 + x^2$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lösung:**

$$(x^3 + x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 - (x^3 + x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} + \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) = 3x^2 + 2x = (x^3)' + (x^2)'$$

**Satz: In einer Summe werden die Summanden einzeln abgeleitet:**  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ .

**Beweis:** 
$$(f(x) + g(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = f'(x) + g'(x)$$

**Satz: Ableitung ganzrationaler Funktionen**

$$(a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1 \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \neq 0.$$

**Beweis:**

Anwendung der vorangegangenen Sätze über die Ableitung von Potenzfunktionen, konstanter Faktoren und Summen.

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 6 und 7

### 5.2.4. Ableitung der trigonometrischen Funktionen

**Satz: Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen sind**  $\sin'(x) = \cos(x)$  **und**  $\cos'(x) = -\sin(x)$

**Beweis:** Man benötigt die **Additionstheoreme**  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$  und  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$  sowie die **Grenzwerte**  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$  und  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$ :

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} & \text{und } \cos'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)\cos(\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)}{\Delta x} \right) & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos(x)\cos(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{\cos(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \sin(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} + \cos(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) & &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} - \sin(x) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 & &= \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 \\ &= \cos(x). & &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Übung: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 8

### 5.2.5. Tangenten und Normalen

**Beispiel für die Bestimmung einer Tangente durch einen vorgegebenen Punkt:**

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten, die durch  $P(1|-7)$  an  $f(x) = x^2 - 4x$  gelegt werden können.

**Lösung:**

Zunächst sucht man die **x-Werte der Berührungspunkte** mit dem Ansatz

Tangentensteigung = Ableitung

$$\frac{f(x) - (-7)}{x - 1} = f'(x)$$

$$\frac{x^2 - 4x - (-7)}{x - 1} = 2x - 4 \quad | \cdot (x - 1)$$

$$x^2 - 4x + 7 = 2x^2 - 6x + 4 \quad | -x^2 + 4x - 7$$

$$0 = x^2 - 2x - 3 \quad | \text{p-q-Formel}$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ und } x_2 = 3$$

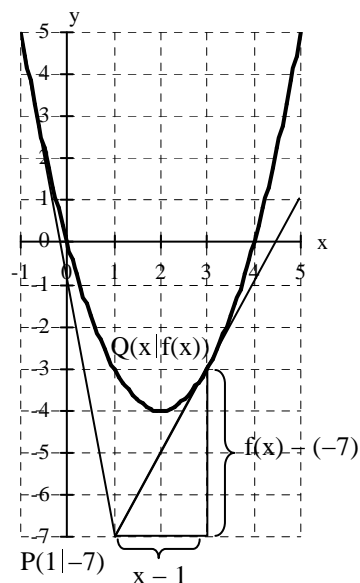
Die **y-Werte der Berührungspunkte** erhält man durch Einsetzen in  $f(x) = x^2 - 4x$ :  $y_1 = f(x_1) = 5$  und  $y_2 = f(x_2) = -3$

Die **Steigungen a der Tangenten** erhält man durch Einsetzen in  $f'(x) = 2x - 4$ :  $a_1 = f'(x_1) = -6$  und  $a_2 = f'(x_2) = 2$

Die **y-Achsenabschnitte b der Tangenten** erhält man durch Einsetzen des vorgegebenen Punktes oder der jeweiligen Berührungspunkte in die Tangentengleichung  $y = ax + b$ :

$$b_1 = y - a_1x = -7 - (-6) \cdot 1 = -1 \text{ und } b_2 = y - a_2x = -7 + 2 \cdot 1 = -5$$

Es gibt also **zwei** Tangenten  $t_1(x) = -6x - 1$  mit Berührungspunkt  $B_1(-1|5)$  und  $t_2(x) = 2x - 5$  mit Berührungspunkt  $B_2(3|-3)$



Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 10 - 11

**Beispiel für die Bestimmung einer Normale durch einen vorgegebenen Punkt:**

Bestimme die Gleichungen aller möglichen Tangenten, die durch  $P(2 | \frac{1}{2})$  an  $f(x) = x^2 - 4x$  gelegt werden können

**Lösung:**

Zunächst sucht man die **x-Werte der Schnittpunkte** mit dem Ansatz

$$\text{Normalensteigung} = -\frac{1}{\text{Ableitung}}$$

$$\frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 2} = -\frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{x^2 - 4x - \frac{1}{2}}{x - 2} = -\frac{1}{2x - 4} \quad | \cdot (x - 2); \cdot (2x - 4)$$

$$(x^2 - 4x - \frac{1}{2})(2x - 4) = -(x - 2) \quad | \text{Klammern auflösen}$$

$$2x^3 - 12x^2 + 15x + 2 = -x + 2 \quad | + x - 2$$

$$2x^3 - 12x^2 + 16x = 0 \quad | 2x \text{ ausklammern}$$

$$2x(x - 6x + 8) = 0 \quad | \text{p-q-Formel}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ und } x_3 = 4$$

Die **y-Werte der Schnittpunkte** erhält man durch Einsetzen in  $f(x) = x^2 - 4x$ :

$$y_1 = f(x_1) = 0, y_2 = f(x_2) = -4 \text{ und } y_3 = f(x_3) = 0$$

Die **Steigungen a der Normalen** erhält man durch Einsetzen in  $a = -\frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{2x - 4}$

$$a_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} = \frac{1}{4}, a_2 \text{ ist nicht definiert, da die Normale senkrecht steht und } a_3 = -\frac{1}{f'(x_2)} = -\frac{1}{4}$$

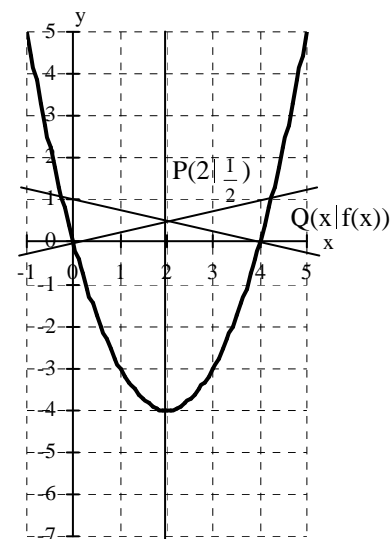
Die **y-Achsenabschnitte b der Tangenten** erhält man durch Einsetzen des vorgegebenen Punktes oder der jeweiligen Berührungspunkte in die Tangentengleichung  $y = ax + b$

$$b_1 = y - a_1x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 2 = 0 \text{ und } b_3 = y - a_3x = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{4}) \cdot 2 = 1$$

Es gibt also **drei** Normalen  $n_1(x) = \frac{1}{4}x$  mit Schnittpunkt  $S_1(0|0)$ ,  $n_2: x = 2$  mit Schnittpunkt  $S_2(2|-4)$  und  $n_3(x) =$

$$-\frac{1}{4}x + 1 \text{ mit Schnittpunkt } S_3(4|0)$$

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 12



## 5.2.6. Differenzierbarkeit und Stetigkeit an einer Stelle x

Beispiel: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 13 a)

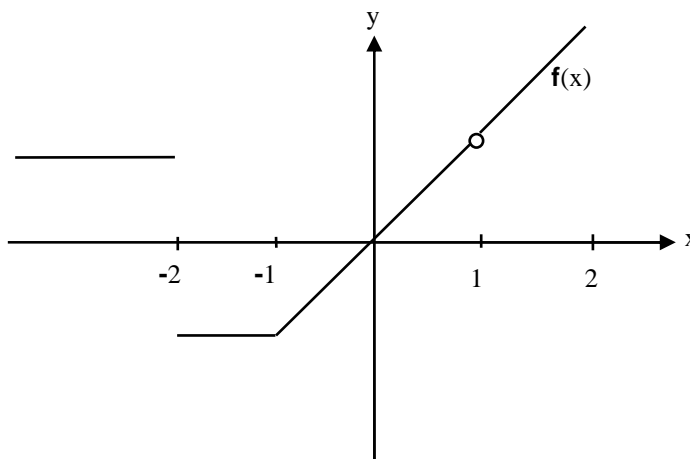
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -2 \\ -1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Die Ableitung an einer Stelle x **auf** den Geradenstücken lässt sich aus den jeweiligen Funktionsgleichungen ablesen:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

Interessanter sind hier die Ableitungen an den **Übergangsstellen**, nämlich

- der **Sprungstelle** bei  $x = -2$ ,
- der **Knickstelle** bei  $x = -1$  und
- der **Definitionslücke** bei  $x = 1$ .



### Sprungstelle bei $x = -2$ :

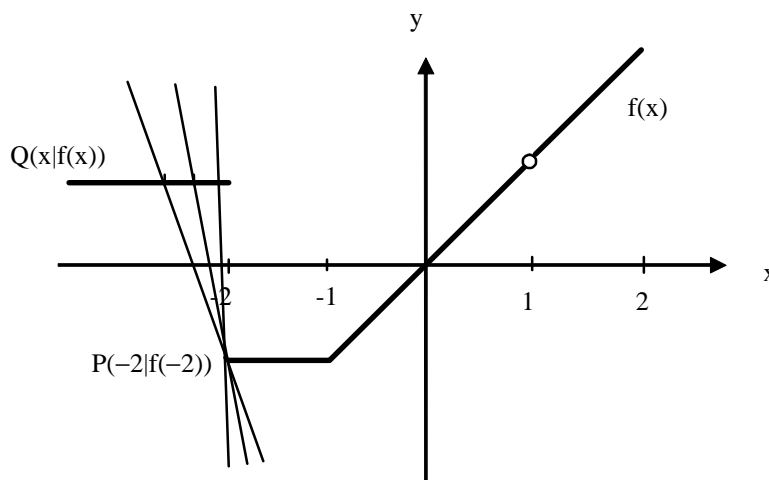
Die Ableitung an der Stelle  $x = -2$  ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{-1 - (-1)}{\Delta x} = 0 & \text{für } \Delta x > 0 \\ \frac{1 - (-1)}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x} & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases} \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0$$

Leider **existiert** in diesem Fall kein Grenzwert: Nähert man sich der  $-2$  von rechts ( $\Delta x > 0$ ), so hat der Differenzenquotient den konstanten Wert 0. Nähert man sich der  $-2$  dagegen von links ( $\Delta x < 0$ ), so strebt der Differenzenquotient gegen  $-\infty$ :

$\Delta x$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
-0,1	-20
-0,01	-200
-0,001	-2000
-0	-
+0,001	0
+0,01	0
+0,1	0

Wenn man die entsprechenden "Sekanten" in das Schaubild einzeichnet, erkennt man, dass die von links kommenden "Sekanten" schließlich fast senkrecht nach unten weisen, während die am rechten Ufer schneidenden "Sekanten" allesamt parallel zur x - Achse verlaufen:



"Sekanten" durch P und Q

Eine Steigung lässt sich an dieser Stelle also nicht angeben: die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $x = -2$  **nicht differenzierbar**.

### Knickstelle bei $x = -1$

Die Ableitung an der Stelle  $x_0 = -1$  ist definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{x - (-1)}{\Delta x} = 1 & \text{für } \Delta x > 0 \\ \frac{-1 - (-1)}{\Delta x} = 0 & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases} \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0$$

Auch in diesem Fall erhält man für  $\Delta x \rightarrow 0$  keinen eindeutigen Grenzwert: Die links von  $x = -1$  angelegten "Sekanten" sind Parallelen zur  $x$ -Achse, während die von rechts kommenden "Sekanten" allesamt die Steigung 1 haben. Auch an dieser Stelle lässt sich eine Steigung nicht eindeutig festlegen: die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $x = -1$  **nicht differenzierbar**.

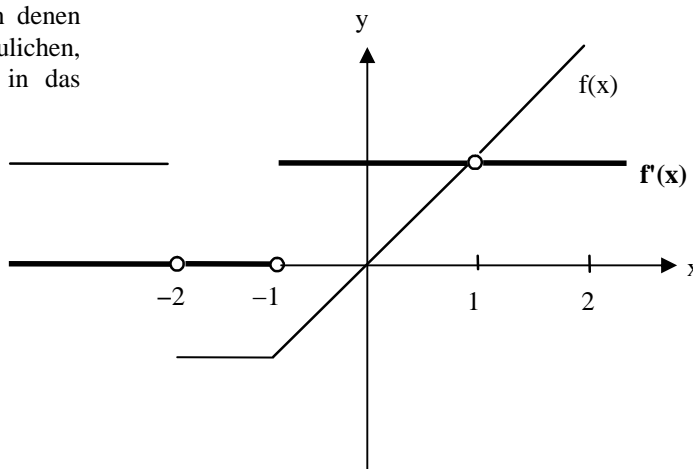
### Definitionslücke an der Stelle $x = 1$

Da  $f(x)$  nicht definiert ist, lässt sich der Differenzenquotient  $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  und damit auch die Ableitung  $f'(x)$  nicht berechnen. Die Funktion  $f$  ist auch an der Stelle  $x = 1$  **nicht differenzierbar**.

### Ableitungsfunktion

Um den Verlauf der Steigung und die Stellen, an denen keine Steigung bestimmt werden kann, zu veranschaulichen, trägt man die Ableitungsfunktion  $f'(x)$  ebenfalls in das Koordinatensystem ein:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < -2 \\ -1 & \text{für } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ x & \text{für } 1 < x \end{cases} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



besitzt also die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für } 1 < x \end{cases} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$$

### ▪ Differenzierbarkeit und Stetigkeit

- Die Funktion  $f$  heißt **differenzierbar** an der Stelle  $x$ , wenn  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$  existiert  
Funktionen sind grundsätzlich **nicht differenzierbar** an **Sprungstellen**, **Knickstellen** und **Definitionslücken**.
- Die Funktion  $f$  heißt **stetig** an der Stelle  $x$ , falls  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x + \Delta x) - f(x)) = 0$ .  
Funktionen sind grundsätzlich **nicht stetig** an **Sprungstellen** und **Definitionslücken**.
- **Ist  $f$  an der Stelle  $x$  differenzierbar, so ist sie dort auch stetig. Die Umkehrung gilt nicht.**

Übungen: Aufgaben zur Differentialrechnung Nr. 13