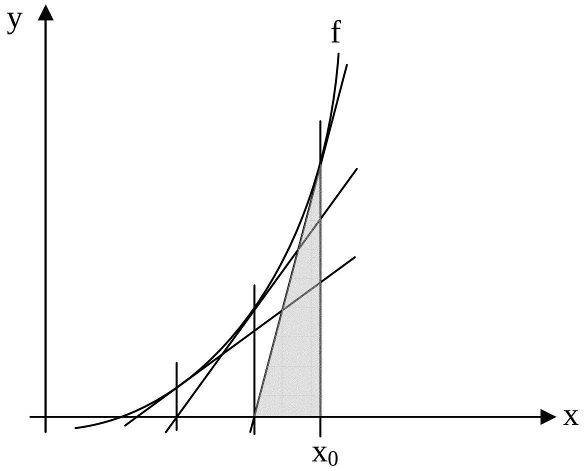
Das Newton-Verfahren

Prinzip:
Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen durch wiederholtes Anzielen mit Tangenten.

Beispiel 1
Bestimme die Nullstelle von $f(x) = x^3 + x - 1$ auf **zehn** Nachkommastellen genau **ohne** Verwendung des *zero*-Befehls.

0. Schritt:
Wähle eine grobe Näherung x_0 mit Hilfe des Graphen: x_0 = ____

1. Schritt:
Ziele mit der Tangente $\mathbf{t_1}$ von der Stelle x_0 aus auf die x-Achse. Berechne die Nullstelle $\mathbf{x_1}$ dieser Tangente t_1 als verbesserte Näherung:



2. Schritt:
Ziele nun von x_1 aus mit der Tangente $\mathbf{t_2}$ erneut auf die x-Achse:
.
.
.
n. Schritt:
Wiederhole das Verfahren so oft, bis ____

____:

GTR-Eingabe:

Ergebnis:

Schritt n	Näherung x_n
0	
1	
2	
4	
5	
6	

Beispiel 2
Bestimme die **beiden** Nullstellen von $f(x) = 3^x - 3 \cdot 2^x + 1$ auf **zehn** Nachkommastellen genau mit dem Newton-Verfahren.

Schritt n	Näherung x_n
0	
1	
2	
4	
5	

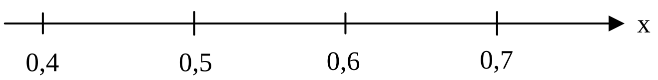
Schritt n	Näherung x_n
0	
1	
2	
4	
5	

Beispiel 3
Bestimme die Nullstelle von $f(x) = 60x^3 - 90x^2 + 44{,}55x - 7{,}24$ auf **zehn** Nachkommastellen genau mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 0{,}5$

Schritt n	Näherung x_n
1	
2	
3	
4	
5	

Schritt n	Näherung x_n
6	
7	
8	
9	
10	

Bei der Wahl des Startwertes $x_0 = 0{,}5$ treten in Beispiel 3 Komplikationen auf. Skizzieren Sie den Graphen mit Hilfe des GTR im Bereich $0{,}4 \le x \le 0{,}7$ bzw. $-0{,}2 \le y \le 0{,}2$ und erklären sie das Verhalten des Newton-Verfahrens zeichnerisch.



Erklären Sie das Verhalten des Newton-Verfahrens in Beispiel 3 rechnerisch an Hand der Formel $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. **Hinweis**: Welchen Wert darf die Ableitung $f'(x_{n-1})$ im Nenner der Formel **auf keinen Fall** annehmen?

Fazit:
Zwischen der gesuchten Nullstelle und dem Startwert darf die Ableitung nicht _____ werden!

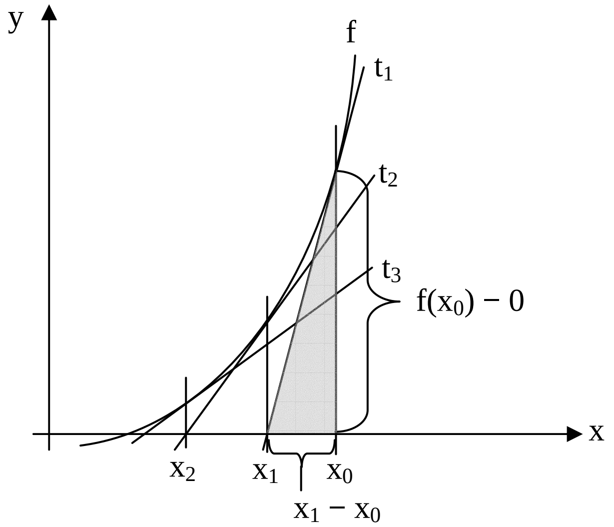
Das Newton-Verfahren

Prinzip:
Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen durch wiederholtes Anzielen mit Tangenten.

Beispiel 1
Bestimme die Nullstelle von $f(x) = x^3 + x - 1$ auf **zehn** Nachkommastellen genau **ohne** Verwendung des *zero*-Befehls.

0. Schritt:
Wähle eine grobe Näherung x_0 mit Hilfe des Graphen: $x_0 = 0{,}8$

1. Schritt:
Ziele mit der Tangente $\mathbf{t_1}$ von der Stelle x_0 aus auf die x-Achse. Berechne die Nullstelle $\mathbf{x_1}$ dieser Tangente t_1 als verbesserte Näherung:



Tangentensteigung = Ableitung

$$\frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \qquad \Big|\cdot(x_0 - x_1)$$

$$f(x_0) = (x_0 - x_1)\cdot f'(x_0) \qquad \Big| : f'(x_0)$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1 \qquad \Big| + x_1; -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2. Schritt:
Ziele erneut von x_1 aus mit der Tangente $\mathbf{t_2}$ auf die x-Achse:

.

.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

.

n. Schritt:
Wiederhole das Verfahren so oft, bis sich die ersten zehn Nachkommastellen nicht mehr ändern:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

GTR-Eingabe:

0,8 ENTER

Ans − Y_1(Ans)/nDeriv(Y_1,X,Ans) ENTER

Ergebnis:

Schritt n	Näherung x_n
0	0,8
1	0,6931507215
2	0,6824270597
4	0,6823278123
5	0,6823278038
6	**0,6823278038**

Beispiel 2
Bestimme die **beiden** Nullstellen von $f(x) = 3^x - 3\cdot 2^x + 1$ auf **zehn** Nachkommastellen genau mit dem Newton-Verfahren.

Schritt n	Näherung x_n
0	2,5
1	2,571254098
2	2,566711468
4	2,566691609
5	**2,566691609**

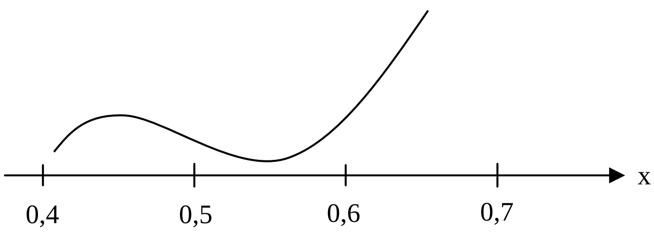
Schritt n	Näherung x_n
0	−1,5
1	−1,248379962
2	−1,263520993
4	−1,263579098
5	**−1,263579098**

Beispiel 3
Bestimme die Nullstelle von $f(x) = 60x^3 - 90x^2 + 44{,}55x - 7{,}24$ auf **zehn** Nachkommastellen genau mit dem Newton-Verfahren und dem Startwert $x_0 = 0{,}5$

Schritt n	Näherung x_n
1	0,5777881495
2	0,5336152097
3	0,6234665286
4	0,5832013627
5	0,5428587616

Schritt n	Näherung x_n
6	0,7141634416
7	0,6465232006
8	0,6003062135
9	0,5632662775
10	0,4829650956

Bei der Wahl des Startwertes $x_0 = 0{,}5$ treten in Beispiel 3 Komplikationen auf. Skizzieren Sie den Graphen mit Hilfe des GTR im Bereich $0{,}4 \le x \le 0{,}7$ bzw. $-0{,}2 \le y \le 0{,}2$ und erklären sie das Verhalten des Newton-Verfahrens zeichnerisch.



Erklären Sie das Verhalten des Newton-Verfahrens in Beispiel 3 rechnerisch an Hand der Formel $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. **Hinweis**: Welchen Wert darf die Ableitung $f'(x_{n-1})$ im Nenner der Formel **auf keinen Fall** annehmen?

Fazit:
Zwischen der gesuchten Nullstelle und dem Startwert darf die Ableitung nicht Null werden!