5.3. Konkrete Anwendungsaufgaben mit ganzrationalen und Wurzelfunktionen

Aufgabe 1 (5)
Ein Telefonunternehmen investiert für die Einrichtung eines neuen Tarifs 500 000 €. Mittels Marktbeobachtungen schätzt man, dass bei einem Preis von 20 € 100 000 Kunden zu erwarten sind. Jede Steigerung des Preises um 1 € wird vermutlich die Kundenzahl um 10 000 vermindern. Wie hoch ist der maximale Gewinn und bei welchem Preis wird er erreicht?

Lösung
Absatz $A(x) = 100\,000 - 10\,000\cdot(x - 20) = -10\,000\cdot x + 300\,000$ mit x = Angebotspreis in € (1,5)
Gewinn $G(x) = x\cdot A(x) - 500\,000 = -10\,000\cdot x^2 + 300\,000x - 500\,000 = -10\,000(x^2 - 30x + 50)$ (1,5)
relatives Maximum am Scheitelpunkt bei x = 15 € mit A(15) = 150 000 verkauften Verträgen (1)
Gewinn G(15) = 1 750 000 € (1)

Aufgabe 2 (3)
Ein Draht der Länge 20 cm soll eine rechteckige Fläche mit möglichst großem Inhalt umrahmen. Welche Maße muss diese Fläche haben?

Lösung:
$A(u) = u\cdot(10 - u) = -u^2 + 10\,u$ ist maximal bei u = 5 ⇒ Die Fläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 cm.

Aufgabe 3 (3)
Ein Schäfer möchte auf einem Wiesenstück eine 500 m^2 große rechteckige Fläche mit möglichst wenige Zaun eingrenzen. Welche Abmessungen muss die Fläche haben?

Lösung:
$L(u) = 2\cdot u + 2\cdot \frac{500}{u}$ mit $L'(u) = 2 - \frac{1000}{u}$ ist maximal bei $u = \sqrt{500}$ ⇒ Die Fläche muss quadratisch sein mit der Seitenlänge $u = \sqrt{500}$ m.

Aufgabe 4 (9)
Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c = 10 cm wird
a) um eine Kathete (4)
b) um eine Hypotenuse (5)
gedreht und erzeugt dadurch einen Drehkörper. Wie müssen die Längen a und b der Katheten gewählt werden, damit der Drehkörper ein maximales Volumen erhält?

Lösung
a) $V(b) = \frac{1}{3}\pi a^2\cdot b = \frac{1}{3}\pi(c^2 - b^2)\cdot b = -\frac{1}{3}\pi b^3 + \frac{100}{3}\pi b$ mit $V'(u) = -\pi b^2 + \frac{100}{3}\pi$ ist maximal bei $b = \sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5{,}77$ cm
b) Es entstehen zwei Kegel mit dem gemeinsamen Radius h und den Höhen p und q, die nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck durch $h^2 = p\cdot q = (10 - q)\cdot q$ voneinander abhängen. Ihr Volumen ist $V(q) = \frac{1}{3}\pi h^2\cdot q + \frac{1}{3}\pi h^2\cdot(10 - q) = \frac{10}{3}\pi h^2 = \frac{10}{3}\pi(10 - q)\cdot q$. Es ist maximal für p = q = 5 cm, d.h. für Katheten $a = b = \sqrt{5}$ cm.

Aufgabe 5 (5)
Ein Bauer möchte einen neuen Getreidesilo bauen, der die Form eines Zylinders mit einer aufgesetzten Halbkugel erhalten und 80 m^3 Getreide fassen soll. Die gesamte Innenfläche des Silos (mit Ausnahme des Bodens) soll mit einem teuren Isolationsmaterial verkleidet werden. Untersuche, ob es Maße für die geplante Form des Silos gibt, bei denen die Kosten der Isolierung möglichst gering werden.

Lösung
Das Volumen ist $V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2\cdot h = 80\ m^3 \Leftrightarrow h = \frac{80}{\pi\cdot r^2} - \frac{2}{3}r$. (1)

Die Oberfläche ist $O(r) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + 2\pi r(\frac{80}{\pi\cdot r^2} - \frac{2}{3}r) = \frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{160}{r}$ mit $O'(r) = \frac{4}{3}\pi r - \frac{160}{r^2}$ (2)

Sie hat ein relatives Minimum bei $r = \sqrt[3]{\frac{120}{\pi}} \approx 3{,}37$ m mit h = 0 m. (1)

Die Oberfläche der Halbkugel ist dann $O = 71{,}36\ m^2$. (1)

Aufgabe 6 (5)
Ein Plakat hat eine Fläche von 35 dm^2. Das Plakat wird so bedruckt, dass die Ränder an den Seiten 4 cm, oben und unten jeweils 5 cm betragen. Bei welchen Maßen des Plakats ist die bedruckte Fläche am größten?

Lösung

Fläche $3500\ cm^2 = b \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{3500}{b}$. (1)

Die bedruckte Fläche $A(b) = (b-8)\cdot(h-10) = (b-8)(\frac{3500}{b} - 10) = -10b + 3580 - \frac{28000}{b}$ (2)

Aus $A'(b) = -10 + \frac{28000}{b^2}$ ergibt sich das Maximum bei $b = \sqrt{2800} \approx 52{,}91$ cm und $h = 66{,}14$ cm. (2)

Aufgabe 7 (5)

Durch den Punkt $P(3|4)$ wird eine Gerade gelegt. Bestimme die Gleichung derjenigen Geraden, die mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten ein Dreieck mit minimalem Flächeninhalt bildet.

Lösung

$g_t(x) = tx + 4 - 3t$ mit Achsenschnittpunkten $S_y(0|4-3t)$ und $S_x(3 - \frac{4}{t}|0)$. (2)

Die Fläche ist $A(t) = \frac{1}{2}(4-3t)(3 - \frac{4}{t}) = -\frac{9}{2}t - \frac{8}{t}$ mit $A'(t) = -\frac{9}{2} + \frac{8}{t^2}$ (2)

Ihr Minimum ist bei $t = -\frac{4}{3}$ mit A = 48 FE. (1)

Aufgabe 8 (5)
Um 9 Uhr morgens befindet sich Schiff A genau 40 Seemeilen westlich von Schiff B. Schiff A fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 Knoten (1 Knoten =1 sm/h) in nördliche Richtung, Schiff B auf einem Kurs in westlicher Richtung mit einer Geschwindigkeit von 15 Knoten. Beide Schiffe halten Kurs und Geschwindigkeit über eine längeren Zeitraum exakt bei. Um wie viel Uhr ist der Abstand zwischen den beiden Schiffen am geringsten? Wie groß ist der minimale Abstand?

Lösung
$D(t) = \sqrt{(40-15t)^2 + (10t)^2} = \sqrt{325t^2 - 120t + 1600}$ mit $D'(t) = \frac{325t - 60}{\sqrt{325t^2 - 120t + 1600}}$ (4)

Minimaler Abstand bei $t = \frac{325}{60}$ h = 5 h und 25 min nach 9 Uhr, d.h. um 14:25 Uhr. (1)

Aufgabe 9: Spiegelung an Wurzelfunktion (8)
Zwei Radiowellen mit den Gleichungen $y = 6\sqrt{3}$ und $y = 18\sqrt{3}$ treffen von rechts auf eine Satellitenschüssel mit der Begrenzungslinie $y = 6\sqrt{x}$. Der Empfänger sitzt an dem Punkt, in dem sich die reflektierten Strahlen treffen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Lösung:
Die Radiowellen treffen die Schüssel an den Stellen $P_1(3|6\sqrt{3})$ und $P_2(27|18\sqrt{3})$. (1)
Die Tangentensteigungen sind dort $a_1 = \sqrt{3} = \tan\alpha_1$ mit dem Steigungswinkel $\alpha_1 = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$ (1)
und $a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\alpha_2$ mit dem Steigungswinkel $\alpha_2 = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°$. (1)
Die Einfallswinkel bzw. Ausfallwinkel sind 30° und 60°. (1)
Die Steigungswinkel der reflektierten Strahlen sind dann $\alpha_1' = -60°$ und $\alpha_2' = 60°$ (Skizze!). (1)
Die Steigungen der reflektierten Strahlen sind also $a_1' = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$ und $a_2' = \tan(60°) = \sqrt{3}$. (1)
Ihre Gleichungen sind $s_1'(x) = -\sqrt{3}\,x + 9\sqrt{3}$ und $s_2'(x) = \sqrt{3}\,x - 9\sqrt{3}$. (1)
Sie treffen sich im Punkt $S(9|0)$. Dort muss der Empfänger sitzen (1)

Aufgabe 10:Spiegelung an Parabel (7)

Zwei Radiowellen mit den Gleichungen $x = 6\sqrt{3}$ und $x = 18\sqrt{3}$ treffen von oben auf eine Satellitenschüssel mit der Begrenzungslinie $y = \frac{1}{36}x^2$. Der Empfänger sitzt an dem Punkt, in dem sich die reflektierten Strahlen treffen. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

Lösung:

Die Radiowellen treffen die Schüssel an den Stellen $P_1(6\sqrt{3}\,|3)$ und $P_2(18\sqrt{3}\,|27)$. (0,5)

Die Tangentensteigungen sind dort $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\alpha_1$ mit dem Steigungswinkel $\alpha_1 = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30°$ (1)

und $a_2 = \sqrt{3} = \tan\alpha_2$ mit dem Steigungswinkel $\alpha_2 = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$. (1)

Die Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel sind 30° und 60°. (1)

Die Steigungswinkel der reflektierten Strahlen sind dann $\alpha_1' = -30°$ und $\alpha_2' = 30°$ (Skizze!). (1)

Die Steigungen der reflektierten Strahlen sind $a_1' = \tan(-30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $a_2' = \tan(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

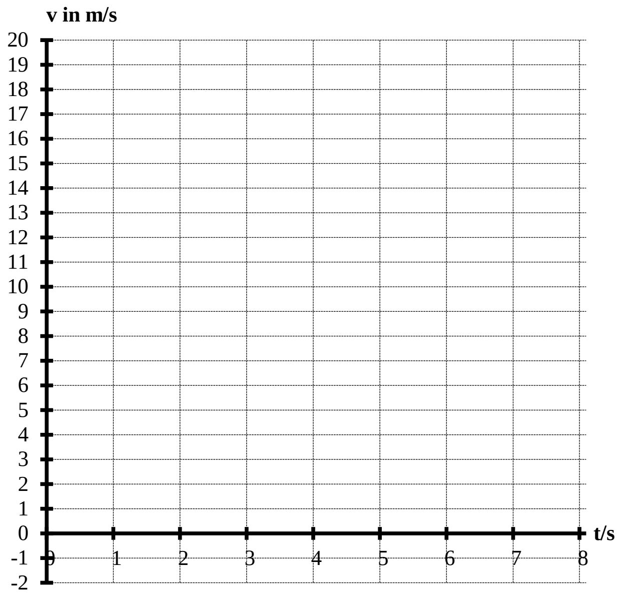
Ihre Gleichungen sind $s_1'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 9$ und $s_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 9$. (1)

Sie treffen sich im Punkt $S(0|9)$. Dort muss der Empfänger sitzen (0,5)

Question 11a: Kinematics (20)

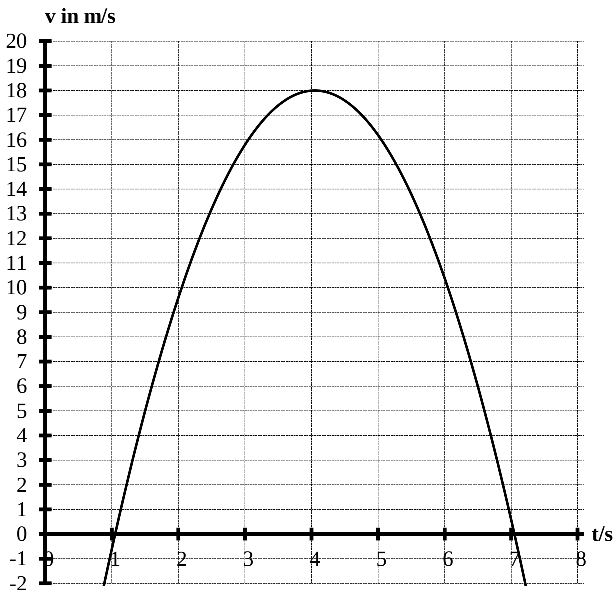
A particle moves along a line with the displacement function $s(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 8t^2 - 14t + 10$, in metres, for $0 \le t \le 8$ seconds.

a) Write an expression for the velocity and acceleration of the particle at time t. (4)
b) Find the initial position, velocity and acceleration for the particle. (3)
c) Find the times when the particle changes direction for $0 \le t \le 8$ seconds. (4)
d) Draw the velocity-time-graph into the coordinate system on the right. (3)
e) Find the intervals on which the particle travels right and left. (3)
f) Find when the acceleration is zero for $0 \le t \le 8$ seconds. (1)
g) Then find intervals on which the particle is speeding up and slowing down. (2)



Question 11a: Kinematics (20)

a) $v(t) = s'(t) = -2t^2 + 16t - 14$ (2)
   $a(t) = v'(t) = -4t + 16$ (2)
b) initial position $s(0) = 10$ m (1)
   initial velocity $v(0) = -14$ m/s (1)
   initial acceleration $a(0) = 16$ m/s^2 (1)
c) Change of direction $\Leftrightarrow$ sign change of $v(t)$ (1)
   $\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow -2(t^2 - 8t + 7) = 0$ (1)
   $\Leftrightarrow -2(t-1)(t-7) = 0 \Rightarrow t_1 = 1$ s and $t_2 = 7$ s (2)
d) Graph: (3)
e) particle moves right $\Leftrightarrow v(t) > 0 \Leftrightarrow 1\text{ s} < t < 7\text{ s}$ (1)
   particle moves left $\Leftrightarrow v(t) < 0 \Leftrightarrow t < 1\text{ s}$ or $t > 7\text{ s}$ (2)
f) $a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ s (1)
g) Speeding up $\Leftrightarrow a(t) > 0 \Leftrightarrow t < 4$ s (1)
   Slowing down $\Leftrightarrow a(t) < 0 \Leftrightarrow t > 4$ s (1)



Question 11b: Kinematics (20)

A particle moves along a line with the displacement function $s(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t + 20$, in metres, for $0 \le t \le 8$ seconds.

a) Write an expression for the velocity and acceleration of the particle at time t. (4)

b) Find the initial position, velocity and acceleration for the particle. (3)

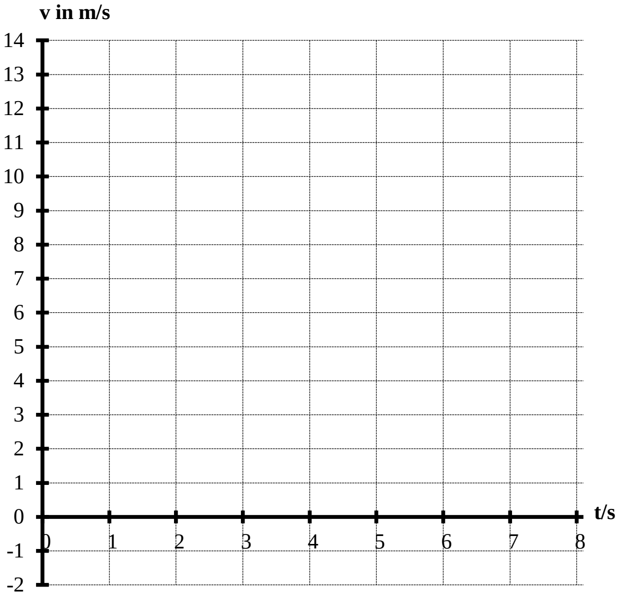
c) Find the times when the particle changes direction for $0 \le t \le 8$ seconds. (4)

d) Draw the velocity-time-graph into the coordinate system on the right. (3)

e) Find the intervals on which the particle travels right and left. (3)

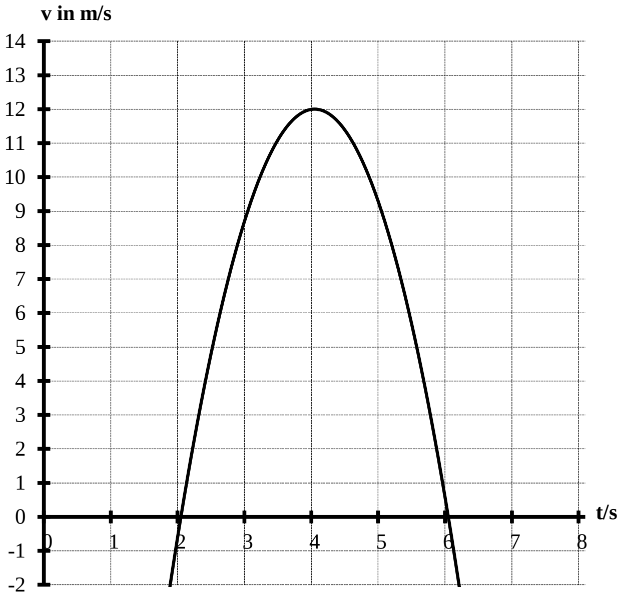
f) Find when the acceleration is zero for $0 \le t \le 8$ seconds. (1)

g) Then find intervals on which the particle is speeding up and slowing down. (2)

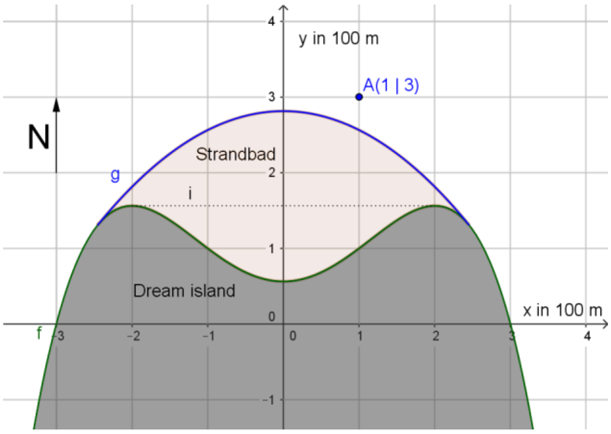


Question 11b: Kinematics (20)

a)	$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 24t - 36$	(2)
	$a(t) = v'(t) = -6t + 24$	(2)
b)	initial position $s(0) = 20$ m	(1)
	initial velocity $v(0) = -36$ m/s	(1)
	initial acceleration $a(0) = 24$ m/s^2	(1)
c)	Change of direction $\Leftrightarrow$ sign change of $v(t)$	(1)
	$\Leftrightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow -3(t^2 - 8t + 12) = 0$	(1)
	$\Leftrightarrow -3(t-2)(t-6) = 0 \Rightarrow t_1 = 2$ s and $t_2 = 6$ s	(2)
d)	Graph:	(3)
e)	particle moves right $\Leftrightarrow v(t) > 0 \Leftrightarrow 2\text{ s} < t < 6\text{ s}$	(1)
	particle moves left $\Leftrightarrow v(t) < 0 \Leftrightarrow t < 2\text{ s}$ or $t > 6\text{ s}$	(2)
f)	$a(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$ s	(1)
g)	Speeding up $\Leftrightarrow a(t) > 0 \Leftrightarrow t < 4$ s	(1)
	Slowing down $\Leftrightarrow a(t) < 0 \Leftrightarrow t > 4$ s	(1)



Aufgabe 12: Kurvenanpassung (19)



Der Plan rechts zeigt das künstlich aufgeschüttete Ferienresort „Dream Island“ der Investitionsgruppe Fake Holidays Inc. Ihre Uferlinie wird im Bereich $-4 \le x \le 4$ durch die Funktion $f(x) = -\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{16}$ beschrieben.

a) Zeige durch **Faktorisierung**, dass f die Nullstellen $x_{1/2} = \approx 3$ besitzt. (2)

b) Zeige, dass f zwei Maxima in den Punkten $M_{1/2}(\pm 2|\frac{25}{16})$ besitzt. (4)

c) Bestimme die Länge der geradlinigen Abtrennung des Nichtschwimmerbereiches zwischen den beiden Maxima. (1)

d) Bestimme die Gleichung aller Parabeln $g_t(x) = tx^2 + b_t$, die das Strandbad zum Meer hin abgrenzen und die Uferlinie f an den Stellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{6}$ treffen. (2) Kontrollergebnis: $g_t(x) = tx^2 + \frac{21}{16} - 6t$.

e) Skizziere g_t für $t_1 = -\frac{9}{32}$ und für $t_2 = -\frac{11}{96}$ in die Abbildung. (2)

f) Bestimme t so, dass die Begrenzungslinie g_t an den Stellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{6}$ **fließend**, d.h. **ohne Knick** in die Uferlinie f übergeht. (2)

g) Wie weit ist es vom Felsen A(1|3) zum ehemaligen Bootsanleger $M_2(2|\frac{25}{16})$? (2)

h) Bestimme die Gleichung der Geraden $n_s(x) = a_s x + b_s$, welche die Begrenzungslinie $g_{-1/4}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{45}{16}$ an der Stelle x = s **senkrecht** schneidet. (4)

Aufgabe 12: Kurvenanpassung (19)

a) $f(x) = -\frac{1}{16}(x^4 - 8x^2 - 9) = -\frac{1}{16}(x^2 - 9)(x^2 + 1) = -\frac{1}{16}(x + 3)(x - 3)(x^2 + 1)$ hat die Nullstellen $x_{1/2} = \pm 3$. (2)

b) $f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x = -\frac{1}{4}x(x + 2)(x - 2)$ und $f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1 = -\frac{3}{4}(x + \frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt{3}}{2})$ (2)

Maxima ($f' = 0$ und $f'' < 0$) bei $x_{3/4} = \pm 2$ mit $f(\pm 2) = \frac{25}{16}$ (2)

c) $\overline{M_1M_2} = 2 - (-2) = 4 \Rightarrow$ Es sind 400 m (1)

d) $f(\sqrt{6}) = \frac{21}{16} = 6t + b = g(\sqrt{6}) \Leftrightarrow b = \frac{21}{16} - 6t \Rightarrow g_t(x) = tx^2 + \frac{21}{16} - 6t.$ (2)

e) Für $t_1 = -\frac{9}{32}$ erhält man $b = \frac{21}{16} + 6\cdot\frac{9}{32} = 3$ und für $t_2 = -\frac{11}{96}$ ergibt sich $b = \frac{21}{16} + 6\cdot\frac{11}{96} = 2 \Rightarrow$ Skizze (2)

f) $\overline{AM_2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3 - \frac{25}{16})^2} \approx 1{,}75 \Rightarrow$ Es sind ca. 175 m (2)

g) $f'(\sqrt{6}) = -\frac{1}{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}\,t = g_t'(\sqrt{6}) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \Rightarrow g_{-1/4}(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{45}{16}.$ (2)

h) $n_s(x) = a_s x + b_s$ hat die Steigung $a_s = -\frac{1}{g_{-1/4}'(s)} = -\frac{1}{-0{,}5s} = \frac{2}{s}$ (2)

$n_s(s) = g_{-1/4}(s) \Leftrightarrow 2 + b_s = -\frac{1}{4}s^2 + \frac{45}{16} \Leftrightarrow b_2 = -\frac{1}{4}s^2 + \frac{13}{16} \Rightarrow n_s(x) = \frac{2}{s}x - \frac{s^2}{4} + \frac{13}{16}.$ (2)